Université de Batna 2. Semestre 2, 2022.
Mathématiques L3. **Module:** Analyse Numérique des EDO's et EDP's

**Série d'exercices $N°3$.**
**Étude théorique des schémas numériques des EDO's.**

**Exercice 1** *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$; $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y$ est la solution maximale du problème de Cauchy suivant :*

$$(PC)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

*On se donne une discrétisation de $[0, T]$, définie par $N \in \mathbb{N}$ et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. On pose : $h = t_{k+1} - t_k$; $\forall k = 0, \ldots, N-1$.*
*Pour la résolution numérique du problème (PC), on considère le schéma de discrétisation suivant :*

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné}, \\ \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))\right]. \end{cases}$$

*Montrer que ce schéma est convergent d'ordre 2.*

**Exercice 2** *On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \; t \in [a, b] \\ y(a) = y_0. \end{cases} \tag{E}$$

*où $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ et Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. On notera $Y(t)$ la solution exacte de (E).*
*Pour résoudre numériquement (E), on propose le schéma numérique suivant*

$$\begin{cases} y_0 = Y_0 \\ y_{n+1} = y_n + \alpha h f(t_n, y_n) + \beta h f(t_n + \lambda h, y_n + \lambda h f(t_n, y_n)), 0 \le n \le N-1. \end{cases} \tag{S}$$

*où $\lambda \in ]0, 1]$ est fixé, $\alpha, \beta$ sont des réels à choisir au mieux, $h = \frac{b-a}{N}$ et $t_n = a + nh, 0 \le n \le N (N \in \mathbb{N}$ fixé), $y_n$ étant une approximation de $Y(t_n)$.*

1. *Montrer que le schéma (S) est stable pour tout choix de $\alpha$ et $\beta$.*
2. *Déterminer une condition sur $\alpha$ et $\beta$ pour que le schéma (S) soit consistant avec le problème (E).*
3. *En déduire une condition sur $\alpha$ et $\beta$ pour que le schéma (S) converge.*

4. *Déterminer $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $\lambda$, pour que le schéma (S) soit d'ordre 2 (au moins).*

5. *En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - Y(t_n)| \leq K.h^2$$

**Exercice 3** *Montrer que la formule de Milne*

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$$

*est une méthode multipas d'ordre 4 qui est stable. Expliquer pourquoi ses coefficients sont les mêmes que pour la formule de quadrature de Simpson.*

**Exercice 4** *On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

*On choisit un pas $h$, on définit les instants $t_n$ ($n \geq 0$), et on note $f_n = f(t_n, y_n)$.Soit le schéma à 2 pas défini par :*

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} = h\beta f_{n+1}. \tag{1}$$

1. *Le schéma (1) est-il explicite ou implicite?*
   *Pour cette méthode, l'erreur locale de consistance est donnée par*

   $$\tau_n = y(t_{n+1}) + \alpha_0 y(t_n) + \alpha_1 y(t_{n-1}) - h\beta f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

   *Par définition, la méthode (1) est d'ordre $p$ si $\tau_n = O(h^{p+1})$ .*

2. *On suppose que la solution $y$ est de classe $C^3$ et : $y(t_n) \neq 0$, $y'(t_n) \neq 0$ et $y''(t_n) \neq 0$.*
   *Déterminer les coefficients $\alpha_0$, $\alpha_1$ et $\beta$ de sorte que la méthode (1) soit d'ordre 2.*

3. *En déduire que la méthode s'écrira*

$$y_{n+1} - \frac{4}{3}y_n + \frac{1}{3}y_{n-1} = \frac{2h}{3}f_{n+1}.$$