
Correction Examen Final : ♡ Logique Mathématiques ♡

Question de Cours (5 points):

1. Voir le cours..... 2 points
2. Voir le cours..... 2 points
3. Voir le cours..... 1 points

Exercice n°1 (5 points)

$$\begin{aligned} P &= [A \wedge (B \vee C \vee D)] \wedge [B \wedge (A \vee C \vee \neg D)] \wedge [C \wedge (A \vee B \vee \neg D)] \wedge [D \wedge (B \vee \neg A \vee \neg C)] \\ &= [(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge D)] \wedge [(B \wedge A) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge \neg D)] \wedge [(C \wedge A) \vee (C \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)] \\ &\quad \wedge [(D \wedge B) \vee (D \wedge \neg A) \vee (D \wedge \neg C)] \dots\dots\dots 2 \text{ points} \end{aligned}$$

On a : $(B \wedge D)$ est vraie , $(C \wedge \neg D)$ est vraie et chaque internaute a menti une seul fois donc : $(D \wedge \neg A)$, $(B \wedge \neg D)$ et $(A \wedge C)$ sont Fausses.

$$\begin{aligned} P &= [(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge D)] \wedge [(B \wedge A) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge \neg D)] \wedge \\ &\quad [(C \wedge A) \vee (C \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)] \wedge [(D \wedge B) \vee (D \wedge \neg A) \vee (D \wedge \neg C)]. \dots\dots\dots 1 \text{ points} \end{aligned}$$

⊙ Formules en bleue (Vraies), Formules en rouge (Fausses).

Donc :

- A a réellement chaté avec B et D.0.5 points
- B a réellement chaté avec A,C et D.0.5 points
- C a réellement chaté avec B.0.5 points
- D a réellement chaté avec A et B.0.5 points

Exercice n°2 (5 points)

1. Donner les formes **FNC** et **FND** des formules α , β et γ :

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \neg(\neg Q \vee \neg R) \rightarrow (P \leftrightarrow (R \vee \neg Q)) \equiv (\neg Q \vee \neg R) \vee [(P \rightarrow ((R \vee \neg Q) \wedge ((R \vee \neg Q) \rightarrow P))] \\ &\equiv (\neg Q \vee \neg R) \vee [(\neg P \vee ((R \vee \neg Q) \wedge ((\neg R \wedge Q) \vee P))] \\ &\equiv (\neg Q \vee \neg R) \vee [(\neg P \vee R \vee \neg Q) \wedge (P \vee (\neg R \wedge Q))] \\ &\equiv (\neg Q \vee \neg R) \vee [(\neg P \vee R \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (P \vee Q)] \\ &\equiv (\neg Q \vee \neg R \vee \neg P \vee R \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P \vee Q) \\ &\equiv (\neg Q \vee \neg R \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P \vee Q) \equiv \mathbf{FNC} \dots \mathbf{0.5 \text{ points}} \\ \alpha &\equiv \neg(\neg Q \vee \neg R) \rightarrow (P \leftrightarrow (R \vee \neg Q)) \equiv (\neg Q \vee \neg R) \vee [(P \wedge (R \vee \neg Q)) \vee (\neg P \wedge \neg(R \vee \neg Q))] \\ &\equiv (\neg Q \vee \neg R) \vee [(P \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R \wedge Q)] \\ &\equiv \neg Q \vee \neg R \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R \wedge Q) \equiv \mathbf{FND} \dots \mathbf{0.5 \text{ points}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &\equiv (P \wedge R) \rightarrow (P \rightarrow (R \vee Q)) \equiv (P \wedge R) \rightarrow (\neg P \vee (R \vee Q)) \equiv (\neg P \vee \neg R) \vee (\neg P \vee R \vee Q) \\ &\equiv (\neg P \vee \neg R \vee \neg P \vee R \vee Q) \equiv (\neg P \vee \neg R \vee R \vee Q) \equiv \mathbf{FND} \equiv H \equiv H \wedge H \equiv \mathbf{FNC} \dots \mathbf{1 \text{ point}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv P \wedge R \vee Q \equiv (P \wedge R) \vee (Q) \equiv \mathbf{FND} \dots \mathbf{0.5 \text{ points}} \\ \gamma &\equiv P \wedge R \vee Q \equiv (P \wedge R) \vee Q \equiv (P \vee Q) \wedge (R \vee Q) \equiv \mathbf{FNC} \dots \mathbf{0.5 \text{ points}} \end{aligned}$$

2. Montrons que β est un théorème et que $\alpha, \gamma \models \beta$:

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$P \wedge R$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge \neg R \wedge Q$	β	γ	α
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1

D'après la table de vérité (1 point) on remarque que:

- Toutes les lignes de β sont vraies; donc β est une tautologie.....0.5 points
- Dans toutes les lignes où α et γ sont vraies; β est aussi vraie. Alors $\alpha, \gamma \models \beta$.
.....0.5 points

Exercice n°3 (5 points)

Soient les énoncés élémentaires suivantes:

P \equiv Ali est étudiant, **Q** \equiv Bilal est étudiant et **R** \equiv Chiheb est étudiant.

Associer à chacun des énoncés suivants la formule propositionnelle qui semble lui correspondre sémantiquement:

→ (0.5 points).....pour chaque réponse:

- ❶ Ali et Bilal sont étudiants $\equiv P \wedge Q$.
- ❷ Ali ou Bilal est étudiant $\equiv P \vee Q$.
- ❸ Exactement un seul parmi Ali et Bilal est étudiant $\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
- ❹ Ni Ali ni Chiheb ne sont étudiants $\equiv \neg P \wedge \neg Q$.
- ❺ Au moins l'un des trois n'est pas étudiant $\equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$.
- ❻ Un seul parmi les trois n'est pas étudiant $\equiv (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$.
- ❼ Seulement deux, parmi les trois, sont étudiants $\equiv (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \equiv 6$.
- ❽ Si Ali est étudiant, Bilal l'est $\equiv P \rightarrow Q$.
- ❾ Si Ali est étudiant, Bilal l'est ; sinon Bilal ne l'est pas $\equiv (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)$.
- ❿ Ali est étudiant à condition que Chiheb le soit $\equiv P \rightarrow R$.
- ⓫ Que Chiheb soit étudiant est une condition nécessaire pour que Ali le soit $\equiv P \rightarrow R$.