

Exercice 1

Soit le système linéaire dont la matrice carrée d'ordre 4 associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1 La matrice A est-elle diagonalement dominante au sens strict?
- 2 Calculer l'inverse de A.
- 3 Factoriser A en produit de deux matrices L et U.
- 4 En déduire le déterminant de A sachant que $A=L*U$.

Exercice 2

Étant donnée le système d'équation linéaire $AX=B$ tels que la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- 1 Résoudre approximativement le système par la méthode Jacobi pour un vecteur initial $X^{(0)} = (1;0;0)$.
- 2 Déterminer les valeurs propres de A.
- 3 calculer le rayon spectral de la matrice A.
- 4 En déduire $\| A \|_2$

Exercice 3

On considère le système linéaire (S) : $AX = b$:

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche résoudre (S) par les méthodes indirectes de type : $X_{k+1} = MX_k + D$:

- 1 A est-elle symétrique définie positive, justifier?
- 2 A est-elle diagonalement dominante, justifier?
- 3 Résoudre le système (S) avec la méthode itérative de Jacobi en partant du vecteur de départ initial $X^{(0)} = (0;0;0)$ et avec 2 itérations.
- 4 Résoudre le système (S) avec la méthode itérative de Gauss-Seidel. en partant du vecteur de départ initial $X^{(0)} = (1;1;1)$ et avec 2 itérations.
- 5 Quelle est celle qui converge plus rapidement, justifier?

Exercice 4

Soit le système d'équations linéaires :

$$(S) \dots \dots \dots \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = \frac{11}{4} \\ \frac{-1}{2}x + y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + z = 4 \end{cases} .$$

- 1 Résoudre le système par la méthode itérative de Gauss seidel en partant du vecteur de départ initial unité. Prendre la précision : $\varepsilon = 10^{-2}$.
- 2 Résoudre le même système par Jacobi sachant que la solution exacte est $X^{(exacte)} = (1; 2; 3)$
- 3 Étudier le critère de convergence de la méthode de Gauss seidel.

Exercice 5

On considère la matrice A et le vecteur b définis par : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

- 1
 - a Résoudre le système $AX=b$ par la méthode de Gauss.
 - b Déterminer le déterminant de A.
 - c Peut-on utiliser les méthodes LU et Cholesky pour retrouver la solution du système $AX=b$?
- 2
 - a Écrire le processus itératif de Jacobi correspondant au système $AX=b$.
 - b Soit $X^{(0)} = (\frac{1}{2}; 0; 1)$, calculer $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$. Donner l'erreur absolue commise dans chacun des cas en norme $\|A\|_{\infty}$.
 - c Étudier la convergence de cette méthode.
- 3 Peut-on réécrire le système $AX=b$ de manière à assurer la convergence de la méthode de Jacobi $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$?

Exercice 6

- 1 Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système suivant :

$$(S) \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases} ; a \in \mathbb{R}^*$$

- 2 On pose $a = 2$. Choisir la méthode itérative qui vous paraît la plus rapide pour résoudre le système (S) en partant du vecteur de départ initial $(x^{(0)}; y^{(0)}) = (0; 0)$ et avec deux itérations.