Chapitre I : Semi groupes à un paramètre d'opérateurs linéaires

Soit X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ l'espace des applications linéaires continues de X sur lui même.

Définition 1 : Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ est appelé semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :

i) $T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X)

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$; $\forall\, t,s \geq 0$

Exemples :

1) Soit $k \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{C}$, on considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k\,x(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dont la solution est $x(t) = e^{kt} x_0$

on a : $X = \mathbb{C}$ et $T(t) : x_0 \longrightarrow (e^{kt}) x_0$

$T(t)$ est la multiplication par e^{kt}

* $T(t) = e^{kt}$ est un semi groupe.

2) Un système différentielle

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$, on considère

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t), & t > 0 \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases}$$

Posons $T(t) = e^{At} \left(= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right)$

Alors $X(t) = e^{At} X_0$, $X = \mathbb{C}^n$ et $T(t) = e^{At} \in \mathcal{L}(X)$

semi groupe

Définition 2 : Soit $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X un espace de Banach.

i) On dit que $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ est uniformément continu sur X si $\lim_{t\to 0}\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(X)}=0$

ii) on dit que $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ est fortement continu si

$$\forall x\in X\,;\ \lim_{t\to 0^+}\|T(t)x-x\|_X=0$$

Remarque 1 : un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ fortement continu sur X est appelé un C_0-semi-groupe sur X

Exemple 1 : Soit $A\in\mathcal{L}(X)$ et soit $T(t)=e^{At}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(tA)^n}{n!}$

Montrer que $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ est un C_0-semi-groupe

Démonstration : 1) On montre tout d'abord que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(At)^n}{n!}$ converge. Donc

Pour tout $M>N$ et $M,N\in\mathbb{N}$, on a.

$$\forall t\geq 0\ \left\|\sum_{k=0}^{M}\frac{(At)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{N}\frac{(At)^k}{k!}\right\|=\left\|\sum_{k=N+1}^{M}\frac{(At)^k}{k!}\right\|\leq\sum_{k=N+1}^{M}\frac{\|A\|^k t^k}{k!}$$

donc $\left\|\sum_{k=0}^{M}\frac{(At)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{N}\frac{(At)^k}{k!}\right\|\leq\sum_{k=N+1}^{M}\frac{(\|A\|t)^k}{k!}$

Comme cette serie est de Cauchy, on déduit que la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(At)^k}{k!}$ est convergente car $\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|\frac{(At)^k}{k!}\right\|\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\|A\|t)^k}{k!}=e^{\|A\|t}$.

2) $T(0) = Id$?

on a : $T(0) = e^{A0} = e^{0} = Id$ puisque :

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \Rightarrow e^{A0} = I$$

3) $T(t+s) = T(t).T(s)$; $\forall t, s \geq 0$.

on a : $$e^{A(t+s)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n (t+s)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_k^n t^k . s^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k t^k}{k!} . \frac{A^{n-k} s^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{A^{n-k} . s^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{At} . e^{As} .$$

4) $$\| T(t)x - x \|_{\alpha(x)} = \| e^{At} x - x \| = \| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} x - x \|$$

$$= \| x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} x - x \| = \| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} x \|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k . t^k}{k!} \|x\| = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k t^k}{k!} - 1 \right) \|x\|$$

$$= \left(e^{\|A\| t} - 1 \right) \|x\|$$

donc $\lim_{t \to 0^+} \| T(t)x - x \| \leq \lim_{t \to 0} \left(e^{\|A\| t} - 1 \right) \|x\| = 0.$

Ce qui signifie que $\{ T(t) = e^{At} \}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe ~~uni~~ uniformément continue.

Remarque 1) Pour montrer que $t \longrightarrow e^{At}$ est continue, on peut écrire : $e^{(t+h)A} - e^{tA} = e^{tA}(e^{hA} - I)$, $\forall t, h \in \mathbb{R}$.

et par conséquent, on montre que $\lim_{h \to 0} e^{hA} = I$. Ceci suit l'estimation : $\|e^{hA} - I\| = \|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|h|^k \cdot \|A\|^k}{k!}$

$$= e^{|h| \cdot \|A\|} - 1$$

2) l'application $t \longrightarrow T(t)$ est un homomorphisme du semi-groupe additive $(\mathbb{R}_+, +)$ sur le semi-groupe multiplicative $(M_n(\mathbb{C}), \cdot)$ de plus $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow e^{At} \in \mathcal{L}(X)$ $(\mathcal{L}(X) \simeq M_n(\mathbb{C}))$

Exemple 2. Soit $\{w_n ; n \geq 1\}$ une base orthonormé dans un espace de Hilbert separable.

Soit $\{\lambda_n ; n \geq 1\}$ une suite de nombres réelles telle que : $\sup_{n \geq 1} \lambda_n < +\infty$

et soit $T(t)x = \sum_{n=1} e^{\lambda_n t} \langle x, w_n \rangle w_n$.

Comme : $\sup_{n \geq 1} \lambda_n < +\infty$, alors $T(t)$ est un operateur borné

i.e, $\|T(t)x\| \leq M\|x\|$; $\forall x \in X$ l'espace de Hilbert.

1) $T(0)x = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n 0} \langle x, w_n \rangle w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, w_n \rangle w_n = x$

$\Rightarrow T(0)x = x$, $\forall x \in X = H$ espace de Hilbert

c) Soit $t, s \in \mathbb{R}_+$; $T(t+s) = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n(t+s)} \langle x, w_n \rangle w_n = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \cdot e^{\lambda_n s} \langle x, w_n \rangle w_n$

d'autre part, on a :

$$T(t)T(s)x = T(t)x' = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle x', w_n \rangle w_n = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle T(s)x, w_n \rangle w_n$$

$$= \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle \sum_{k\geq 1} e^{\lambda_k s} \langle x, w_k \rangle w_k, w_n \rangle w_n \quad , \langle w_n, w_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

$$= \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \cdot e^{\lambda_n s} \langle x, w_n \rangle w_n = T(t+s)x.$$

d) on a : $\|T(t)x - x\|^2 = \|\sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle x, w_n \rangle w_n - \sum_{n\geq 1} \langle x, w_n \rangle w_n\|^2$

$$= \|\sum_{n\geq 1} (e^{\lambda_n t} - 1) \langle x, w_n \rangle w_n \|^2$$

$$= \langle \sum_{n\geq 1} (e^{\lambda_n t} - 1) \langle x, w_n \rangle w_n , \sum_{k\geq 1} (e^{\lambda_k t} - 1) \langle x, w_k \rangle w_k \rangle$$

$$= \sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} (e^{\lambda_n t} - 1)(e^{\lambda_k t} - 1) \langle x, w_n \rangle \langle x, w_k \rangle \langle w_n, w_k \rangle$$

$$\Rightarrow \|T(t)x - x\|^2 = \sum_{n\geq 1} (e^{\lambda_n t} - 1)^2 |\langle x, w_n \rangle|^2 \leq \sup_{n\geq 1} (e^{\lambda_n t} - 1)^2 \sum_{n\geq 1} |\langle x, w_n \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \|T(t)x - x\|^2 \leq \left(e^{(\sup_{n\geq 1} \lambda_n) t} - 1\right)^2 \sum_{n\geq 1} |\langle x, w_n \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \|T(t)x - x\| \leq \left(e^{(\sup_{n\geq 1} \lambda_n) t} - 1\right)^2 \|x\|^2, \text{ or } \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{n\geq 1} |\langle x, w_n \rangle|^2$$

donc $\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$

Alors $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semigroupe uniformément continue.

Exercice

Générateur infinitésimal

Définition 1.31 : On appelle générateur infinitésimal d'un semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire (nonborné)

$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ définie par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x), \forall x \in D(A)$$

où $D(A) = \{x \in X ;\ \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\}$

Exemple 1.32 : Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. On considère le semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

définie par : $T(t) = e^{At}, t \geq 0$

On a : $\forall x \in X$; $\frac{1}{t}\|e^{At}x - x - Atx\| = \frac{1}{t}\|\sum_{n\geq 0}\frac{(At)^n}{n!}x - x - Atx\|$

$$= \frac{1}{t}\|x + Atx + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(At)^n}{n!}x - x - Atx\|$$

$$= \frac{1}{t}\|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(At)^n}{n!}x\| \leq \frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\|A\|^n t^n}{n!}\|x\|$$

$$= \frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\|A\|^n t^n}{n!} - \frac{\|A\|^0 t^0}{0!} - \frac{\|A\|t}{1!}\right)\|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}\|e^{At}x - x - Atx\| \leq \left[\frac{1}{t}(e^{\|A\|t} - 1) - \|A\|\right]\|x\|$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\|e^{At}x - x - Atx\| \leq \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}(e^{\|A\|t} - 1) - \|A\|\right)\|x\|$$

$$= (\|A\| - \|A\|)\|x\| = 0$$

i.e. $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \| e^{At}x - x - Atx \| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{At}x - x}{t} = Ax \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax.$$

Alors ~~...~~ A est le générateur infinitésimal du semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

__Exemple:__ Soient $p \in [1, +\infty[$, l'espace $L_p = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} ; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \}$

et muni de la norme: $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Considérons la suite de nombres réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et définissons une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur L_p par

$$T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (e^{-a_n t} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} ; t \geq 0$$

Montrer que $(T(t))$ est un C_0-semigroupe et donner le générateur infinitésimal de ce ~~...~~ semigroupe.

__Preuve:__ 1) On a: $T(0)(x_n) = (e^0 x_n) = (x_n)$. Alors $T(0) = I$

2) $\forall t, s \geq 0$, on a:
$$T(t+s)(x_n) = (e^{-a_n(t+s)} x_n) = (e^{-a_n t} \times e^{-a_n s})(x_n)$$

d'autre part,

$T(t)T(s) = T(t)(e^{-a_n s} x_n) = e^{-a_n t}(e^{-a_n s} x_n) = (e^{-a_n t} \cdot e^{-a_n s})(x_n)$

donc $T(t+s) = T(t)T(s)$

3) $\|T(t)(x_n) - x_n\| = \|(e^{-a_n t} x_n) - (x_n)\|^p$

$$= \|(e^{-a_n t} - 1)(x_n)\|^p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |(e^{-a_n t} - 1)(x_n)|\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |(e^{-a_n t} - 1)|^p \cdot \|(x_n)\|^p\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} (|e^{-a_n t} - 1|^p) \|(x_n)\|^p$$

donc: $\lim_{t \to 0} \|T(t)x_n - x_n\| \leq \lim_{t \to 0^+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (|e^{-a_n t} - 1|^p) \|(x_n)\|^p\right) \to 0$

$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \|T(t)x_n - x_n\| = 0$

4) $\frac{1}{t^p} \|(e^{-a_n t} - 1)(x_n) - (a_n t x_n)\|^p = \frac{1}{t^p} \sum_{n=1}^{+\infty} \|(e^{-a_n t} - 1) x_n - (a_n t x_n)\|^p$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^p} \|(e^{-a_n t} - 1) + a_n t) x_n\|^p$$

$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^p} \|(e^{-a_n t} - 1)(x_n) - (-a_n t x_n)\|^p \leq \lim_{t \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-a_n t} - 1 + a_n t}{t}\right)^p \|(x_n)\|^p$

$\Rightarrow \lim \frac{1}{t^p} \|(e^{-a_n t} - 1)(x_n) - (-a_n t x_n)\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \to 0} \left(\frac{|e^{-a_n t} - 1|}{t} + a_n\right)^p \|x_n\|^p$

donc $\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x_n - x_n}{t} = (-a_n x_n)$. Alors le générateur infinitésimal de $T(t)$ est l'opérateur défini par $A(x_n) = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Quelques propriétés élémentaires des semi-groupes sont données dans le théorème suivant

Théorème 1 : Soit $\{T(t); t \geq 0\}$ un C_0-semi-groupe dans un espace de Hilbert X. $\{T(t); t \geq 0\}$ admet les propriétés suivantes :

1) Il existe $\tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M; \forall t \in [0, \tau]$

2) Pour tout $x \in X$, on a : $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) x \, ds = x$

3) Si $\omega_0 = \inf\limits_{t > 0} \left(\frac{1}{t} \log \|T(t)\| \right)$, Alors $\omega_0 = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} (\log \|T(t)\|) < +\infty$

4) $\forall \omega > \omega_0$, $\exists M_\omega$ une constante telle que $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}; \forall t \geq 0$

ω_0 est dite la borne de croissance du semi-groupe

Démonstration : 1) Par contradiction, on suppose que pour tout $\tau > 0$ et tout $M \geq 1$, il existe $t \in [0, \tau]$ tel que $\|T(t)\| > M$. Pour $\tau = \frac{1}{n}$ et $M = n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tel que $\|T(t_n)\| > n$. Donc la suite $(\|T(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est non bornée. Si la suite $(\|T(t_n) x\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ était bornée pour tout $x \in X$, alors compte tenu du théorème de Banach-Steinhaus, il en résulterait que $(\|T(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ serait bornée. mais ceci contredit l'affirmation précédente. Donc il existe $x_0 \in X$ tel que $(\|T(t_n) x_0\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit non bornée ce qui contredit $\lim\limits_{n \to +\infty} \|T(t_n) x_0\| = x_0$ donc $\|T(t)\| \leq M$ pour $0 \leq t \leq \tau$

2) l'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation suivante

$$\left\| \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds - x \right\| = \left\| \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t T(0)x\,ds \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{t}\int_0^t (T(s)-I)x\,ds \right\| \leq \sup_{s\in[0,t]} \|T(s)x - x\|$$

et de la continuité de l'application $[0,+\infty[\ni t \longrightarrow T(t)x \in X$

3) Posons $\varphi(t) = \log\|T(t)\|$, $\varphi(t) < +\infty$ (mais peut être $-\infty$)

Puisque $\|T(t+s)\| = \|T(t)T(s)\| \leq \|T(t)\|\|T(s)\|$; $\forall t,s \geq 0$

et comme $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$. Soit $\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t}\varphi(t)$

qui est ou bien finie ou bien $-\infty$, on montre que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\varphi(t)$

existe est égale à ω_0.

Supposons premièrement que ω_0 est fini. Choisissons $\varepsilon > 0$

et un nombre $a > 0$ de telle sorte que $\varphi(a) \leq (\omega_0 + \varepsilon)a$.

Soit n un entier tel que : $na \leq t < (n+1)a$. Alors

$$\omega_0 \leq \frac{\varphi(t)}{t} \leq \frac{\varphi(na)}{t} + \frac{\varphi(t-na)}{t} \leq \frac{na}{t}\cdot\frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\varphi(t-na)}{t}$$

$$\leq \frac{na}{t}(\omega_0 + \varepsilon) + \frac{\varphi(t-na)}{t}$$

quant $t \longrightarrow +\infty$, $\frac{\varphi(t-na)}{t} \longrightarrow 0$ puisque $\varphi(t-na)$ est bornée

Comme nous avons montrer que $\|T(t)\|$ est bornée dans chaque intervalle fini, donc $\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)}{t} = \omega_0$

le cas $\omega_0 = -\infty$ peut être traiter de la même façons

4) Pour $h>0$ et $t>h$, nous noterons $m=[\frac{t}{h}]\in\mathbb{N}^*$.

Compte tenu du théorème de division avec reste, il existe $r\in[0,h]$ tel que : $t=mh+r$, avec $0\leq r<h$

Alors : $\|T(t)\|=\|T(mh+r)\|=\|T(r)T(mh)\|$

$$\leq\|T(r)\|\cdot\|T(mh)\|\leq M\cdot M^m=M\cdot e^{\frac{t}{h}\ln M}$$

donc l'inégalité de l'énoncé en résulte en prenant

$\omega=\frac{1}{h}\ln M$.

Exercice : Soit $\{\Phi_n, n\geq 1\}$ une base orthonormale dans un espace de Hilbert séparable.

Soit $\{\lambda_n ; n\geq 1\}$ une suite de nombre réels telle que : $\sup_{n\geq 1}\lambda_n<+\infty$

Soit $T(t)x=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{\lambda_n t}\langle x,\Phi_n\rangle\Phi_n$.

1) Montrer que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu et déterminer le générateur infinitésimal du semi groupe $T(t)$ | $T(t)x=\sum_{n\geq 1}e^{\lambda_n t}\langle x,\Phi_n\rangle\Phi_n$

Théorème 2 : Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigroupe de générateur infinitésimal A. Alors :

1) Pour tout $x\in X$, $\int_0^t T(s)x\,ds\in D(A)$ et $A\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right)=T(t)x-x$

2) Si $x\in D(A)$. Alors $T(t)x\in D(A)$ pour tout $t\geq 0$

3) Si $x \in D(A)$, Alors $\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax$, $\forall t \geq 0$

4) Si $x \in D(A^n)$. Alors $\frac{d^n}{dt^n}(T(t)x) = A^n T(t)x = T(t)A^n x$, $\forall t \geq 0, n \in \mathbb{N}$

<u>Preuve</u>, 1) Soit $x \in X$, $t > 0$, on montre que limit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[T(h)\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right) - \int_0^t T(s)x\,ds\right] \text{ existe.}$$

On a : $\frac{1}{h}\left[T(h)\int_0^t T(s)x\,ds - \int_0^t T(s)x\,ds\right] = \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(h+s)x\,ds - \int_0^t T(s)x\,ds\right]$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_h^{h+t} T(\tau)x\,d\tau - \int_0^t T(s)x\,ds\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_h^t T(\tau)x\,d\tau + \int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau - \int_0^h T(\tau)x\,d\tau - \int_h^t T(\tau)x\,d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau - \int_0^h T(\tau)x\,d\tau\right]; \quad \boxed{\tau = t+s \Rightarrow d\tau = ds}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_0^h T(t+s)x\,ds - \int_0^h T(s)x\,ds\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[T(t)\int_0^h T(s)x\,ds - \int_0^h T(s)x\,ds\right] = (T(t)-I)\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds$$

donc $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[T(h)\int_0^t T(s)x\,ds - \int_0^t T(s)x\,ds\right] = (T(t)-I)\lim_{h \to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds$

$$= (T(t)-I)x = T(t)x - x$$

$\Rightarrow \int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ et $A\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right) = (T(t)-I)x$.

2) Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$. On a :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[T(h)(T(t)x) - T(t)x\right] = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(T(t)\left[T(h)x - x\right]$$

$$= T(t) \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax$$

On déduit alors que $T(t)x \in D(A)$ et $AT(t)x = T(t)Ax$

3) Si $x \in D(A)$, on montre que $\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x$.

On a : $\frac{d}{dt}(T(t)x) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{T(t+h) - T(t)}{h}\right)x = \lim_{h \to 0} \frac{T(t)T(h) - T(t)}{h}x$

$$= \lim_{h \to 0^+} T(t) \frac{T(h) - I}{h} x = T(t) \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} x$$

$$= T(t)Ax$$

donc : $\frac{d}{dt}(T(t)x) = T(t)Ax$ ce qui veut dire que la dérivée à droite de $T(t)x$ existe et que : $\frac{d^+}{dt}(T(t)x) = T(t)Ax$.

d'autre part, on a : $\lim_{h \to 0^+} \frac{T(t) - T(t-h)}{h}x = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t-h)T(h) - T(t-h)}{h}x$

$$= \lim_{h \to 0^+} T(t-h) \frac{T(h) - I}{h} x = T(t)Ax.$$

donc la dérivée à gauche existe et $\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax$

4) On montre par récurrence que : $\frac{d^n}{dt^n}(T(t)x) = A^n T(t)x = T(t)A^n x$

pour $n = 1$, on a d'après (3) $\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax$

pour $n = 2$, on a : $\frac{d^2}{dt^2}(T(t)x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(T(t)x)\right) = \frac{d}{dt}(AT(t)x)$

$$= \frac{d}{dt}(T(t)Ax)$$

$\cdot\ AT(t)y = AT(t)Ax = AAT(t)x = A^2T(t)x$

donc : $\frac{d^2}{dt^2}(T(t)x) = A^2T(t)x$

et $A^2T(t)x = A(AT(t)x) = A(T(t)Ax) = T(t)AAx = T(t)A^2x$

On suppose que : $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(T(t)x) = A^{n-1}T(t)x = T(t)A^{n-1}x$ et montre que

$$\frac{d^n}{dt^n}(T(t)x) = A^nT(t)x = T(t)A^nx.$$

Pour $x\in D(A^n)$, on a : $\frac{d^n}{dt^n}(T(t)x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(T(t)x)\right) = \frac{d}{dt}(A^{n-1}T(t)x)$

$$= \frac{d}{dt}(T(t)A^{n-1}x)$$

$$= AT(t)y = AT(t)A^{n-1}x = AA^{n-1}T(t)x = A^nT(t)x.$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dt^n}(T(t)x) = A^nT(t)x = T(t)A^nx.$$

<u>Proposition 1</u> Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe alors son générateur infinitisimal A est fermé et $D(A)$ est dense dans X.

<u>Preuve</u>. 1) on montre tout d'abord que $D(A)$ est dense dans X (i.e $X = \overline{D(A)}$). Soit $x\in X$, on montre qu'il existe une suite $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$; $x_\varepsilon\in D(A)$, $\forall\varepsilon>0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon = x$.

d'après le theorème précédent : $\int_0^h T(t)x\,dt\in D(A)$, $h>0$

soit alors : $x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(t)x\,ds$, alors $x_\varepsilon\in D(A)$.

d'autre part

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(s)x\,ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(s)x\,ds = T(0)x = x$$

Alors $\lim_{\varepsilon\to 0^+} x_\varepsilon = x \in X$. Donc, il existe $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset D(A)$ telle que

$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon = x \in X$. Alors $\overline{D(A)} = X$.

2) On montre que A est fermé.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $D(A)$ qui converge vers $x \in X$ telle que

$\lim_{n\to+\infty} Ax_n = y$, on montre que $x \in D(A)$ et que $Ax = y$

On a : $\forall t \geq 0$, $\|T(t)Ax_n - T(t)y\| = \|T(t)(Ax_n - y)\| \leq Me^{\omega t}\|Ax_n - y\|$

$$\lim_{n\to+\infty} Ax_n = y \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} T(t)Ax_n = T(t)y$$

Comme $x_n \in D(A)$, on a alors : $x_n = \frac{1}{n}\int_0^t T(s)x_n\,ds$

donc : $T(t)x_n - x_n = A\int_0^t T(s)x_n\,ds = \int_0^t AT(s)x_n\,ds = \int_0^t T(s)Ax_n\,ds$, $x_n \in D(A)$

$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty}(T(t)x_n - x_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,ds$$

$$\Rightarrow T(t)x - x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,ds = \int_0^t \lim_{n\to+\infty} T(s)Ax_n\,ds = \int_0^t T(s)y\,ds$$

$$\Rightarrow T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[\int_0^t T(s)y\,ds - \int_0^0 T(s)y\,ds\right]$$

$$= T(s)y\Big|_{s=0} = T(0)y = y.$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\underbrace{\frac{T(t)x - x}{t}}_{Ax} = y \Rightarrow x \in D(A) \text{ et } Ax = y \Rightarrow A \text{ est fermé}$$

Théorème de Hille-Yosida : un opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T(t)$ sur X vérifiant $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ ssi :

1) A est fermé et de domaine dense.

2) L'ensemble résolvant de A contient la demi droite $]\omega, +\infty[$ et $\forall \lambda \in]\omega, +\infty[$, on a : $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda - \omega}$

le lemme suivant donne les propriétés de la résolvante $R(\lambda, A)$.

on a :

<u>Lemme</u>, Soit $T(t)$ un C_0-semigroupe avec générateur infinitésimal A, soit ω_0 sa borne de croissance, soit $\lambda \in \rho(A)$.

Si $Re(\lambda) > \omega > \omega_0$, alors pour tout $x \in X$, on a :

1) $R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$ et $R(\lambda, A) \leq \frac{M}{\delta - \omega}$, $\delta = Re(\lambda)$

2) $\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha(\alpha I_n - A)^{-1}x = x$ pour tout $x \in X$

<u>Preuve</u> : 1) Pour $x \in X$, on définit : $R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$

on montre que : $(\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda x$, $Re(\lambda) > \omega$.

on a : $\|R_\lambda x\| = \|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-\lambda t}| \|T(t)x\|\,dt$

$= \int_0^{+\infty} e^{-Re(\lambda)t} \|T(t)x\|\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-Re(\lambda)t} M e^{\omega t} x\,dt$

$\Rightarrow \|R_\lambda x\| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(Re\lambda - \omega)t} \|x\|\,dt$.

$Re\lambda > w \Rightarrow Re\lambda - w > 0$, alors :

$$\|R_\lambda x\| \leq M\left(\int_0^{+\infty} e^{-(Re\lambda - w)t}\,dt\right)\|x\| \Rightarrow \|R_\lambda x\| \leq M\left(\frac{1}{-(Re\lambda - w)} e^{-(Re\lambda-w)t}\Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$\Rightarrow \|R_\lambda x\| \leq M\left(\frac{1}{-(Re\lambda - w)}(0-1)\right)\|x\| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}\|x\|$$

$$\Rightarrow \|R_\lambda x\| \leq \frac{M}{\delta - w}\|x\|.$$

Montrons que $R_\lambda x \in D(A)$ pour $x \in X$. On a $R_\lambda x \in D(A)$

$$\frac{T(h)-I}{h} R_\lambda x = \frac{T(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty} T(h) e^{-\lambda t} T(t)x\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{+\infty} e^{-\lambda(r-h)} T(r)x\,dr - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(e^{\lambda h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda r} T(r)x\,dr - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda r} T(r)x\,dr - \int_0^{h} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt - \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[(e^{\lambda h} - 1)\int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt - \int_0^{h} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right]$$

$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-ht} T(t)x\,dt$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h} R_\lambda x = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\lambda h}-1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt - \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$$

on a : $\displaystyle \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h}-1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda r} T(r)x\,dr = \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right) \int_h^{+\infty} e^{-\lambda r} T(r)x\,dr$

$$= \left(e^{\lambda h}\right)'_{h=0} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} T(r)x\,dr = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} T(r)x\,dr$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x\,dt = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x\,dt - \int_0^0 e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right]$$

$$= \left(\int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right)'_{h=0} = e^{-\lambda h} T(h)x\Big|_{h=0} = T(0)x = x$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h} R_\lambda x = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} T(r)x\,dr - x = \lambda R_\lambda x - x$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h} R_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x \Rightarrow R_\lambda x \in D(A) \text{ et } \boxed{A R_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x}$$

d'autre part, on a pour tout $x \in D(A)$

$$R_\lambda A x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)Ax\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} A T(t)x\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt}(T(t)x)\,dt$$

intégrant par partie

$$= e^{-\lambda t} T(t)x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-\lambda) e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$$

$$\Rightarrow R_\lambda A x = -x + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\,dt = -x + \lambda R_\lambda x$$

$$\Rightarrow \boxed{R_\lambda A x = \lambda R_\lambda x - x}$$

Alors, on a :

$$\begin{cases} AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x ; \; x \in X \\ R_\lambda A x = \lambda R_\lambda x - x, \; x \in D(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda R_\lambda x - AR_\lambda x = x, \; x \in X \\ \lambda R_\lambda x - R_\lambda A x = x, \; x \in D(A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda I - A) R_\lambda x = x ; \; x \in X \\ R_\lambda (\lambda I - A) x = x ; \; x \in D(A) \end{cases} \Rightarrow R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$$

Alors $(\lambda I - A)^{-1} x = R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x \, dt$ et $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\delta - w}$

2) Montrons que $\lim\limits_{\substack{\alpha \to +\infty \\ \alpha \in \mathbb{R}}} \alpha (\alpha I - A)^{-1} x = x ; \; \forall x \in X$

Soit $x \in X$, on a : $(\alpha I - A)^{-1} x = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} T(t) x \, dt$

$$\Rightarrow \alpha (\alpha I - A)^{-1} x - x = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} T(t) x \, dt - x = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} T(t) x \, dt - x$$

$$\Rightarrow \alpha (\alpha I - A)^{-1} x - x = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(-e^{-\alpha t}\right) T(t) x \, dt - x$$

$$= -e^{-\alpha t} T(t) x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha t} \frac{d}{dt}(T(t) x) \, dt - x$$

$$= T(0) x + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} A T(t) x \, dt - x = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} A T(t) x \, dt$$

Pour $x \in D(A)$, on obtient,

$$\alpha (\alpha I - A)^{-1} x - x = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} T(t) A x \, dt = R_\alpha A x = (\alpha I - A)^{-1} A x$$

$$\Rightarrow \|\alpha (\alpha I - A)^{-1} x - x\| = \|(\alpha I - A)^{-1} A x\| \leq \|(\alpha I - A)^{-1}\| \, \|A x\|$$

$$\Rightarrow \|\alpha (\alpha I - A)^{-1} x - x\| \leq \frac{M}{\alpha - w} \|A x\| ; \; \alpha > w.$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to +\infty} \|\alpha(\alpha I - A)^{-1}x - x\| \leq \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{M}{\alpha - w}\|Ax\| = 0$$

Alors $\lim \alpha(\alpha I - A)^{-1}x = x$.

on a le théorème suivant

<u>théorème 3</u>: Soit A un opérateur fermé de domaine dense dans X. Alors, A engendre un semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ dans X tel que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, $\forall t \geq 0$ <u>ssi</u>:

1) $\forall \lambda > w$; $\|(\lambda I - A)x\|_X \geq (\lambda - w)\|x\|_X$; $\forall x \in D(A)$

$$\|(\lambda I - A^*)x^*\|_{X^*} \geq (\lambda - w)\|x^*\|_{X^*}, \forall x^* \in D(A^*)$$

<u>Exemple</u>: Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et soit (ϕ_n) une base orthonormé d'un espace de Hilbert X. On définit sur X l'opérateur suivant: $Ax = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$

avec $D(A) = \{x \in X ; \sum_{n\geq 1} |\lambda_n|^2 |\langle x, \phi_n\rangle|^2 < +\infty\}$

On montre que si $\sup_{n\geq 1} \lambda_n < +\infty$. Alors A engendre un C_0-semigroupe sur X.

<u>Preuve</u>

1) On montre que A est linéaire

$\forall x_1, x_2 \in X$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle (\alpha x_1 + \beta x_2), \varphi_n \rangle \varphi_n$$

$$= \sum_{n\geq 1} \lambda_n \alpha \langle x_1, \varphi_n \rangle \varphi_n + \sum_{n\geq 1} \lambda_n \beta \langle x_2, \varphi_n \rangle \varphi_n =$$

$$= \alpha \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x_1, \varphi_n \rangle \varphi_n + \beta \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x_2, \varphi_n \rangle \varphi_n = \alpha A x_1 + \beta A x_2$$

2) On montre que $D(A)$ est dense dans X.

On définit l'espace suivant. Soit $N \in \mathbb{N}$ assez grand,

soit $\varphi = \{ x \in X ; \langle x, \varphi_n \rangle = 0, \text{ pour } n \geq N \}$

Soit $x \in \varphi$, alors : $Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Comme Ax est bien défini, alors $x \in D(A)$. Alors $\varphi \subset D(A)$

Soit $x \in X$; alors $x = \sum_{n\geq 1} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Soit $x_N = \sum_{n=1}^{N-1} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Remarquons que : $x - x_N = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n - \sum_{n=1}^{N-1} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n=N}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Alors $\lim_{N \to +\infty} (x - x_N) = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=N}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n \right) = 0 \Rightarrow \lim_{N \to +\infty} x_N = x$

Alors (x_N) est une suite dans φ, $\langle x_N, \varphi_n \rangle = 0$, $\forall n \geq N$

$$\langle x_N, \varphi_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N-1} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k , \varphi_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{N-1} \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi_n \rangle = 0$$

On a : $n \geq N$ et $1 < k < N-1 \Rightarrow n \neq k$, Alors

$\forall x \in X ; \exists (x_N)_{N\geq 0} \subset \varphi$, $\lim_{N \to +\infty} x_N = x$ donc $\overline{\varphi} = X$

Mais $\varphi \subset D(A) \Rightarrow \overline{\varphi} \subset \overline{D(A)} \Rightarrow X \subset \overline{D(A)} \subset X \Rightarrow \overline{D(A)} = X$

Alors A est de domaine dense dans X

3) Montrons que A est fermé.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $D(A)$ qui converge vers $x \in X$ telque

$\lim_{n \to +\infty} A x_n = x_0$.

Montrons que $x \in D(A)$ et que $Ax = x_0$.

Comme $x_n \in D(A)$, $n \geq 1$ et Ax_n converge, alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x_n, \varphi_k \rangle|^2 \leq M, \forall n \geq 1.$$

par passage à la limite, on trouve $\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq M$

d'où on déduit que $x \in D(A)$

Comme $Ax_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \langle x_n, \varphi_k \rangle \varphi_k$, alors

$$x_0 = \lim_{n \to +\infty} Ax_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \langle x_n, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \lim \langle x_n, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k = Ax, \text{ alors } x_0 = Ax$$

d'où on déduit que A est fermé.

4) Montrons qu'il existe deux constantes M et ω telles que :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)}, \lambda > \omega$$

Soit $z = (\lambda I - A)x$ où $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$

on a : $z = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle z, \varphi_n \rangle \varphi_n$. Alors,

$$(\lambda I - A)x = \lambda x - Ax = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda - \lambda_n) \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

donc : $(\lambda I - A)x = z \iff \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda - \lambda_n) \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle z, \varphi_n \rangle \varphi_n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left((\lambda - \lambda_n) \langle x, \varphi_n \rangle - \langle z, \varphi_n \rangle \right) \varphi_n = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda_n) \langle x, \varphi_n \rangle - \langle z, \varphi_n \rangle = 0, \forall n \geq 1$$

Alors $\langle x, \varphi_n \rangle = \dfrac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \varphi_n \rangle$, $n \geq 1$, $\lambda \neq \lambda_n$.

On a : $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle \sum_{n\geq 1} \langle x,\varphi_n\rangle \varphi_n , \sum_{k\geq 1} \langle x,\varphi_k\rangle \varphi_k \rangle$

$$= \sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} \langle x,\varphi_n\rangle \langle x,\varphi_k\rangle \langle \varphi_n,\varphi_k\rangle$$

$$= \sum_{n\geq 1} |\langle x,\varphi_n\rangle|^2$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{|\lambda-\lambda_n|^2} |\langle z,\varphi_n\rangle|^2 \leq \sup_{n\geq 1} \frac{1}{|\lambda-\lambda_n|^2} \sum_{n\geq 1} |\langle z,\varphi_n\rangle|^2$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 \leq \sup_{n\geq 1} \frac{1}{|\lambda-\lambda_n|^2} \|z\|^2$$

donc : $(\lambda I - A)x = z \Rightarrow x = (\lambda I - A)^{-1} z$ donc

$$\|x\|^2 = \|(\lambda I - A)^{-1} z\|^2 \leq \sup_{n\geq 1} \frac{1}{|\lambda-\lambda_n|^2} \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\|^2 \leq \sup_{n\geq 1} \frac{1}{|\lambda-\lambda_n|^2}$$

Soit w tq $w \geq \sup_{n\geq 1} \lambda_n$, on a pour tout $\lambda \geq w$

$w \geq \sup_{n\geq 1} \lambda_n \Rightarrow w \geq \lambda_n, \forall n\geq 1 \Rightarrow -\lambda_n \geq -w \Rightarrow \lambda - \lambda_n \geq \lambda - w$

$$\Rightarrow (\lambda-\lambda_n)^2 \geq (\lambda-w)^2 \Rightarrow \frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2} \leq \frac{1}{(\lambda-w)^2}, \forall n\geq 1$$

$\Rightarrow \sup_{n\geq 1} \frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2} \leq \frac{1}{(\lambda-w)^2}$, d'où on déduit que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|^2 \leq \frac{1}{(\lambda-w)^2} \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - w}, \forall \lambda > w$$

donc, il existe $M > 0$ et $w > 0$ tq :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)} \quad (M = 1)$$

D'après le théorème de Hille-Yosida, on déduit que A engendre un C_0-semi groupe $T(t)$ sur X.

5) Déterminons $T(t)$.

On a : $A\varphi_n = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle \varphi_k$, $\forall k \geq 1$

$$= \lambda_n \varphi_n \quad (\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = 0, \forall n \neq k \text{ et } = 1 \text{ si } n = k)$$

donc : $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \Rightarrow \varphi_n \in D(A)$

On a : $\frac{d}{dt}(T(t)\varphi_n) = AT(t)\varphi_n = T(t)A\varphi_n = T(t)\lambda_n \varphi_n = \lambda_n T(t)\varphi_n$

donc $\frac{d}{dt}(T(t)\varphi_n) = \lambda_n T(t)\varphi_n \Rightarrow T(t)\varphi_n = e^{\lambda_n t} T(0)\varphi_n = e^{\lambda_n t}\varphi_n$

$\forall x \in X$; $T(t)x = T(t)\left(\sum_{n\geq 1} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n\right) = \sum_{n\geq 1} T(t) \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$

$$= \sum_{n\geq 1} \langle x, \varphi_n \rangle T(t)\varphi_n$$

$$= \sum_{n\geq 1} \langle x, \varphi_n \rangle e^{\lambda_n t} \varphi_n = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

donc $T(t)x = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$.

<u>Semi groupe de contraction</u> :

<u>Déf 1</u> $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi groupe de contraction sur un espace de Hilbert s'il est un C_0-semi groupe vérifiant l'estimation suivante
$$\|T(t)\| \leq 1, \ \forall t \geq 0$$

On a le résultat suivant

<u>Lemme 1</u> $(A - \omega I)$ engendre un semi-groupe de contraction ssi A engendre un C_0-semi groupe $T(t)$ satisfaisant $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, t \geq 0$

On a le théorème suivant.

Théorème 1 Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans H un espace de Hilbert.

$(A-\omega I)$ engendre un semi-groupe de contraction $S(t)$ sur H ssi les conditions suivantes sont vérifiées pour $\lambda > \omega$.

1) $\|(\lambda I - A)x\| \geq (\lambda - \omega)\|x\|$; $x \in D(A)$

2) $\|(\lambda I - A^*)x\| \geq (\lambda - \omega)\|x\|$; $x \in D(A^*)$

de ce théorème, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1: Soit A un opérateur fermé de domaine dense dans un espace de Hilbert H.

A engendre un C_0-semi-groupe $S(t)$ sur H satisfaisant l'estimation $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$ si :

1) $Re\langle Ax, x\rangle \leq \omega\|x\|^2$, $x \in D(A)$

2) $Re\langle A^*x, x\rangle \leq \omega\|x\|^2$; $x \in D(A^*)$

Preuve. On suppose que :

$Re\langle Ax, x\rangle \leq \omega\|x\|^2$, $x \in D(A)$ et $Re\langle A^*x, x\rangle \leq \omega\|x\|^2$; $x \in D(A^*)$

Montrons que A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ tel que

$\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$; $t \geq 0$

on a : $\|(\lambda I - A)x\|^2 = \langle(\lambda I - A)x, (\lambda I - A)x\rangle$

$= \lambda^2\|x\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\lambda Re\langle Ax, x\rangle$

1) pour $\omega = 0$, on a pour tout $\lambda > 0$

Soit $x \in D(A)$; $Re\langle Ax,x\rangle \leq 0\|x\|^2 \Rightarrow -2\lambda Re\langle Ax,x\rangle \geq 0$

$\Rightarrow \lambda^2\|x\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\lambda Re\langle Ax,x\rangle \geq \lambda^2\|x\|^2$

$\Rightarrow \|(\lambda I - A)x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2 \Rightarrow \|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|, x\in D(A)$

En procédant de la même façon, on trouve que :

$Re\langle A^* x, x\rangle \leq 0 \Rightarrow \|(\lambda I - A^*)x\| \geq \lambda\|x\|$; $x \in D(A^*)$

Alors, on a :

$$\begin{cases} \|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|, & x\in D(A) \\ \|(\lambda I - A^*)x\| \geq \lambda\|x\|; & x\in D(A^*) \end{cases}$$

D'après le théorème précédent. $(A - wI)$ engendre un C_0-semi-groupe de contraction

Comme $w=0$, Alors A engendre un C_0-semi-groupe de contraction

Alors $\|S(t)\| \leq 1$; $\forall t\geq 0$

Comme $e^{wt} = 1$; $w=0$, Alors $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, $\forall t \geq 0$

- On suppose maintenant que $w \neq 0$, Alors on a :

$$\begin{cases} Re\langle Ax,x\rangle \leq w\|x\|^2; & x\in D(A) \\ Re\langle A^*x,x\rangle \leq w\|x\|^2; & x\in D(A^*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Re\langle Ax,x\rangle - w\|x\|^2 \leq 0, & x\in D(A) \\ Re\langle A^*x,x\rangle - w\|x\|^2 \leq 0, & x\in D(A^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Re\langle Ax,x\rangle - w\langle x,x\rangle \leq 0, & x\in D(A) \\ Re\langle A^*x,x\rangle - w\langle x,x\rangle \leq 0, & x\in D(A^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Re\langle (A-wI)x,x\rangle \leq 0, & x\in D(A) \\ Re\langle (A^*-wI)x,x\rangle \leq 0, & x\in D(A^*) \end{cases}$$

D'après la première partie de la démonstration, on trouve que $(A-\omega I)$ engendre un semi groupe de contraction et alors d'après le lemme précédent, on déduit que A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ tel que $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$; $t \geq 0$

Ce ~~Corollaire~~, nous permet d'obtenir le résultat suivant.

Lemme 2. Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans un espace de Hilbert H si :

$$\begin{cases} Re\langle Ax, x\rangle \leq 0, & x \in D(A) \\ Re\langle A^* x, x\rangle \leq 0; & x \in D(A^*) \end{cases}$$

Alors A engendre un semigroupe de contraction.

Exemples : Considérons l'opérateur A définie par : $Af = \dfrac{d^2f}{dx^2}$ dans l'espace $H = L^2(0,1)$ avec

$$D(A) = \{f \in H;\ f(0) = f(1) = 0\}$$

1). Montrons que A est linéaire.

$\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R};\ f, g \in D(A)$:

$$A(\lambda f + \beta g) = \frac{d^2}{dx^2}(\lambda f + \beta g) = \lambda \frac{d^2 f}{dx^2} + \beta \frac{d^2 g}{dx^2} = \lambda Af + \beta Ag$$

Alors A linéaire.

On a $\overline{D(A)} = H$, alors $D(A)$ est dense dans H

2) Montrons que A est fermé.

Soit $f \in D(A)$ et soit $g \in D(A^*)$. Alors :

$\langle Af, g\rangle = \langle f, A^* g\rangle$.

$$\langle Af, g\rangle_{H=L^2(0,1)} = \int_0^1 \frac{d^2f}{dx^2} g(x)\,dx = \frac{df}{dx} g(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}\,dx$$

$$= \frac{df}{dx}(1)g(1) - \frac{df}{dx}(0)g(0) + \int_0^1 f\frac{d^2g}{dx^2}\,dx - f\frac{dg}{dx}\Big|_0^1$$

$$= \frac{df}{dx}(1)g(1) - \frac{df}{dx}(0)g(0) - f(1)\frac{dg}{dx}(1) + f(0)\frac{dg}{dx}(0) + \int_0^1 f\frac{d^2g}{dx^2}\,dx$$

$f \in D(A)$

$$\Rightarrow \langle Af, g\rangle = \frac{df}{dx}(1)g(1) - \frac{df}{dx}(0)g(0) + \int_0^1 f(x)\frac{d^2g}{dx^2}\,dx$$

Si $g \in D(A)$, Alors on a :

$$\langle Af, g\rangle_H = \int_0^1 f(x)\frac{d^2g}{dx^2}\,dx = \int_0^1 f(x)\,Ag(x)\,dx = \langle f, Ag\rangle_{H}$$

$= \langle f, A^* g\rangle, \; g \in D(A)$

Alors : $\langle f, Ag\rangle$

Donc $A^* = A$ et $D(A) = D(A^*)$.

Donc A^* est fermé.

Comme A^* est fermé alors A est fermé.

Soit $f \in D(A)$; $\langle Af, f\rangle = \int_0^1 \frac{d^2f}{dx^2} f(x)\,dx = \frac{df}{dx}(1)f(1) - \frac{df}{dx}(0)f(0) - \int_0^1 \frac{df}{dx}\frac{df}{dx}\,dx$

$$\Rightarrow \langle Af, f\rangle = -\int_0^1 \left(\frac{df}{dx}\right)^2 dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle Af, f\rangle \leq 0, \; \forall f \in D(A) \\ \langle A^* f, f\rangle \leq 0, \; \forall f \in D(A^*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\langle Af, f\rangle \leq 0, \; f \in D(A) \\ \mathrm{Re}\langle A^* f, f\rangle \leq 0, \; f \in D(A^*) \end{cases}$$

Alors A engendre un semigroupe de contraction.