Mr. ADOUI Salah / 2024.
L2- GROUPES : 1, 2, 3 et 4

SERIE D'EXERCICES
TD : 03

Dépt Mathématiques.
Prababilités

Exercice 1

80 personnes s'apprétent á passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale a 0.02192. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramétres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Donner la valeur de :
   a. la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique.
   b. la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

Exercice 2

Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature a 25 entreprises. La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0.2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de réponse.

1. Trouver la loi de X.
2. Quelle est la probabilité, que la personne recoive au moins X réponses ?

Exercice 3

On prend au hasard, en méme temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre des ampoules défectueuses.

1. Trouver la loi de X
2. Calculer la probabilité des événements :
   a. A : au moins une ampoule est défectueuse ;
   b. B : les 3 ampoules sont défectueuses ;
   c. C : exactement une ampoule est défectueuse.

Exercice 4

Dans une urne on dispose de 10 boules blanches et 20 boules noires. Deux joueurs tirent chacun une boule de l'urne. Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gagnant est celui qui á tiré une boule blanche. si les deux boules tirées sont de la méme couleur, elles sont remise dans l'urne et on répéte l'opération. On désigne par X le nombre de tirage nécessaires pour qu'il y ait victoire de l'un ou l'autre des deux joueurs.

1. Trouver la loi de X.
2. Calculer la probabilité que l'un des deux joueur gagne aprés le 5éme tirage.
3. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 5

Dans un service médical des urgences, le nombre de malades nécessitant l'appel du médecin de garde chaque $6H$ est en moyenne de 4. On note par X la variable aléatoire qui compte le nombre d'appel du médecin de garde.

1. Déterminer la loi de X
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Quelle est la probabilité que le médecin de garde n'ait aucun appel entre $14h : 00$ et $20h : 00$
4. Quelle est la probabilité que le médecin de garde ait au moins deux appels entre $14h : 00$ et $17h : 00$

Exercice 6

Soit n un entier naturel et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(1/n)$.

1. Montrer que $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$. En déduire que $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 7

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que
$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
.
2. Application : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers á effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur á 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers différe de $1/6$ d'au plus $1/100$?

Exercice 8

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720

Exercice 9

La durée de vie X, en heures, d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle de paramétre $\lambda = 0,005$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X
2. Quelle est la probabilité que l'un des composant pris au hasard
   a. ait une durée de vie inférieure á 100h ?
   b. soit encore en état de marche au bout de 250h ?
3. Calculer la durée de vie en moyenne de l'un de ces composants.