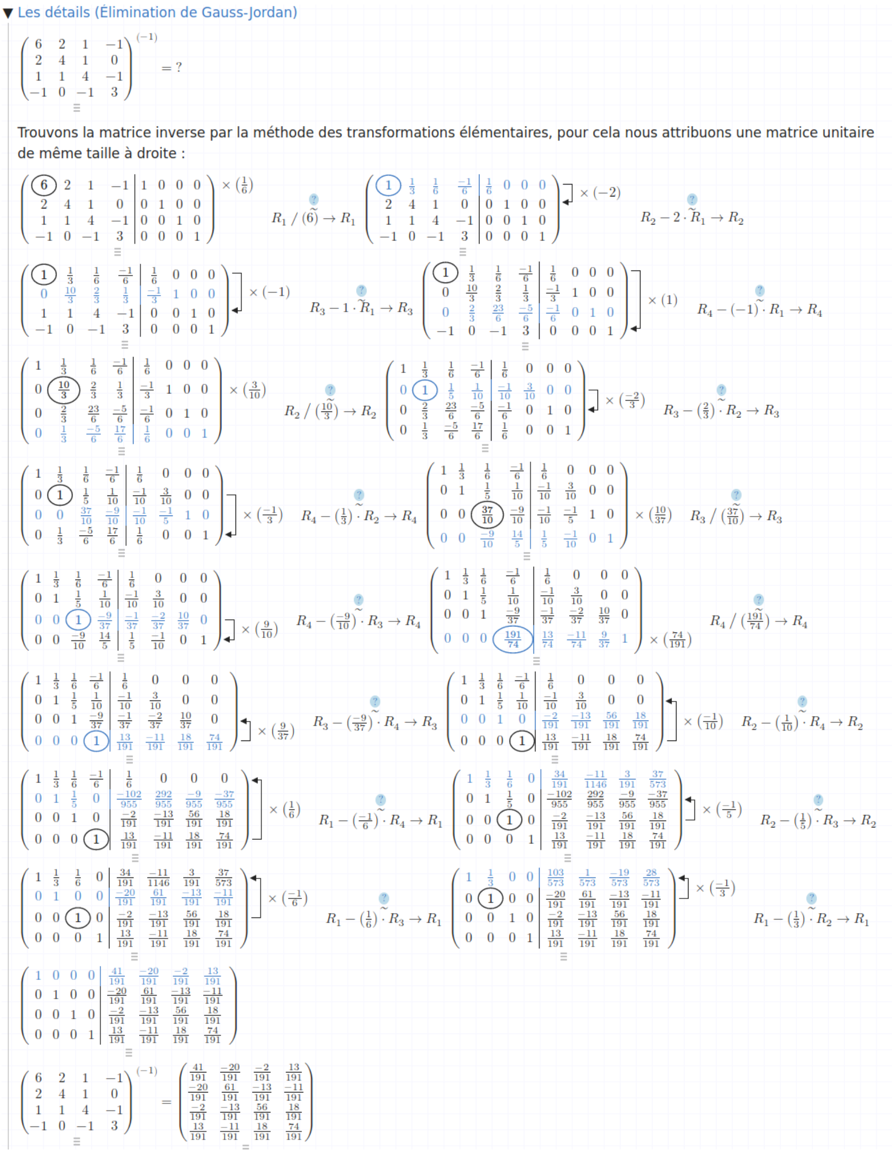
Exercice 1

Soit le systéme linéaire dont la matrice carrée d' ordre 4 associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 La matrice A est diagonalement dominante au sens strict car :
$\forall i = 1,2,3,4 : |a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ii}|, j = 1,2,3,4$
pour i=1 : $|a_{11}| = 6 \geq |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = 2+1+1 = 4.$
pour i=2 : $|a_{22}| = 4 \geq |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = 2+1+0 = 3.$
pour i=3 : $|a_{33}| = 4 \geq |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = 1+1+1 = 3.$
pour i=4 : $|a_{44}| = 3 \geq |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = 1+0+1 = 2.$

2 Calcul de l'inverse de A , avec la méthode de Gauss-Jordon on a :


▼ Les détails (Élimination de Gauss-Jordan)

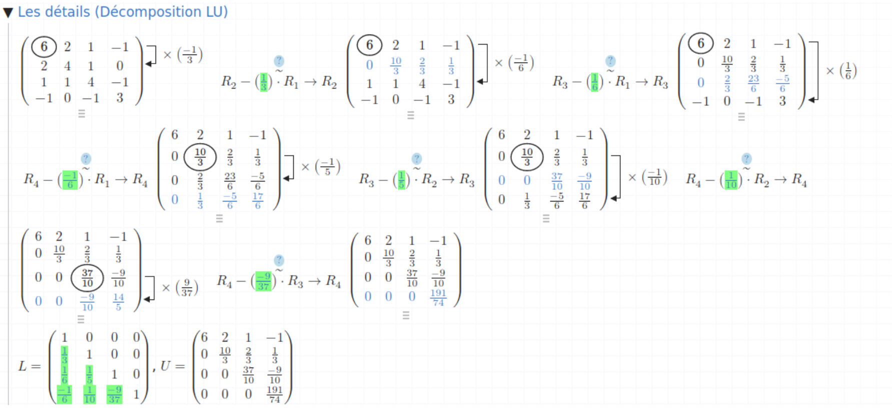
$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{(-1)} = ?$$

Trouvons la matrice inverse par la méthode des transformations élémentaires, pour cela nous attribuons une matrice unitaire de même taille à droite :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{41}{191} & \frac{-20}{191} & \frac{-2}{191} & \frac{13}{191} \\ \frac{-20}{191} & \frac{61}{191} & \frac{-13}{191} & \frac{-11}{191} \\ \frac{-2}{191} & \frac{-13}{191} & \frac{56}{191} & \frac{18}{191} \\ \frac{13}{191} & \frac{-11}{191} & \frac{18}{191} & \frac{74}{191} \end{pmatrix}$$

01 TD 02.png

3 Factorisation de A en produit de deux matrices L et U :



01 q3 TD 02.png

4 En déduire le déterminant de A sachant que A=L $\times$U :
On a $det\,(A) = det\,(L.U) = det\,(L) \times det\,(U) = \prod l_{ii} \times \prod u_{ii}$;
donc $det\,(A) = det\,(U) = \prod l_{ii} = 6 \times \frac{10}{3} \times \frac{37}{10} \times \frac{191}{74} = 191.$

Exercice 2

Étant donnée le systéme déquation linéaire AX=B tels que la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

1 Résolution approximativement le systéme par la méthode Jacobi pour un vecteur initiale $X^{(0)} = (1;0;0)$:

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 8y + 9z = 6 \\ 3x + 8y + z = 11 \\ x + 2y + 4z = 20 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(6 - 8y - 9z) \\ y = \frac{1}{8}(11 - 3x - z) \\ z = \frac{1}{4}(20 - x - 2y) \end{cases}$$

En appliquant le processus de Jacobi avec deux iterations on obtient :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{3}(6 - 8y^{(k)} - 9z^{(k)}) \\ y^{(k+1)} = \frac{1}{8}(11 - 3x^{(k)} - z^{(k)}) \\ z^{(k+1)} = \frac{1}{4}(20 - x^{(k)} - 2y^{(k)}) \end{cases}$$

$\odot 1^{ere}$ itteration : pour k=0

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{3}(6 - 8y^{(0)} - 9z^{(0)}) = 2 \\ y^{(1)} = \frac{1}{8}(11 - 3x^{(0)} - z^{(0)}) = 1 \\ z^{(1)} = \frac{1}{4}(20 - x^{(0)} - 2y^{(0)}) = \frac{19}{4} \end{cases} .$$

$\odot 2^{eme}$ itteration : pour k=1

$$\begin{cases} x^{(2)} = \frac{1}{3}(6 - 8y^{(1)} - 9z^{(1)}) = \frac{-179}{12} \\ y^{(2)} = \frac{1}{8}(11 - 3x^{(1)} - z^{(1)}) = \frac{1}{32} \\ z^{(2)} = \frac{1}{4}(20 - x^{(1)} - 2y^{(1)}) = 4 \end{cases} .$$

2 Détermination les valeurs propres de A :

$$\lambda \text{ valeur propre de A} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 8 & 9 \\ 3 & (8-\lambda) & 1 \\ 1 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -(\lambda+0.407)(\lambda-3.224)(\lambda-12.184) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -0.407 \\ \lambda_2 = 3.224 \\ \lambda_3 = 12.184 \end{cases}$$

3 calcul du rayon spectral de la matrice A :
$\rho(A) = Max_{\lambda vp A}|\lambda_i| = 12.184.$

4 En dduire $\| \ A \ \|_2$:
On a : $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t.A)} = \sqrt{\rho(H)}$; avec $H = A^t.A$
et comme A n'est pas symetrique , on va chercher les valeurs propre de H :

Exercice 3

On considére le systéme linéaire (S) : AX = b :

avec $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche résoudre (S) par les méthodes indirectes de type : $X_{k+1} = MX_k + D$:

1 A est symétrique car : $A^t = A$.
A est définie positive car :
$\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = det(A) = 4 > 0.$$

2 A est diagonalement dominante, car :
$\forall i = 1,2,3 : |a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ii}|, j = 1,2,3$
pour i=1 : $|a_{11}| = 2 \geq |a_{12}| + |a_{13}| = 1.$
pour i=2 : $|a_{22}| = 2 \geq |a_{21}| + |a_{23}| = 2.$
pour i=3 : $|a_{33}| = 2 \geq |a_{31}| + |a_{32}| = 1.$

3 Résolution du systéme (S) avec la méthode ittérative de Jacobi en partant du vecteur de départ initiale $X^{(0)} = (0;0;0)$ et avec 2 ittérations :
$X_{k+1} = JX_k + D$, avec :

$$J = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Donc : $J = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\odot 1^{ere}$ iteration : pour k=0

$X_1 = JX_0 + D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\odot 2^{eme}$ iteration : pour k=1

$X_2 = JX_1 + D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4 Récolution du systéme (S) avec la méthode ittérative de Gauss-Seidel. en partant du vecteur de départ initiale $X^{(0)} = (0;0;0)$ et avec 2 ittérations :

$$Ona: \qquad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1+y) \\ y = \frac{1}{2}(x+z) \\ z = \frac{1}{2}(1+y) \end{cases}.$$

On appliquant la méthode itérative de Gauss seidel :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1+y^{(k)}) \\ y^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x^{(k+1)}+z^{(k)}) \\ z^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1+y^{(k+1)}) \end{cases}.$$

$\odot 1^{ere}$ iteration : pour k=0

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{2}(1+y^{(0)}) = \frac{1}{2} \\ y^{(1)} = \frac{1}{2}(x^{(1)}+z^{(0)}) = \frac{1}{4} \\ z^{(1)} = \frac{1}{2}(1+y^{(1)}) = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$\odot 2^{eme}$ iteration : pour k=1

$$\begin{cases} x^{(2)} = \frac{1}{2}(1+y^{(1)}) = \frac{5}{8} \\ y^{(2)} = \frac{1}{2}(x^{(2)}+z^{(1)}) = \frac{5}{8} \\ z^{(2)} = \frac{1}{2}(1+y^{(2)}) = \frac{13}{16} \end{cases}$$

5 Quelle est celle qui converge plus rapidement , justifier ? On remarque que la solution exacte du systéme est $x^{(exacte)=(1,1,1)}$n donc si on calcul L'erreur :

$\odot$ iteration 1 pour k=0 :

$E_{GS} = \|x^{(exacte)} - x^{(0)}\|_\infty = \|(1-\frac{1}{2}; 1-\frac{1}{4}; 1-\frac{5}{8})\|_\infty = \frac{1}{2}$

$E_{Jacobi} = \|x^{(exacte)} - x^{(1)}\|_\infty = \|(1-\frac{1}{2}; 1-0; 1-\frac{1}{2})\|_\infty = 1$

$\odot$ iteration 2 pour k=1 :

$E_{GS} = \|x^{(exacte)} - x^{(2)}\|_\infty = \|(1-\frac{5}{8}; 1-\frac{5}{8}; 1-\frac{13}{16})\|_\infty = \frac{3}{8}$

$E_{Jacobi} = \|x^{(exacte)} - x^{(2)}\|_\infty = \|(1-\frac{1}{2}; 1-\frac{1}{4}; 1-\frac{1}{2})\|_\infty = \frac{3}{4}$

On remarque que dans tout les iterations $E_{GS} < E_{Jacobi}$, donc la méthode itérative de Gauss seidel converge plus rapide que celle de Jacobi.

Exercice 4

Soit le systéme d'équations linéaires :

$$(S)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z=\frac{11}{4} \\ \frac{-1}{2}x+y=\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+z=4 \end{cases} .$$

1 Résolution du systéme par la méthode itérative de Gauss seidel en partant du vecteur de départ initiale unité. Prendre la précision : $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$Ona : \qquad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{11}{4}-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z \\ y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x \\ z=4-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y \end{cases} .$$

On appliquant la méthode itérative de Gauss seidel :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(k+1)}=\frac{11}{4}-\frac{1}{2}y^{(k)}-\frac{1}{4}z^{(k)} \\ y^{(k+1)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^{(k)} \\ z^{(k+1)}=4-\frac{1}{2}x^{(k)}-\frac{1}{4}y^{(k)} \end{cases} .$$

$\odot 1^{ere}$ itteration : pour k=0

$$\begin{cases} x^{(1)}=\frac{11}{4}-\frac{1}{2}y^{(0)}-\frac{1}{4}z^{(0)}=2 \\ y^{(1)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^{(1)}=\frac{5}{2} \\ z^{(1)}=4-\frac{1}{2}x^{(1)}-\frac{1}{4}y^{(1)}=\frac{19}{8} \end{cases} .$$

L'erreur : $\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty = \|(2-1;\frac{5}{2}-1;\frac{19}{8}-1)\|_\infty = \|(1;\frac{3}{2};\frac{11}{8})\|_\infty = 1.5 > \varepsilon = 10^{-2}$

$\odot 2^{eme}$ itteration : pour k=1

$$\begin{cases} x^{(2)}=\frac{11}{4}-\frac{1}{2}y^{(1)}-\frac{1}{4}z^{(1)}=\frac{29}{32} \\ y^{(2)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^{(2)}=\frac{93}{64} \\ z^{(2)}=4-\frac{1}{2}x^{(2)}-\frac{1}{4}y^{(2)}=\frac{815}{256} \end{cases} .$$

L'erreur : $\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty = \|(2-\frac{29}{32};\frac{5}{2}-\frac{93}{64};\frac{19}{8}-\frac{815}{256})\|_\infty = \|(\frac{35}{32};\frac{167}{64};\frac{-207}{256})\|_\infty = \frac{167}{64} > \varepsilon = 10^{-2}$
...ect...on calcul $X^{(3)}, X^{(4}, X^{(5)}$... jusqau on obtient L'erreur : $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| < \varepsilon = 10^{-2}$

2 Résolution du méme systéme par Jacobi sachant que la solution exacte est $X^{(exacte)} = (1;2;3)$

$$Ona : \qquad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{11}{4}-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z \\ y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x \\ z=4-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y \end{cases} .$$

On appliquant la méthode itérative de Jacobi :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(k+1)}=\frac{11}{4}-\frac{1}{2}y^{(k)}-\frac{1}{4}z^{(k)} \\ y^{(k+1)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^{(k+1)} \\ z^{(k+1)}=4-\frac{1}{2}x^{(k+1)}-\frac{1}{4}y^{(k+1)} \end{cases} .$$

$\odot 1^{ere}$ itteration : pour k=0

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}y^{(0)} - \frac{1}{4}z^{(0)} = 2 \\ y^{(1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^{(0)} = 2 \\ z^{(1)} = 4 - \frac{1}{2}x^{(1)} - \frac{1}{4}y^{(1)} = \frac{13}{4} \end{cases}.$$

L'erreur : $\|x^{(exacte)} - x^{(0)}\|_\infty = \|(2-1; 2-2; \frac{13}{4} - 3)\|_\infty = \|(1; 0; \frac{1}{4})\|_\infty = 1 > \varepsilon = 10^{-2}$

$\odot 2^{eme}$ itteration : pour k=1

$$\begin{cases} x^{(2)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}y^{(1)} - \frac{1}{4}z^{(1)} = \frac{15}{16} \\ y^{(2)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^{(1)} = \frac{5}{2} \\ z^{(2)} = 4 - \frac{1}{2}x^{(1)} - \frac{1}{4}y^{(1)} = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

L'erreur : $\|x^{(exacte)} - x^{(2)}\|_\infty = \|(\frac{15}{16} - 1; \frac{5}{2} - 2; \frac{5}{2} - 3)\|_\infty = \|(\frac{-1}{16}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2})\|_\infty = \frac{1}{2} = 0.5 > \varepsilon = 10^{-2}$

$\odot 3^{eme}$ itteration : pour k=2

$$\begin{cases} x^{(3)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}y^{(2)} - \frac{1}{4}z^{(2)} = \frac{17}{8} \\ y^{(3)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^{(2)} = \frac{5}{2} = \frac{63}{32} \\ z^{(3)} = 4 - \frac{1}{2}x^{(2)} - \frac{1}{4}y^{(2)} = \frac{93}{32} \end{cases}.$$

3 Étudier le critére de convergence de la méthode de Gauss seidel.

Comme la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalement dominante car :

$\forall i = 1,2,3 : |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ii}|, j = 1,2,3$

pour i=1 : $|a_{11}| = 1 \geq |a_{12}| + |a_{13}| = \frac{3}{4}$.

pour i=2 : $|a_{22}| = 1 \geq |a_{21}| + |a_{23}| = \frac{1}{2}$.

pour i=3 : $|a_{33}| = 1 \geq |a_{31}| + |a_{32}| = \frac{3}{4}$.

Donc la méthode de Gauss seidel converge vers la solution exacte du systéme (S).

Exercice 5

On considre la matrice A et le vecteur b dfenis par : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

1 **a** Résolution du systéme AX=b par la méthode de Gauss.

La résolution par la méthode de Élimination de Gauss

Transformer la matrice augmentée de la matrice du système em uma forme échelonnée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 2 & \frac{5}{8} \end{array}\right) \times (3) \quad R_3 - (-3) \cdot R_2 \to R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{13}{8} \end{array}\right)$$

$$\equiv \quad \begin{cases} \frac{1}{8} \cdot x_1 + \frac{1}{4} \cdot x_3 = \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} \cdot x_2 = \frac{1}{3} \\ 2 \cdot x_3 = \frac{13}{8} \end{cases} (1)$$

- Déterminons la variable x_3 de l'équation 3 du système (1) :
  $2x_3 = \frac{13}{8}$
  $x_3 = \frac{13}{16}$
- Déterminons la variable x_2 de l'équation 2 du système (1) :
  $\frac{1}{3} \cdot x_2 = \frac{1}{3}$
  $x_2 = 1$
- Déterminons la variable x_1 de l'équation 1 du système (1) :
  $\frac{1}{8} \cdot x_1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cdot x_3 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{13}{16}\right) = \frac{11}{64}$
  $x_1 = \frac{11}{8}$

La réponse :

$x_1 = \frac{11}{8}$
$x_2 = 1$
$x_3 = \frac{13}{16}$

La solution générale : $X = \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ 1 \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix}$

2 exo 1a.png

b Endéduire le déterminant de A :

Comme la matrice de Gauss et tria,gulaire ; donc : det (A)= $a_{11} \times a_{22} \times a_{33} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \times 2$
Donc det(A)= $\frac{1}{12}$

c On ne peut pas utiliser la méthode de Cholesky pour retrouver la solution du systéme AX=b car la matrice n'est pas symetrique.

2 **a** Le processus itératif de Jacobi correspondant au systéme AX=b :

Le système linéaire $Ax = b$ s'écrit

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad \text{pour } 2 \le i \le n-1, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = b_n. \end{cases}$$

La méthode de Jacobi consiste, à chaque itération k, à résoudre chaque équation par rapport à l'une des variables, les autres étant fixées à leurs valeurs obtenues à l'itération précédente. Soit donc le vecteur $x^{(k)}$ donné, alors on détermine successivement les

5 2a1.png

composantes de $x^{(k+1)}$ par les formules :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1^{(k+1)} & = & b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}, \\ & \dots & \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} & = & b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}, \quad \text{pour } 2 \le i \le n-1, \\ & \dots & \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} & = & b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)}. \end{array}\right.$$

Les formules précédentes ne définissent effectivement $x^{(k+1)}$ que si les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls. Ceci n'est pas une restriction, car on peut démontrer que si une matrice est inversible, il existe une permutation de ses lignes telle que tous les éléments de la diagonale de la matrice ainsi obtenue soient non nuls (voir exercice).

On peut écrire les relations précédentes sous forme matricielle. Pour cela introduisons la décomposition suivante de A :

$$A = D - E - F,$$

avec
- D matrice diagonale contenant la diagonale de A,
- E matrice triangulaire inférieure (triangle inférieur de $-A$),
- F matrice triangulaire supérieure (triangle supérieur de $-A$),

5 2a2.png

Avec ces notations on peut écrire le système $Ax = b$ sous la forme

$$Dx = (E+F)x + b,$$

La méthode de Jacobi s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(0)} \text{ donné}, \\ Dx^{(k+1)} = (E+F)x^{(k)} + b. \end{array}\right.$$

5 2a 3 .png

d'ou le type : $X_{k+1} = JX_k + D$, avec :

$$J = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

b Soit $X^{(0)} = (\frac{1}{2};0;1)$, calculer $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$. Donner l'erreur absolue commise dans chacun des cas en norme $\| A \|_\infty$:

On appliquant la méthode itérative de Jacobi :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(k+1)} = 8(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}z^{(k)}) = 3 - 2z^{(k)} \\ y^{(k+1)} = 3.\frac{1}{3} = 1 \\ z^{(k+1)} = \frac{1}{2}(\frac{5}{8} + y^{(k)}) \end{cases}.$$

$\odot 1^{ere}$ itteration : pour k=0

$$\begin{cases} x^{(1)} = 8(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}z^{(0)}) = 3 - 2z^{(0)} = 1 \\ y^{(1)} = 3.\frac{1}{3} = 1 \\ z^{(1)} = \frac{1}{2}(\frac{5}{8} + y^{(0)}) = \frac{5}{16} \end{cases}.$$

L'erreur : $\|x^{(exacte)} - x^{(1)}\|_\infty = \|(\frac{11}{8} - 1; 1 - 1; \frac{13}{16} - \frac{5}{16})\|_\infty = \|(\frac{3}{8}; 0; \frac{1}{2})\|_\infty = 0.5$

$\odot 2^{eme}$ itteration : pour k=1

$$\begin{cases} x^{(2)} = 8(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}z^{(1)}) = 3 - 2z^{(1)} = \frac{19}{8} \\ y^{(2)} = 3.\frac{1}{3} = 1 \\ z^{(2)} = \frac{1}{2}(\frac{5}{8} + y^{(1)}) = \frac{13}{16} \end{cases}.$$

L'erreur : $\|x^{(exacte)} - x^{(2)}\|_\infty = \|(\frac{11}{8} - \frac{19}{8}; 1 - 1; \frac{13}{16} - \frac{13}{16})\|_\infty = \|(1; 0; 0)\|_\infty = 1$

c Etudier la convergence de cette méthode :

$\|J\|_\infty = \| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \|_\infty = Max\{2, 0, \frac{1}{2}\} = 2 > 1;$

donc la methode de Jacobi ne converge pas.

3 On ne peut pas réécrire les systéme AX=b de maniére assurer la convergence de la méthode de Jacobi $\forall X^{(0)} \in R^3$; car si on permette les lignes de A toujours on tombe sur $a_{ii} = 0$ pour un certain $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 6

1 Résolution par la méthode du pivot de Gauss le systéme suivant :

$$(S) \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases} ; a \in \mathbb{R}^*$$

On a $det(A) = 4a \neq 0$, car : $a \in \mathbb{R}^*$

donc le systéme admet une solution unique.

On appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} (a+1) & (a-1) & \vdots & 1 \\ (a-1) & (a+1) & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L1 \to L1 \\ L2 \to L1\left(\frac{1-a}{a+1}\right) + L1 \end{matrix} \to\to \begin{pmatrix} (a+1) & (a-1) & \vdots & 1 \\ 0 & \frac{4a}{(a+1)} & \vdots & \frac{2}{a+1} \end{pmatrix}$$

Donc : $(S) \iff \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ \frac{4a}{(a+1)}y = \frac{2}{a+1} \end{cases}$; alors :$y = x = \frac{1}{2a}$

2 On pose $a = 2$. On Choisit la méthode itérative de GAUSS-SEIDEL pour résoudre le systéme (S) en partant du vecteur de départ initiale $(x^{(0)}; y^{(0)}) = (0; 0)$ et avec deux itérations :

$$(S) \iff \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 1 \\ y + 3x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - 3y \\ y = 1 - 3x \end{cases}$$

On appliquant la méthode de GAUSS-SEIDEL : $\begin{cases} x^{(k+1)} = 1 - 3y^{(k)} \\ y^{(k+1)} = 1 - 3x^{(k+1)} \end{cases}$

$\odot 1^{ere}$ itteration : pour k=0

$$\begin{cases} x^{(1)} = 1 - 3y^{(0)} = 1 \\ y^{(1)} = 1 - 3x^{(1)} = -2 \end{cases}.$$

$\odot 2^{eme}$ itteration : pour k=1

$$\begin{cases} x^{(2)} = 1 - 3y^{(1)} = 5 \\ y^{(2)} = 1 - 3x^{(2)} = -14 \end{cases}.$$