Chapitre 1
Rappels sur les probabilités

1.1 Éléments d'analyse combinatoire

Supposons que $card(\Omega) = n$, où $n \geq 1$.

Définition 1.1 *Pour tout $i \geq 1$, on définit **le factoriel** de i par $i! = 1 \times 2 \times .... \times i$. On conviendra que $0! = 1$.*

Remarque 1.1 *Il est facile de voir que pour tout $i \geq 1$,*

$$i! = (i-1)! \times i = (i-2)! \times (i-1) \times i = ...$$

Définition 1.2 *On appelle **arrangement avec répétition** de k éléments choisis parmi n, un k-uplet $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)$ où $\omega_i \in \Omega$ pour tout $1 \leq i \leq k$.*

Exemple 1.1 *Soient $\Omega = \{a, b, c\}$, $k = 2$, les arrangement avec répétition de 2 éléments choisis dans Ω sont : $(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$.*

Remarque 1.2 *Il faut bien noter que dans un arrangement avec répétition, un éléments peut figurer plusieurs fois, et que l'ordre des éléments est pris en considération, ainsi dans l'exemple précédents les éléments (a, b) et (b, a) sont différents, ils sont donc comptés tous les deux.*

Proposition 1.1 *Le nombre d'arrangements avec répétition de k éléments choisis parmi n est n^k.*

Exemple 1.2 *Pour utiliser une carte de retrait bancaire, on a besoin d'un code de 4 chiffres. Combien de codes peut-on générer ?*
Solution :
Chaque code est un nombre de 4 chiffres de type abcd, où $a, b, c, d \in \{0, 1, ..., 9\}$. Ainsi le nombre de codes possibles est $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ codes.

Définition 1.3 *Soient $1 \leq k \leq n$, on appelle **arrangement sans répétition** de k éléments parmi n une disposition ordonnée sans répétition de k éléments choisis dans un ensemble de cardinal n.*

Exemple 1.3 *Soient $\Omega = \{a, b, c\}$, $k = 2$, les arrangements sans répétition de 2 éléments choisis dans Ω sont : $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$.*

Remarque 1.3 *Dans un arrangements sans répétition, on a pas le droit de choisir un élément plus qu'une fois dans une disposition, c'est pour cette raison que l'élément (a, a) ne figure pas dans l'exemple précédent, cependant l'ordre des éléments est pris en considération.*

Proposition 1.2 *Le nombre d'arrangements sans répétition de k éléments parmi n est noté $\mathcal{A}_n^k$, il est donné par la formule :*

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n-1) \times .... \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exemple 1.4 *On veut former un mot de 5 lettres avec l'alphabet Anglais avec la condition que chaque lettre apparaît au plus une fois (On ne tient pas compte du sens du mot).*
Solution :
Puisque on exige qu'une lettre ne peut apparaître qu'au plus une fois, il ne peut y avoir de répétition, c'est donc un arrangement sans répétition, ainsi on peut former $\mathcal{A}_{26}^5$ mots.

Définition 1.4 *Soient $n \geq 1$, Ω un ensemble avec $card(\Omega) = n$. On appelle* ***permutation sans répétition*** *de n éléments une disposition ordonnée des éléments de Ω où chaque éléments figure une seule fois et une seule.*

Exemple 1.5 *Soit $\Omega = \{a, b, c\}$, les permutations sans répétition des Ω sont : $abc, bac, bca, cba, cab, acb$.*

Proposition 1.3 *Le nombre de permutations sans répétition d'éléments d'un ensemble de cardinal n est $n!$.*

Exemple 1.6 *De combien de façons peut-on ranger 4 livres différents sur une étagère ?*
Solution :
Il y a 4 ! manières de ranger 4 livres différents sur une étagère.

Définition 1.5 *Soient $k \geq 1$, $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$ des ensembles différents contenant respectivement $n_1, n_2, ..., n_k$ éléments identiques. Posons $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. On appelle* ***permutation avec répétition*** *de n éléments une disposition ordonnée des ces éléments, où chaque éléments figure une seule fois et une seule.*

Exemple 1.7 *Considérons la disposition : aabcc, elle est composée de 3 groupes distincts, contenant respectivement 2, 1 et 2 éléments. Les permutations possibles de cette disposition sont : aabcc, aacbc, aaccb, acacb, accab, acabc,....etc*

Proposition 1.4 *Le nombre de permutations avec répétition d'un groupe de n éléments composé de k sous groupes différents, contenant respectivement $n_1, n_2, ..., n_k$ éléments identiques est égale à*

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times .... \times n_k!}$$

Exemple 1.8 *Le nombre de permutions des éléments : aabcc est donc* $\dfrac{5!}{2!1!2!} = 30.$

Définition 1.6 *Soient $1 \leq k \leq n$, Ω un ensemble contenant n éléments. On appelle* ***combinaison sans répétition*** *de k éléments de Ω une disposition non ordonnée et sans répétition de k éléments de Ω.*

Remarque 1.4 *D'après cette définition, on remarque que :*

- *Une combinaison sans répétition de k éléments parmi n est tout simplement un ensemble contenant k éléments qu'on choisis dans un plus grand ensemble de cardinal n.*

- *La différence entre une combinaison sans répétition et un arrangement sans répétition est donc le fait de considérer que l'ordre n'est pas important pour la première, alors qu'il est important pour un arrangement, ceci implique que le nombre de combinaisons sans répétition sera plus petit que le nombre d'arrangements sans répétition.*

Exemple 1.9 *Soit $\Omega = \{a, b, c\}$, les combinaisons sans répétition de 2 éléments de Ω sont : $\{a, b\}, \{a, c\}$ et $\{c, b\}$.*

Proposition 1.5 *Soient $0 \leq k \leq n$. Le nombre de combinaisons sans répétition de k éléments parmi n est noté $\mathcal{C}_n^k$, il est donné par la formule :*

$$\mathcal{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple 1.10 *Une urne contient 9 boules : 4 blanches, 2 noires et 3 rouges.*
On tire 3 boules de cette urne, de combien de manières peut-on tirer :

- *Deux boules blanches et une noire.*
- *Une boule de chaque couleur.*

Solution :

- *On a $\mathcal{C}_4^2$ façons de tirer deux boules blanches et $\mathcal{C}_2^1$ façons de tirer une boule noire, ainsi on a $\mathcal{C}_4^2 \times \mathcal{C}_2^1 = 12$ manières de tirer deux boules blanches et une noire.*
- *On a $\mathcal{C}_4^1$ façons de tirer une boule blanche, et $\mathcal{C}_2^1$ façons de tirer une boule noire et $\mathcal{C}_3^1$ façons de tirer une boule rouge, ainsi on a $\mathcal{C}_4^1 \times \mathcal{C}_2^1 \times \mathcal{C}_3^1 = 24$ manières de tirer une boule de chaque couleur.*

1.2 Espace de probabilité

1.2.1 Espace échantillon

Définition 1.7 *On appelle expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard lorsqu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.*

Exemple 1.11 *Donnons quelques exemples simples d'expériences aléatoires :*

1. *le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure.*
2. *Le jet d'un dé à six faces et l'observation de la face supérieure.*
3. *L'extraction d'une carte d'un jeu de 32 cartes.*
4. *La mesure de la durée de vie dune batterie de téléphone portable.*
5. *La détermination du nombre de personnes arrivant à un guichet dans une période donnée.*

Définition 1.8 *On appelle l'ensemble des tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire espace échantillon ou espace des épreuves. On le note Ω.*

Remarque 1.5 *Les espaces échantillons correspondent aux expériences aléatoires citées dans l'exemple précédent sont respectivement :*
$\Omega_1 = \{pile, face\}$, $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\Omega_3 =$ *lensembles des 32 carte*, $\Omega_4 = [0, +\infty[$, $\Omega_5 = \mathbb{N}$.

1.2.2 Tribu

Définition 1.9 *Soit Ω un espace échantillon, une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. *Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \in \mathcal{F}$*

Définition 1.10 *Soient Ω un espace échantillon, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé espace probabilisable ou espace mesurable.*

1.2.3 Espace de probabilité

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F})$ désigne un espace probabilisable.

Définition 1.11 *Soient $A, B, A_1, A_2, ...A_n$ des éléments de $\mathcal{F}$.*

1. *On dit que A et B sont **incompatibles** ou **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.*
2. *On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ sont **deux à deux incompatibles** si pour tout*
$$1 \leq i \neq j \leq n : A_i \cap A_j = \varnothing.$$
3. *On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment **un système complet** ou **une partition** de Ω, s'ils sont :*
   (a) *deux à deux incompatibles*
   (b) $\cup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$

Définition 1.12 *On appelle probabilité, toute application $\mathbb{P} : \Omega \to [0, 1]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. *σ-additivité : Pour toute famille $\{A_k, k \geq 1\}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles, on a :*
$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Remarque 1.6 *Cette définition mérite quelques explications :*

1. *La première condition est assez naturelle puisque par définition, Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles.*
2. *La condition de σ-additivité est aussi naturelle, en effet si on considère le jet d'un dé équilibré, la probabilité d'avoir un 2 ou un 4 est $2/6 = 1/6 + 1/6$ donc la somme des probabilités d'avoir un 2 et un 4.*
3. *De cette définition, on peut comprendre l'utilité de la notion de tribu, introduite dans la définition 1.3, ainsi la tribu peut être considérée comme le domaine de définition d'une probabilité $\mathbb{P}$. En effet dans cette dernière définition on peut parler de $\mathbb{P}(A_n)$ puisque $A_n \in \mathcal{F}$, mais on ne pouvait pas écrire $\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k)$ si $\mathcal{F}$ n'était pas une tribu.*

4. *On peut se demander pourquoi ne pas définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{P}(\Omega)$ tout simplement ? La réponse est que lorsque Ω est un ensemble fini, la tribu $\mathcal{F}$ sera souvent $\mathcal{P}(\Omega)$, mais lorsque Ω est un ensemble infini, ceci n'est pas possible en général, ces considérations sont purement théoriques et sortent du cadre de ce polycopié.*

Définition 1.13 *Si $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace probabilisable, $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, alors le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité.*

Proposition 1.6 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $A, B \in \mathcal{F}$, alors*

1. $\forall C \in \mathcal{F},\ 0 \leq \mathbb{P}(C) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. ***Croissance*** *: $\mathbb{P}$ est une application croissante :*
$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

Exemple 1.12 *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, $A, B \in \mathcal{F}$. Peut-on définir une probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant :*
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

Solution : *Il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)$ ce qui est impossible car $(A \cap B) \subset A$ et ceci implique d'après 5. de la proposition 1.6 que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$.*

Exemple 1.13 *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, $A, B \in \mathcal{F}$. Peut-on définir une probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant :*
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(B) = \frac{7}{8},\ \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Solution : *d'après 4. de la proposition 1.6 on a : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{8} > 1$ ce qui est impossible d'après la définition d'une probabilité.*

Remarque 1.7 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $A \in \mathcal{F}$.*

1. *L'ensemble vide est appelé l'évènement impossible.*
2. *Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est un évènement presque impossible.*
3. *Ω est appelé l'évènement certain.*
4. *Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que B est un évènement presque certain.*

Dans la définition de la σ-additivité (définition 1.12), on exige que les évènements $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ soient deux à deux incompatibles, pour pouvoir calculer la probabilité de la réunion de plusieurs évènements. Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, on a seulement une inégalité, dite **inégalité de Boole** :

Proposition 1.7 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors*
$$\mathbb{P}(\cup_{k \geq 1} A_k) \leq \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(A_k)$$

Une probabilité possède aussi une propriété qui nous sera utile pour la suite :

Proposition 1.8 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité.*

- *Si* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *est une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{F}$ $(i.e A_n \subset A_{n+1}$, *pour tout* $n \geq 1)$, *alors*
$$\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
- *Si* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *est une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{F}$ $(i.e A_{n+1} \subset A_n$, *pour tout* $n \geq 1)$, *alors*
$$\mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

1.2.4 Le cas équiprobable

Supposons dans ce paragraphe que Ω est un ensemble fini avec $card(\Omega) = n$, on peut l'écrire :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_1, ..., \omega_n\}.$$

Supposons aussi que tous les évènements $\{\omega_k\}$ sont équiprobables ou uniformes c-à-d.

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = ... = \mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

D'après la définition 1.12, on a par la propriété de σ-additivité :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n \{\omega_k\}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = n\mathbb{P}(\{\omega_k\})$$

Par suite

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n}$$

Soient à présent $1 \leq k \leq n$, $A \subset \Omega$, avec $card(A) = k$. Dans ce cas on peut écrire $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$, où chaque ω_i est choisit dans l'ensemble Ω. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{1\leq i\leq k} \{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = k\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{k}{n}$$

On a alors prouvé le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Dans le cas* ***équiprobable****, la probabilité d'un évènement A est donnée par :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$$

Afin d'illustrer ce résultat, donnons trois exemples :

Exemple 1.14 *On jette deux dés équilibrés, et on observe les faces supérieures des deux dés. Notons par A l'évènement : A : ń la somme des deux chiffres est égale à 5 ż. Calculer* $\mathbb{P}(A)$.
Solution :
Soit Ω *l'espace échantillon associé à cette expérience aléatoire, ainsi* $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. *Par suite* $card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. *De plus les deux dés sont équilibrés, donc chaque élément* (x, y) *de* Ω *a la même probabilité d'apparaître. On est par conséquent dans un cas* ***équiprobable****. D'autre part* $A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$. *Le théorème 1.1 donne :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Exemple 1.15 *On forme un nombre de 4 chiffres choisis au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, ..., 9\}$. Quelle est la probabilités que le nombre soit pair ?*
Solution :
Notons le nombre choisis par abcd et soit Ω l'espace échantillon associé à cette expérience aléatoire, ainsi

$$\Omega = \{abcd/a, b, c, d \in \{1, 2, ..., 9\}\}.$$

*D'où $card(\Omega) = 9{\times}9{\times}9{\times}9 = 9^4$. A présent, introduisons l'évènement B : ń le nombre choisis est pair ż. Puisque le nombre est choisi au hasard, on est dans un cas **équiprobable**. D'autre part le nombre abcd est pair si et seulement si $d \in \{2, 4, 6, 8\}$, donc $card(B) = 9 \times 9 \times 9 \times 4 = 9^3 \times 4$. On a par le théorème 1.1*

$$\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{9^3.4}{9^4} = \frac{4}{9}$$

Exemple 1.16 *Une urne contient 10 boules : 3 noires, 4 blanches et 3 rouges. On tire de cette urne 3 boules simultanément. calculer la probabilité des évènements suivants :*

1. *A : ń Avoir exactement 3 boules blanches ż.*
2. *B : ń Avoir une boule de chaque couleur ż.*
3. *C : ń Avoir au moins une boule rouge ż.*

Solution :
Dans cet exemple on n'attache pas d'importance à l'ordre d'apparition des boules, on forme donc un sous ensemble composé de trois boules choisis dans un ensemble de 10 boules. Par conséquent $card(\Omega) = \mathcal{C}_{10}^3$.

1. *Pour l'évènement A, on veut 3 boules blanches, pour réaliser cet évènement, on doit choisir nos 3 boules parmi les 4 boules blanches, on a donc $card(A) = \mathcal{C}_4^3$. Ainsi*
$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\mathcal{C}_4^3}{\mathcal{C}_{10}^3}.$$
2. *Pour l'évènement B, on veut avoir une boule de chaque couleur, donc on a 3 choix pour la noire, 4 pour la blanches et 3 pour la rouges, ainsi $card(B) = \mathcal{C}_3^1 \times \mathcal{C}_4^1 \times \mathcal{C}_3^1 = 3.4.3 = 36$. Donc*
$$\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{\mathcal{C}_3^1 \times \mathcal{C}_4^1 \times \mathcal{C}_3^1}{\mathcal{C}_{10}^3}.$$
3. *pour l'évènement, même si on peut calculer $\mathbb{P}(C)$ directement, il est préférable de calculer d'abord $\mathbb{P}(\overline{C})$ qui est plus simple. En effet, on a $\overline{C}$: $Nepasavoirdeboulerouge$, mais il y a 7 boules qui ne sont pas de couleur rouge, d'où $card(\overline{C}) = \mathcal{C}_7^3$. Par conséquent*
$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \frac{card(\overline{C})}{card(\Omega)} = 1 - \frac{\mathcal{C}_7^3}{\mathcal{C}_{10}^3}.$$

1.2.5 Probabilité de la réunion

En calcul des probabilités, on est souvent amené à calculer la probabilité de l'union de plusieurs évènements, si ces évènements sont deux à deux incompatibles alors on peut utiliser directement la formule σ-additivité, définition 1.12. Dans le cas général, la formule suivante, dite formule de **Poincaré**, donne cette probabilité :

Théorème 1.2 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\{A_k, 1 \leq k \leq n\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors on a :*

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$$

où

$$S_k = \sum_{i_1} \sum_{i_2} .... \sum_{i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}$$

où les sommes sont prises sur l'ensemble $\{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n\}$

Remarque 1.8 *Dans cette formule le terme S_k représente la somme des probabilités de toutes les intersections possibles de k- évènements choisis parmis les évènements $A_1, A_2, ..., A_n$. Appliquons cette formule pour $n = 2$ et $n = 3$:*

- *Pour $n = 2$, on a deux évènements A_1, A_2 d'après la formule de Poincaré on :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{2} A_k) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k-1} S_k = S_1 - S_2$$

  Donc on a deux sommes à calculer $S1, S2$:

$$S_1 = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2),\ S_2 = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2),$$

  d'où :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2).$$

- *Pour $n = 3$, on a trois évènements A_1, A_2, A_3 d'après la formule de Poincaré on :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} S_k = S_1 - S_2 + S_3$$

  Donc on a trois sommes à calculer S_1, S_2, S_3 :

  1. $S_1 = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$,
  2. $S_2 = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3)$,
  3. $S_3 = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$,
     d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} S_k \\ &= S_1 - S_2 + S_3 \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

Exemple 1.17 *Quatre personnes entrent dans un restaurent pour diner muni chacun de son parapluie noir, en sortant chacun prend un parapluie au hasard. Calculer la probabilité qu'au moins une personne récupère son parapluie.*
Solution :
introduisons les évènements :

- *E : ń Au moins une personne récupère son parapluie ż,*

- A_i : ń La i^{me} personne récupère son parapluie ż, $i \in 1, 2, 3, 4$

Dans cet exemple, Ω est l'ensemble de façons de distribuer les quatre parapluies sur leur propriétaires d'une manière aléatoire, ainsi $card(\Omega) = 4! = 24$.
D'autre part $card(A_i)$ est le nombre de manières de distribuer les parapluies sur les quatre personnes en donnant à la i^{me} personne le sien, ainsi on commence par donner à la i^{me} personne son parapluie, ensuite on distribue les trois parapluie restant sur les trois autres personnes, par conséquent : $card(Ai) = 3! = 6$. De même $card(A_i \cap A_j) = 2! = 2$ et $card(A_i \cap A_j \cap A_k) = card(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1$. Il est clair que $E = \cup_{i=1}^{4} A_i$, d'autre part, on a par le théorème 1.5 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{4} A_i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \\
&= S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \\
&= 4\frac{3!}{4!} - 6\frac{2}{4!} + 4\frac{1}{4!} - \frac{1}{4!}
\end{aligned}$$

1.3 Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 1.14 *Pour $A \in \mathcal{F}$, on désigne par $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilité de A sachant B, elle est définie par*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remarque 1.9 *Soient A, B deux évènements de Ω, $\mathbb{P}(A|B)$ se lit **la probabilité de A sachant B** ou la **probabilité conditionnelle de A par rapport à B**.*

La probabilité conditionnelle par rapport à un évènement permet d'introduire une nouvelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, en effet :

Proposition 1.9 *L'application $\mathbb{P}(.|B)$ définie de $\mathcal{F}$ vers $[0, 1]$ par :*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Démonstration : cours

Remarque 1.10 *Soient $C, D \in \mathcal{F}$. Cette proposition signifie en particulier que*

1. $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$.
2. $\mathbb{P}(C \cup D|B) = \mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(D|B) - \mathbb{P}(C \cap D|B)$.
3. *Si C et D sont incompatibles, alors* $\mathbb{P}(C \cup D|B) = \mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(D|B)$.
4. $\mathbb{P}(\overline{C}|B) = 1 - \mathbb{P}(C|B)$.

Exemple 1.18 *On jette successivement deux dés équilibrés. calculer la probabilité des évènements suivants :*

1. *A : ń La somme des chiffres sur les deux dés est un nombre pair ż.*
2. *B : ń La somme des chiffres sur les deux dés est un nombre pair sachant que le premier dé a donné le chiffre 5 ż.*

Solution :

1. $\Omega = \{(x,y)/x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$. *D'autre part, la somme de deux chiffres est paire si et seulement si les deux chiffres sont pairs ou impairs, d'où*
$$A = \{(x,y)/x,y \in \{1,3,5\}\} \cup \{(x,y)/x,y \in \{2,4,6\}\}$$
. Par conséquent, $card(A) = 9+9 = 18$ *et on a* $\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
2. *Pour le second évènement introduisons l'évènement C : ń le premier dé a donné le chiffre 5 ż. On a ainsi* $A \cap C = \{(5,y)/y \in \{1,3,5\}\}$ *et on a* $card(A \cap C) = 3$. *Donc* $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{3/36}{6/36} = \frac{1}{2}$

Exemple 1.19 *On jette deux pièces de monnaie équilibrés. Calculer*

1. *La probabilité que les deux pièces ramènent pile, sachant que la première a ramené pile.*
2. *La probabilité que les deux pièces ramènent face, sachant qu'au moins l'une d'entre elle a ramené face.*

Solution : *Pour* $i \in \{1,2\}$, *posons :* A_i *: ń La* i^{me} *pièce a ramené pile ż*

1. $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$
2. *On cherche* $\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 | \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} | \overline{A_1} \cup \overline{A_2}) &= \frac{\mathbb{P}((\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cap (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}))}{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})}{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})}{\mathbb{P}(\overline{A_1 \cap A_2})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})}{1 - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \\
&= \frac{1/4}{1 - 1/4} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Remarque 1.11 *Soient à présent* $A, C \in \mathcal{F}$ *avec* $\mathbb{P}(A) > 0$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$. *D'après la définition 1.14 de la probabilité conditionnelle, on a*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A). \tag{1.1}$$

De même

$$\mathbb{P}(C|A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cap B)}$$

ainsi

$$\mathbb{P}(C \cap A \cap B) = \mathbb{P}(C|A \cap B)\mathbb{P}(A \cap B) \tag{1.2}$$

En combinant l'équation (1.1) *et* (1.2)*, on obtient*

$$\mathbb{P}(C \cap A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A \cap B)$$

En faisant un raisonnement par récurrence, on peut généraliser cette dernière formule à n évènements.

Proposition 1.10 *Soient $n \geq 2$, $A_1, A_2, ..., A_n$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$, vérifiant :*

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n-1} A_k) > 0,$$

alors

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n} A_k) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)....\mathbb{P}(A_n| \cap_{k=1}^{n-1} A_k)$$

Remarque 1.12 *Cette proposition est souvent utilisée lorsqu'on veut calculer la probabilité de l'intersection de plusieurs évènements obtenus en répétant une expérience aléatoire plusieurs fois, et lorsque l'espace échantillon change à chaque répétition.*

Exemple 1.20 *Une urne contient une boule blanche et une boule noire, on tire des boules de cette urne jusqu'à ce que la noire appraisse. A chaque fois qu'une boule blanche est tirée, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. Calculer la probabilité que la boule noire n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages.*
Solution :
Pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, posons :

- B_i *: ń la boule tirée au i^{me} tirage est blanche ż*
- B *: ń la boule noire n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages ż.*

Il est facile de voir que :

$$B = \cap_{i=1}^{5} B_i$$

En appliquant la proposition précédente, sur l'évènement B

$$\begin{aligned}
B &= \cap_{i=1}^{5} B_i \\
&= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_3|A_1 \cap B_2)\mathbb{P}(B_4|A_1 \cap B_2 \cap B_3)\mathbb{P}(B_5|A_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

1.3.1 Formule des probabilités totales

Dans certaines situations on est amené à calculer la probabilité d'un évènement A, qui peut se réaliser à travers plusieurs alternatives. Soient $n \geq 2$, $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω avec $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Si $A \in \mathcal{F}$, on peut écrire

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (\cup_{k=1}^{n} A_k)) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n}(A \cap A_k))$$

Mais les évènements $\{A \cap A_k, k = 1, 2, ..., n\}$ sont deux à deux incompatibles, ainsi

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n}(A \cap A_k)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A|A_k)$$

On obtient ainsi :

Théorème 1.3 *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet de $\Omega, A \in \mathcal{F}$, alors on a* ***la formule de probabilités totales*** *:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A|A_k) \tag{1.3}$$

Exemple 1.21 *Une zone sensible est couverte par un radar, le constructeur de ce radar affirme que si un avion est présent dans sa zone de couverture, ce radar le détecte avec une probabilité 0.99, alors qu'il peut signaler un objet sur son écran sans la présence d'avion avec une probabilité* 0.1. *La probabilité qu'un avion survol cette zone est* 0.05.

1. *Calculer la probabilité que le radar signale la présence d'un objet sur son écran.*
2. *Calculer la probabilité que le radar faille à sa mission.*

Solution : *Introduisons les évènements :*

- *A : ń un avion est présent dans la zone de couverture ż.*
- *E : ń le radar signale la présence dun objet sur son écran ż.*

1. *On veut calculer $\mathbb{P}(E)$. On a par la formule de probabilité totale :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})\\ &= 0.99 \times 0.05 + 0.1 \times 0.95\\ &= 0.1445\end{aligned}$$

2. *On cherche $\mathbb{P}(\overline{E} \cap A)$.*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{E} \cap A) &= \mathbb{P}(\overline{E}|A)\mathbb{P}(A)\\ &= (1 - \mathbb{P}(E|A))\mathbb{P}(A)\\ &= 0.01 \times 0.05 = 0.005\end{aligned}$$

1.3.2 Formule de Bayes

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω, $A \in \mathcal{F}$ et supposons que $\mathbb{P}(A) > 0$ et que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Soit $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap A_k) = \mathbb{P}(A|A_k)\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k|A)\mathbb{P}(A).$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)}.$$

D'après la formule (1.3), formule des probabilités totales, on obtient **la formule de Bayes**

Théorème 1.4 *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω, $A \in \mathcal{F}$, avec $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Alors*

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|A_k)\mathbb{P}(A_k)} \quad \textbf{\textit{(Formule de Bayes)}}$$

Remarque 1.13 *La formule de Bayes est appelée aussi la formule des causes.*

Exemple 1.22 *On effectue un test dans un grand élevage de bovins pour dépister une maladie. Ce test a permis de déceler* 1.8% *de cas atteints chez les mâles et* 1.2% *chez les femelles. Cet élevage contient* 65% *de femelles.*

1. *Quelle est la probabilité qu'un animal choisis au hasard dans cet élevage soit atteint de cette maladie.*
2. *L'animal choisi est atteint de cette maladie, quelle est la probabilité qu'il soit un mâle.*

Solution : *Introduisons les évènements suivants :*

- *A : ń L'animal choisi est atteint de cette maladie ż.*
- *M : ń L'animal choisi est un mâle ż.*

1. *Pour la première question, on cherche $\mathbb{P}(A)$. On a par la formule des probabilités totales :*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M}) = 0.018 \times 0.35 + 0.012 \times 0.65 = 0.0141.$$

2. *Pour la deuxième question on cherche $\mathbb{P}(M|A)$. On a par la formule de Bayes :*

$$\mathbb{P}(M|A) = \frac{\mathbb{P}(A|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.018 \times 0.35}{0.0141} = 0.4468$$

1.3.3 Évènements indépendants

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 1.15 *On dit que les évènements A et B sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A).$$

Remarque 1.14 *Soient A et B deux évènements de Ω :*

- *Intuitivement, A et B sont indépendants si la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A et vice versa.*
- *Si A et B sont indépendants et si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors il n'est pas difficile de voir qu'on a aussi :*

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Une conséquence importante de la définition est :

Théorème 1.5 *Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \tag{1.4}$$

Remarque 1.15 *On peut prendre l'équation (1.4) comme définition pour l'indépendance de deux évènements, dans ce cas on est pas obligé de supposer que la probabilité de l'un des deux évènements est strictement positive.*

Exemple 1.23 *On jette une pièce de monnaie deux fois de suites et on considère les évènements :*

- *A : ń On obtient pile au premier jet ż*
- *B : ń On obtient le même résultat dans les deux jets ż*
- *C : ń On obtient pile dans les deux jets ż*

Pour cette expérience on a $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{pile, face\}\}$, *ainsi* $card(\Omega) = 4$. *D'autre part :*

- *A = (pile, pile),(pile, face)*
- *B = (pile, pile), (face, face)*
- *C = (pile, pile)*
- $A \cap B$ *= (pile, pile)*
- $A \cap C$ *= (pile, pile)*

d'où

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{2}$$

Par suite :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

donc A et B sont indépendants. Mais :

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

ce qui montre que A et C ne sont pas indépendants.

Proposition 1.11 *Soient A,B deux évènements de* Ω, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Les évènements A et B sont indépendants.*
2. *Les évènements* $\overline{A}$ *et B sont indépendants.*
3. *Les évènements A et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*
4. *Les évènements* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

En utilisant le théorème 1.5, on peut généraliser la notion d'indépendance à plusieurs évènements :

Définition 1.16 *Soient* $n \geq 2$, $A_1, A_2, ..., A_n$ *des évènements d'un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On dit que* $A_1, A_2, ..., A_n$ *sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{p} A_{k_i}) = \Pi_{i=1}^{p} A_{k_i} \tag{1.5}$$

pour tout $k_1, k_2, ..., k_p \in \{1, 2, ..., n\}$

Remarque 1.16 *D'après cette définition, pour montrer que n évènement sont indépendants il faut vérifier que l'équation (1.5) est valide pour toutes les intersections possibles des ces évènements, ainsi trois évènements A,B et C sont indépendants si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Exemple 1.24 *Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à jeter une pièce de monnaie deux fois de suite et d'observer les résultats obtenus. Soient A,B et C les évènements :*

- *A : ń Le résultat du premier jet est pile ż*
- *B : ń Le résultat du deuxième jet est pile ż*
- *C : ń On obtient le même résultat dans les deux jets ż*

Ici $\Omega = \{(x, y), avecx, y \in \{pile, face\}\}$, *donc* $card(\Omega) = 4$. *D'autre part :*

- $\mathbb{P}(C)$ *= La probabilité d'avoir deux fois pile ou deux fois face* $= \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(A \cap B)$ *= La probabilité davoir pile dans les deux jets* $= \dfrac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(A \cap C)$ *= La probabilité davoir pile dans les deux jets* $= \dfrac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(B \cap C)$*= La probabilité davoir pile dans les deux jets* $= \dfrac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ *= La probabilité davoir pile dans les deux jets* $= \dfrac{1}{4}$ *Par suite*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A \cap c) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Mais,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Par conséquent, les évènements A,B et C ne sont pas indépendants.