Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

SOLUTIONS TD 03

Exercice 1 80 *personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à* 0.02192. *Soit* X *la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les personnes de ce groupe.*

1. *Justifier que* X *suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*
2. X *Calculer l'espérance de et interpréter le résultat.*
3. *Donner la valeur de :*
   (a) *la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique.*
   (b) *la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.*

Solution de l'exercice 1 :

1. *On répète* 80 *fois la même expérience aléatoire. Toutes les "tirages" sont identiques, indépendants. Chaque expérience possède exactement deux résultats :* S *et* $\bar{S}$. *De plus* $P(S) = 0,02192$. *Donc* X *suit la loi binomiale de paramètres* $n = 80$ *et* $p = 0,02192$.

$$X \sim \mathcal{B}(80, 0.2192).$$

Alors :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathcal{C}_{80}^{k} p^k (1-p)^{80-k}, \quad k \in X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 80\}$$

2. $\mathbb{E}(X) = np = 1,7536$
   Un moyenne environ 1.7 *personnes feront sonner le portique.*
3. (a) *La probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique est :*

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathcal{C}_{80}^{0}(0,02192)^0(1-0,02192)^{80} \approx 0,830$$

   (b) *La probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique est :*

$$\mathbb{P}(X \leq 5) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + ... + \mathbb{P}(X = 5) \approx 0,992$$

Exercice 2 *Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à* 25 *entreprises. La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de* 0.2 *et on suppose que ces réponses sont indépendantes. Soit* X *la variable aléatoire comptant le nombre de réponse.*

1. *Trouver est la loi de* X.
2. *Quelle est la probabilité, que la personne reçoive au moins* X *réponses ?*

Solution de l'exercice 2 :

1. *On effectue 25 tirages aléatoires, identiques et indépendants. A chaque tirage il n'y a que deux issues : l'événement E " l'entreprise lui répond " et $\bar{E}$.De plus $\mathbb{P}(E) = 0,2$.*
   La variable aléatoire X comptant le nombre de réponse suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0.2$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathcal{C}_{25}^{k} p^k (1-p)^{25-k}, \quad k \in X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 25\}$$

   .

2. $\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) \approx 0,58$

Exercice 3 *On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre des ampoules défectueuses.*

1. *Trouver la loi de X*
2. *Calculer la probabilité des événements :*
   (a) *A : au moins une ampoule est défectueuse ;*
   (b) *B : les 3 ampoules sont défectueuses ;*
   (c) *C : exactement une ampoule est défectueuse.*

Solution de l'exercice 3 *:*

1. *X suit une loi hypergéométrique de paramètres $N = 15$, $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$. En effet, On tire simultanément $n = 3$ boules (ampoules) dans une urne contenant $N = 15$ boules (ampoules) dont $N_1 = pN = 5$ boules gagnantes (ampoules défectueuse) et $N_2 = (1-p)N = 10$ boules perdantes, avec $p = 1/3$. la variable X compte le nombre de boules gagnantes (ampoules défectueuse) donc*

$$X \sim \mathcal{H}(15, 3, \frac{1}{3})$$

   et

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathcal{C}_5^k \mathcal{C}_{10}^{3-k}}{\mathcal{C}_{15}^3}, \quad k \in X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

2. (a) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{\mathcal{C}_5^0 \mathcal{C}_{10}^3}{\mathcal{C}_{15}^3} = 0.73626$
   (b) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{\mathcal{C}_5^3 \mathcal{C}_{10}^0}{\mathcal{C}_{15}^3} = 2.1978 \times 10^{-2}$
   (c) $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{\mathcal{C}_5^1 \mathcal{C}_{10}^2}{\mathcal{C}_{15}^3} = 0.49451$

Exercice 4 *Dans une urne on dispose de 10 boules blanches et 20 boules noires. Deux joueurs tirent chacun une boule de l'urne. Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gagnant est celui qui à tiré une boule blanche. si les deux boules tirées sont de la même couleur, elles sont remise dans l'urne et on répète l'opération. On désigne par X le nombre de tirage nécessaires pour qu'il y ait victoire de l'un ou l'autre des deux joueurs.*

1. *Trouver la loi de X.*
2. *Calculer la probabilité que l'un des deux joueur gagne après le 5ème tirage.*
3. *Calculer l'espérance mathématique de X.*

Solution de l'exercice 4 *: Le nombre de tirage nécessaire pour qu'il y ait une victoire de l'un ou de l'autre est la variable aléatoire qui donne le rang du premier succès avec une probabilité* $p \in]0,1[$. *Alors la variable aléatoire* X *suit une loi géométrique de paramètre* p.

$$X \sim \mathcal{G}(p).$$

Donc

$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in X(\Omega) = \{1,2,3,.....\}$$

avec p *est la probabilité de l'événement* $(B_1N_2 \cup B_2N_1)$, *d'où/*

— B_i *"le* i^{me} *joueur a tiré une boule blanche "*

— N_i *"le* i^{me} *joueur a tiré une boule noire "*

alors

$$p = \mathbb{P}(B_1N_2 \cup B_2N_1) = \mathbb{P}(B_1N_2) + \mathbb{P}(B_2N_1) = \frac{10}{30} \times \frac{20}{29} + \frac{10}{30} \times \frac{20}{29} = 0.4597$$

$= \mathbb{P}(X=6) = p(1-p)^5 = 0.4597 \times (1-0.4597)^5 = 0.0211$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.4597} = 2.1753$

Exercice 5 *Dans un service médical des urgences, le nombre de malades nécessitant l'appel du médecin de garde chaque* $6H$ *est en moyenne de* 4. *On note par* X *la variable aléatoire qui compte le nombre d'appel du médecin de garde.*

1. *Déterminer la loi de* X
2. *Déterminer l'espérance et la variance de* X.
3. *Quelle est la probabilité que le médecin de garde n'ait aucun appel entre* $14h:00$ *et* $20h:00$
4. *Quelle est la probabilité que le médecin de garde ait au moins deux appels entre* $14h:00$ *et* $17h:00$

Solution de l'exercice 5 *:*

1. *On remarque que* X *compte le nombre d'appels qui se produisent dans un intervalle de temps* $(6H)$, *avec une moyenne de* 4. *alors la variable aléatoire* X *suit une loi de poisson de paramètre* $\lambda = 4$

$$X \sim \mathcal{P}(4)$$

Donc

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-4}\frac{4^k}{k!}, \quad k \in X(\Omega) = \mathbb{N}$$

2. $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda = 4$
3. $\mathbb{P}(X=0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = e^{-4} = 0.0183$
4. *On remarque ici que* $X \sim \mathcal{P}(2)$ *puisque la durée est* $3H$, *alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X<2)\\ &= 1 - [\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)]\\ &= 1 - [e^{-2} + e^{-2}\frac{2^1}{1!}]\\ &= 0.5939\end{aligned}$$

Exercice 6 *Soit n un entier naturel et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(1/n)$.*

1. *Montrer que $\mathbb{P}(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.*
2. *Montrer que $\mathbb{P}(|X-n| \geq n) \leq 1-\frac{1}{n}$. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2n) \leq 1-\frac{1}{n}$.*

Solution de l'exercice 6 *: Rappelons que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p vaut $\frac{1}{p}$ et que sa variance vaut $\frac{q}{p^2}$, avec $q = 1-p$.*

1. *X étant à valeurs positives de moyenne n, l'inégalité de Markov donne, pour tout $a > 0$*
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{n}{a}.$$
On obtient le résultat voulu avec $a = n^2$
$$\mathbb{P}(X \geq n^2) \leq \frac{n^2}{n} = \frac{1}{n}.$$
2. *On a $Var(X) = \left(1-\frac{1}{n}\right)n^2 = n(n-1)$. On obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\varepsilon > 0$*
$$\mathbb{P}(|X-n| \geq \varepsilon) \leq \frac{n(n-1)}{\varepsilon^2}.$$
Pour $\varepsilon = n$

, on obtient
$$\mathbb{P}(|X-n| \geq n) \leq \frac{n(n-1)}{n^2} = 1-\frac{1}{n}.$$
De plus, X étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, les événements $|X-n| \geq n$ et $X \geq 2n$ sont égaux, ce qui donne la deuxième inégalité.

Exercice 7

1. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que*
$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
.
2. *Application : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100 ?*

Solution de l'exercice 7 *:*

1. *Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $Y = \frac{X}{n}$. On a*
$$\mathbb{P}(|Y-\mathbb{E}(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(Y)}{\varepsilon^2}.$$
. Mais ici, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n}E(X) = p$ et $Var(Y) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{p(1-p)}{n}$. Ceci donne donc immédiatement le résultat.

2. *Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du chiffre 6 au cours des n lancers. X suit la loi $\mathcal{B}(n,1/6)$. On cherche n tel que*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right)\geq 0,95 \iff \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|\geq\frac{1}{100}\right)\leq 0,05.$$

On applique ensuite le résultat de la question précédente avec $\varepsilon=\frac{1}{100}$ et $p=\frac{1}{6}$. Il suffit que n vérifie

$$\frac{5\times 10^4}{36n}\leq 0,05$$

soit

$$n\geq 27778.$$

Il suffit d'effectuer 27778 lancers.

Exercice 8 *On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720*

Solution de l'exercice 8 *: Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit une loi binomiale de paramètres 3600 et $1/6$. On sait donc que $\mathbb{E}(S)=600$ et $Var(S)=500$. Remarquons en outre que*

$$480<S<720 \iff -120<S-600<120 \iff |S-600|<120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev,

$$\mathbb{P}(|S-600|\geq 120)\leq\frac{500}{120^2}\leq 0,035.$$

On en déduit que

$$P(480<S<720)\geq 1-0,035=0,965.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3600 lancers est supérieur à $0,96$.