Exercice 11

1/ $f(x) = e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$ voir cour

2/ $g(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$ voir cour.

3/ $\varphi(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-2i\pi\xi x}\,dx = \left.\frac{e^{-2i\pi\xi x}}{-2i\pi\xi}\right|_{-a}^{a}, \xi \neq 0$$

$$= \frac{e^{2i\pi\xi a} - e^{-2i\pi\xi a}}{2i\pi\xi}, \quad \xi \neq 0$$

$$= \frac{1}{\pi\xi}\sin(2\pi\xi a), \quad \xi \neq 0$$

pour $\xi = 0$, $\hat{\varphi}(0) = \int_{-a}^{a} dx = 2a$.

Ainsi $\hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi\xi a)}{\pi\xi}, & \xi \neq 0 \\ 2a, & \xi = 0 \end{cases}$

4) $\chi(x) = \cos(\lambda x)\, \chi_{[-a,a]}(x)$.

on pose $\chi_{[-a,a]}(x) = \varphi(x)$.

Ainsi :

$$\chi(x) = \cos(\lambda x)\, \varphi(x).$$

Nous appliquons les relations de moivre.

$$\cos(\lambda x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}\right).$$

on a donc :

$$\chi(x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda x}\varphi(x) + e^{-i\lambda x}\varphi(x)\right)$$

On applique la propriété (proposition 1.4 du cours)

$$\tau_\alpha \hat{f}(\xi) = \widehat{e^{2i\pi\alpha t} f(t)}\,(\xi).$$

avec $\tau_\alpha \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$

pour $\alpha = \frac{\lambda}{2\pi}$ on obtient

$$\hat{\chi}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\hat{\varphi}\left(\xi - \frac{\lambda}{2\pi}\right) + \hat{\varphi}\left(\xi + \frac{\lambda}{2\pi}\right)\right]$$

avec $\hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi}, & \xi \neq 0 \\ 2a, & \xi = 0 \end{cases}$

Terminez le calcul....

Scanné avec CamScanner

Exercice : 12

1/ voir cour

2/ On a $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$, $g(x) = f(\lambda x - \mu)$.

~~On~~ $g(x) = f\left(\lambda\left(x - \frac{\mu}{\lambda}\right)\right)$

En utilisant les notations (voir cour page 3)

on Trouve :

$$g(x) = D_\lambda \circ \tau_{\frac{\mu}{\lambda}} f(x)$$

Donc $$\hat{g}(\xi) = \widehat{D_\lambda \circ \tau_{\frac{\mu}{\lambda}} f}(\xi)$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \widehat{\tau_{\frac{\mu}{\lambda}} f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \quad \text{(proposition 1.4)}$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} e^{-2i\pi \frac{\mu}{\lambda} \xi} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

3)

Ex : 13 :

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad a>0$$

1/ $f'(x) = -2ax f(x)$.

2/ posons $g_1(x) = x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ vérifier

Alors $f'(x) = -2a\, g(x) \longrightarrow (I)$

En utilisant proposition 1.3 (voir cour).

pour $k=1$, on obtient :

$$\widehat{f}'(\xi) = -2i\pi\, \widehat{g}_k(\xi) \longrightarrow (II)$$

et

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\, \widehat{f}(\xi)$$

Alors :

$$2i\pi\xi\, \widehat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi)$$

$$= -2a\, \widehat{g}_1(\xi) \quad (\text{de } (I) \text{ et la linéarité de } \mathcal{F})$$

$$= \frac{-2a}{-2i\pi}\, \widehat{f}'(\xi) \quad (\text{de } II)$$

Alors :

$$2i\pi\xi\, \widehat{f}(\xi) = \frac{a}{i\pi}\, \widehat{f}'(\xi)$$

Ainsi :

$$\widehat{f}'(\xi) + \frac{2\pi^2}{a}\xi\, \widehat{f}(\xi) = 0$$

Scanné avec CamScanner

3/

posons $\hat{f} = y$.

on obtient

$$y' + \frac{2\pi^2}{a} \xi y = 0$$

par séparation de variables

on trouve :

$$y = e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} = g(\xi).$$

4/ l'équation $\hat{f}'(\xi) + \frac{2\pi^2}{a} \xi \hat{f}(\xi) = 0 \to (*)$

admet une solution particulière

$g(\xi) = e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$ et en cherchant $\hat{f}(\xi)$

sous la forme $\hat{f}(\xi) = K(\xi) e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$

+

on Trouve

$$\hat{f}'(\xi) = K'(\xi)\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} - \frac{2\pi^2}{a}\xi K(\xi) e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$$

De (*) on obtient

$$\hat{f}'(\xi) + \frac{2\pi^2}{a}\xi K(\xi) = K'(\xi)\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2} = 0$$

Alors $K'(\xi) = 0 \quad , \forall \xi \in \mathbb{R}.$

donc $K(\xi) = c \in \mathbb{R} \quad , \forall \xi \in \mathbb{R}.$

~~et~~ Ainsi :

$$\hat{f}(0) = c \quad \text{et} \quad \hat{f}(0) = \int e^{-2i\pi(0)x} f(x)\,dx$$

Lq : $f(x) = e^{-ax^2}$.

alors :

$$c = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

donc :

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}.$$