Mr. ADOUI Salah / 2023
L2- GROUPES : 2 et 3

SERIE D'EXERCICES
TD : 1

Dépt Mathématiques.
Analyse numérique 2

Exercice 1

1. Donner la décomposition LU de la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

   ensuite résoudre le systéme Ax = b oú $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Méme question 1 avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit le systéme linéaire dont la matrice carrée d' ordre 4 associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalement dominante au sens strict ?
2. Calculer l'inverse de A.
3. Factoriser A en produit de deux matrices L et U.
4. En déduire le déterminant de A sachant que A=L*U.

Exercice 3

Étant donnée le systéme déquation linéaire AX=B tels que la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre approximativement le systéme par la méthode Jacobi pour un vecteur initiale $X^{(0)} = (1;0;0)$.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. calculer le rayon spectral de la matrice A.
4. En dduire $\| A \|_2$

Exercice 4

On considére le systéme linéaire (S) : AX = b :

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche résoudre (S) par les méthodes indirectes de type : $X_{k+1} = MX_k + D$:

1. A est-elle symétrique définie positive, justifier ?
2. A est-elle diagonalement dominante, justifier ?
3. Résoudre le systéme (S) avec la méthode ittérative de Jacobi en partant du vecteur de départ initiale $X^{(0)} = (0;0;0)$ et avec 2 ittérations.
4. Récoudre le systéme (S) avec la méthode ittérative de Gauss-Seidel. en partant du vecteur de départ initiale $X^{(0)} = (1;1;1)$ et avec 2 ittérations.
5. Quelle est celle qui converge plus rapidement , justifier ?

Exercice 5

Soit le systéme d'équations linéaires :

$$(S)............\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = \frac{11}{4} \\ \frac{-1}{2}x + y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + z = 4 \end{cases} .$$

1. Résoudre le systéme par la méthode itérative de Gauss seidel en partant du vecteur de départ initiale unité. Prendre la précision : $\varepsilon = 10^{-2}$.
2. Résoudre le méme systéme par Jacobi sachant que la solution exacte est $X^{(exacte)} = (1;2;3)$
3. Étudier le critére de convergence de la méthode de Gauss seidel.

Exercice 6

On considre la matrice A et le vecteur b dfenis par : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

1.
   a. Résoudre le systéme AX=b par la méthode de Gauss.
   b. Endéduire le déterminant de A.
   c. Peut-on utiliser les méthodes LU et Cholesky pour retrouver la solution du systéme AX=b ?
2.
   a. Ecrire le processus itératif de Jacobi correspondant au systéme AX=b.
   b. Soit $X^{(0)} = (\frac{1}{2};0;1)$, calculer $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$. Donner l'erreur absolue commise dans chacun des cas en norme $\| A \|_{\infty}$.
   c. Etudier la convergence de cette méthode.
3. Peut-on réécrire les systéme AX=b de maniére assurer la convergence de la méthode de Jacobi $\forall X^{(0)} \in R^3$?