Mr. ADOUI Salah / 2024.	SERIE D'EXERCICES	Dépt Mathématiques.
L2- GROUPES : 1, 2, 3 et 4	**TD : 02**	Prababilités

Exercice 1

Dans une université, on a relevé qu'au cours d'une année : 40% des étudiants ont été absents au moins 1 jour, 30% des étudiants ont été absents au moins 2 jours, 15% des étudiants ont été absents au moins 3 jours, 10% des étudiants ont été absents au moins 4 jours. On choisit au hasard un tudiant de cette entreprise. Quelle est la probabilité pour que cet étudiant :

1. n'ait jamais été absent au cours de cette année ?
2. ait été absent une seule journée au cours de cette année ?
3. ait été absent au plus 3 jours au cours de cette année ?

Exercice 2

On vous propose le jeu suivant. Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser $1DA$. On jette deux dés simultanément. Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien. Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne $1DA$. Enfin, si les dés présentent deux fois le meme chiffre pair, on gagne une somme égale la somme de ces deux chiffres, par exemple on gagne $8DA$ si on fait un double quatre. Joueriez-vous á ce jeu ?

Exercice 3

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de sujets révisés parmi les 3 sujets choisis

1. En utilisant la variable aléatoire X, quelle est la probabilité des événements suivants :
   — A : les trois sujets tirés ont été révisés ;
   — B : exactement deux des trois sujets tirés ont été révisés ;
   — C : aucun des trois sujets .
2. Donner la loi de probabilité de X
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X

Exercice 4

Une urne contient 6 boules blanches et n boules rouges (n est un nombre entier tel que $n \geq 2$) toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2DA, et pour chaque boule rouge, il perd 3DA. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

1. Quelles sont les diffrentes valeurs que peut prendre X ?
2. Montrer que : $\mathbb{P}(X = -1) = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$.

3 Déterminer la loi de probabilité de X.

4 Montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{-6(n^2+n-20)}{(n+6)(n+5)}$.

5 Discuter selon la valeur de n de l'intérét de jouer á ce jeu.

Exercice 5

Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes notées A et B. On admettra que 5% des appareils sont concernés par la panne A, 3% par la panne B et 1% par les deux. On préléve au hasard un appareil dans la production. On note :

- A l'événement : "L'appareil présente la panne A."
- B l'événement : "L'appareil présente la panne B."

L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un cout de fabrication de 200€. La réparation d'une panne A coute 60€ l'entreprise, la réparation d'une panne B coute 40€ et la réparation des deux pannes coute 100€. On considére la variable aléatoire X qui, chaque appareil, associe son prix de revient total (cout de fabrication et cout de la réparation éventuelle).

1 Etablir le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2 Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X. Interpréter.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

1 Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.

2 Dterminer la fonction de répartition de X et la tracer.

3 Calculer l'espérance de X.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et 0 sinon.

1 Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X

2 Déterminer la fonction de répartition de X.

3 Calculer l'espérance de X.

4 On pose $Y = 2X + 1$.

- **a** Déterminer la fonction de répartition de Y.
- **b** Démontrer que Y est une variable aléatoire á densité, et déterminer la densité de Y.
- **c** Reprendre les memes questions avec $Y = X^2$.

Exercice 8

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer c.
2. Quelle est la fonction de répartition de X
3. La station est réapprovisionne chaque lundi á $20h$. Quelle doit etre la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure á 10^{-5}?

Exercice 9

La fonction de densité de X, variable aléatoire représentant la durée de vie en heures d'un certain composant électronique, est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10. \end{cases}$$

1. Trouver $\mathbb{P}(X > 20)$.
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?
3. Soit Y la variable aléatoire qui décrit le nombre de composants k fonctionnant au moins 15 heures parmi n composants, de la loi de probabilité suivante

$$\mathbb{P}(Y = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \leq n$$

avec p est la la probabilité qu'un composant fonctionne au moins 15 heures

   a. Quelle est la probabilité que parmi 6 composants, au moins 3 d'entre eux fonctionnent au moins 15 heures ?
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 10

La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'une boulangerie vend en 1 journée est une variable aléatoire X de fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de c.
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?
3. Soit A l'événement : le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est supérieur á 300 kg . Soit B l'événement : le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre 150 et 450 kg . Les événements sont-ils indépendants ?