Chapitre II, Opérateur de Riesz.

Base de Riesz : une suite d'éléments $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ dans un espace de Hilbert H est une suite de Riesz dans H si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1) $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est dense ~~dans~~ H

2) Il existe deux constantes positives m et M telles que, pour $N\in\mathbb{N}$ et pour tous scalaires α_n, $n=1,2,\dots,N$, on a :

$$m\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2 \leq \left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n\right\|^2 \leq M\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2$$

Exemple 1. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert H, alors (φ_n) est une base de Riesz.

Par définition d'une base orthonormée, la première condition est satisfaite (toute base orthonormée est dense dans H).

Concernant la deuxième condition, on a :

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n\right\|^2 = \left\langle\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\varphi_n, \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varphi_k\right\rangle = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha_n\bar{\alpha}_k\langle\varphi_n,\varphi_k\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\bar{\alpha}_n = \sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2.$$ Alors (2) est vérifiée pour $m = M = 1$.

Définition 1 : Deux suites $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H sont dites biorthogonales si :

$$\langle\varphi_n,\psi_m\rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n\neq m \end{cases}$$

Définition 2. Soit λ une valeur propre d'un opérateur linéaire fermé A. λ est dite simple si l'espace des fonctions ~~propres~~ propres associé à λ est de dimension 1.

Lemme 1. Soit A un opérateur linéaire fermé sur un espace de Hilbert H tels que ses valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ sont simples et les fonctions propres correspondantes forment une base de Riesz sur H.

1) Si $(\psi_n)_{n\geq 1}$ sont des fonctions propres de l'opérateur adjoint A^* associées aux valeurs propres $(\bar{\lambda}_n)_{n\geq 1}$. Alors les fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ peuvent être choisi pour que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ soient biorthogonales.

2) Chaque $x\in H$ peut être présenté d'une façon unique par :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, \psi_n \rangle \varphi_n$$

et il existe $m, M > 0$ telles que : $m \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, \psi_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, \psi_n \rangle|^2$

Définition 3. Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine dense $D(A)$ dans un espace de Hilbert H.
Supposons que les valeurs propres de A $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ sont simples et que les fonctions propres correspondantes $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ forment une base de Riesz sur H, si la fermiture de $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ est totalement déconnectée, alors on appelle A un opérateur de Riesz

Remarque 1 : L'ensemble $\{\lambda_n; n\geq 1\}$ est totalement déconnecté veut dire que pour tout $\lambda, \mu \in \{\lambda_n; n\geq 1\}$, on ne peut pas trouvé une droite lient λ et μ est totalement contenue dans $\{\lambda_n; n\geq 1\}$.

On a le resultat suivant.

Théorème 1 : Soit A un opérateur spéctral de Riesz, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ses valeurs propres et $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ les fonctions propres correspondantes. Soient $(\psi_n)_{n\geq 1}$ les fonctions propres de A^* telles que $\langle \varphi_n, \psi_m\rangle = \delta_{nm}$

Alors A vérifie :

1) $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \inf_{n\geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\}$

2) $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n; n\geq 1\}}$

Pour tout $\lambda \in \rho(A)$, on a : 1) $(\lambda I - A)^{-1} x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle x, \psi_n\rangle \varphi_n$

2) A admet la représentation suivante :

$$A x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \psi_n\rangle \varphi_n ; \quad x \in D(A)$$

$$D(A) = \left\{ x \in H ; \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \psi_n\rangle|^2 < +\infty \right\}$$

3) A engendre un C_0-semigroupe ssi : $\sup_{n\geq 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty$ et on a : $T(t) x = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle x, \psi_n\rangle \varphi_n$

4) La borne de croissance de semigroupe $T(t)$ est donné par

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| = \sup_{n\geq 1} \operatorname{Re} \lambda_n$$

Exemple 1 Soit $H = L^2(0,1)$ et soit $Af = \frac{d^2f}{dx^2}$.

avec $D(A) = \{ f \in H \mid \frac{d^2f}{dx^2} \in H \text{ et } f(0) = f(1) = 0 \}$

1) A est linéaire de domaine dense et autoadjoint, donc A est fermé ($\underbrace{A = A^*}_{\text{autoadj}}$)

2) soit λ une valeur propre de A et φ la fonction propre correspondante

on a : $A\varphi = \lambda\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \lambda\varphi \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} \varphi(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x} \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta.$

$\varphi(1) = 0 \Rightarrow \alpha e^{\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \Rightarrow \alpha(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0, \ \alpha \neq 0$

$\Rightarrow e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$

Comme on a :

$2i \sin(-i\sqrt{\lambda}) = (e^{i(-i\sqrt{\lambda})} - e^{-i(-i\sqrt{\lambda})})$

Alors, $e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 2i \sin(-i\sqrt{\lambda})$

$e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \Rightarrow \sin(-i\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow -i\sqrt{\lambda} = n\pi, n \geq$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = in\pi, n \geq 1 \Rightarrow \lambda_n = -n^2\pi^2; n \geq 1$

$\varphi_n(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda_n}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda_n}x} = \alpha(e^{\sqrt{\lambda_n}x} - e^{-\sqrt{\lambda_n}x})$

$= \alpha(e^{in\pi x} - e^{-in\pi x}) = 2i\alpha \sin n\pi x, n \geq 1$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

donc, $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin\theta$

Soit $\theta = -i\sqrt{\lambda}$ donc

$\sin(-i\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2i}(e^{i(-i\sqrt{\lambda})} - e^{-i(-i\sqrt{\lambda})})$

$= \frac{1}{2i}(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}})$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

$\cos(a+b) = \cos^2 a + \sin^2 b$

On considère les fonctions propres : $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$, $n \geq 1$.

On prend la base $\varphi_n^*(x) = \dfrac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|}$.

On a pour tout $n \geq 1$: $\|\varphi_n\|_H^2 = \int_0^1 \varphi_n^2(x)dx = \int_0^1 \sin^2 n\pi x\, dx = \int_0^1 \frac{1-\cos 2n\pi x}{2} dx$

$$= \frac{1}{2} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n\pi} \sin 2n\pi + \frac{1}{4n\pi} \sin 0$$

donc $\|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{2}$. Donc $\varphi_n^*(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$, $n \geq 1$.

$(\varphi_n^*(x))_{n\geq 1}$ est une base orthonormée donc c'est une base de Riesz.

Si $n \neq m$, on a : $\lambda_n \neq \lambda_m$ et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -n^2\pi^2 = -\infty$

Alors : $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est totalement déconnectée. Alors A est un opérateur spectral de Riesz.

$\sup\limits_{n\geq 1} \operatorname{Re} \lambda_n = \sup\limits_{n\geq 1} (-n^2\pi^2) = -\pi^2 < +\infty$.

Alors A engendre le C_0-semigroupe $T(t)$ donné par :

$$T(t)x = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle x, \varphi_n(x)\rangle \varphi_n(x); \ x \in H$$

et la borne de croissance de T est : $\omega_0 = \sup\limits_{n\geq 1} \operatorname{Re} \lambda_n = -\pi^2$.

Exemple 2 : Considérons le système :
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \alpha \dfrac{dx}{dt} + A_0 x = 0 \\ x(0) = x_0, \ \dfrac{dx}{dt}(0) = x_1 \end{cases} \quad (*)$$

où A_0 est un opérateur autoadjoint positif dans un espace de Hilbert H, avec $D(A_0)$ et on suppose que A_0 est coercive. Alors $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, comme A_0 est positive, alors $A_0^{\frac{1}{2}}$ existe.

Soit $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{dx}{dt}(t) \end{pmatrix}$, on peut alors réécrire le système (*) sous la forme $\frac{dZ}{dt}(t) = \mathcal{A} Z(t)$ où $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -\alpha I \end{pmatrix}$

soit $\mathcal{Z} = D(A_0^{\frac{1}{2}}) \times H$, on introduit le produit scalaire :

$$\langle w, z \rangle_{\mathcal{Z}} = \langle A_0^{\frac{1}{2}} w_1, A_0^{\frac{1}{2}} z_1 \rangle_H + \langle w_2, z_2 \rangle_H \quad \text{où } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{ et } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

on peut montrer que $\langle w, z \rangle$ est un produit scalaire.

Montrons que $\mathcal{Z}$ muni de la norme : $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ est complet

Soit $z^{(n)} = \begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \end{pmatrix}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{Z}$, on a :

$$\|z^{(n)} - z^{(m)}\|_{\mathcal{Z}}^2 = \langle z^{(n)} - z^{(m)}, z^{(n)} - z^{(m)} \rangle_{\mathcal{Z}} = \langle A_0^{\frac{1}{2}}(z_1^{(n)} - z_1^{(m)}), A_0^{\frac{1}{2}}(z_1^{(n)} - z_1^{(m)}) \rangle + \langle z_2^{(n)} - z_2^{(m)}, z_2^{(n)} - z_2^{(m)} \rangle$$

$$= \|A_0^{\frac{1}{2}}(z_1^{(n)} - z_1^{(m)})\|^2 + \|z_2^{(n)} - z_2^{(m)}\|^2$$

Comme $\lim\limits_{m,n \to +\infty} \|z^{(n)} - z^{(m)}\|_{\mathcal{Z}} = 0$. Alors

$\|A_0^{\frac{1}{2}}(z_1^{(n)} - z_1^{(m)})\|^2 + \|z_2^{(n)} - z_2^{(m)}\|^2 = 0$. donc $\lim\limits_{n,m \to +\infty} \|A_0^{\frac{1}{2}}(z_1^{(n)} - z_1^{(m)})\| = 0$ et

$\lim\limits_{n,m \to +\infty} \|z_2^{(n)} - z_2^{(m)}\| = 0$. donc $(z_2^{(n)})_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans H

et comme H est un espace de Hilbert alors $(z_2^{(n)})$ est convergente vers $z_2 \in H$

De même pour la suite $(A_0^{\frac{1}{2}} z_1^{(n)})_{n \geq 1}$ elle converge vers $z \in H$

on a $z_1^{(n)} = A_0^{-\frac{1}{2}}(A_0^{\frac{1}{2}} z_1^{(n)}) \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} z_1^{(n)} = \lim\limits_{n \to +\infty} A_0^{-\frac{1}{2}}(A_0^{\frac{1}{2}} z_1^{(n)}) = A_0^{-\frac{1}{2}} z$

Soit $z_1 = A_0^{-\frac{1}{2}} z$ alors $z = A_0^{\frac{1}{2}} z_1$ et aussi $z_1 \in D(A_0^{\frac{1}{2}})$

donc $\|z - z_n\| \longrightarrow 0$ où $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in D(A_0^{\frac{1}{2}}) \times H$.

Alors Z est complet, donc c'est un espace de Hilbert.

Soit $Q = \begin{pmatrix} -\alpha A_0^{-1} & -A_0^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix}$, on a $AQ = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -\alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha A_0^{-1} & -A_0^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$

on remarque que Q est un opérateur borné dans H et que $AQ = I$

Alors A est un opérateur fermé.

$\begin{cases} A_0 \text{ positif} \Rightarrow A_0 > 0 \\ A_0 \text{ coercive} \Rightarrow A_0^{-1} \end{cases}$, $\begin{cases} 1) \ A \text{ admet un inverse borné, alors } A \text{ est fermé} \\ 2) \ Z_n \longrightarrow Z \Rightarrow AZ_n = AZ \\ Z \in D(A) \text{ et } AZ = y \text{ et } A^* = A \Rightarrow A \text{ est fermé} \end{cases}$

Soit $Z \in D(A)$, on a : $\langle Z, AZ \rangle_Z = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -\alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

avec $Z = D(A_0^{\frac{1}{2}}) \times H$

donc $\langle Z, AZ \rangle_Z = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ -A_0 z_1 - \alpha z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z$

$= \langle A_0^{\frac{1}{2}} z_1, A_0^{\frac{1}{2}} z_2 \rangle_H + \langle z_2, -A_0 z_1 - \alpha z_2 \rangle_H$

$\Rightarrow \langle Z, AZ \rangle_Z = \langle z_1, A_0 z_2 \rangle_H - \langle z_2, A_0 z_1 \rangle - \alpha \langle z_2, z_2 \rangle$

$\Rightarrow \langle Z, AZ \rangle_Z = \langle A_0 z_1, z_2 \rangle - \langle z_2, A_0 z_1 \rangle - \alpha \langle z_2, z_2 \rangle$

$= \langle z_2, A_0 z_1 \rangle - \langle z_2, A_0 z_1 \rangle - \alpha \langle z_2, z_2 \rangle = -\alpha \langle z_2, z_2 \rangle$

$\Rightarrow \langle Z, AZ \rangle_Z = -\alpha \| z_2 \|^2$.

D'autre part, pour $y \in D(A^*)$, on a :

$\langle Z, A^* y \rangle = \langle AZ, y \rangle_Z = \left\langle \begin{pmatrix} z_2 \\ -A_0 z_1 - \alpha z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z$

$= \langle A_0^{\frac{1}{2}} z_2, A_0^{\frac{1}{2}} y_1 \rangle + \langle -A_0 z_1 - \alpha z_2, y_2 \rangle$

$= \langle z_2, A_0 y_1 \rangle - \langle A_0 z_1, y_2 \rangle - \alpha \langle z_2, y_2 \rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_0 & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \langle z, \hat{A} y \rangle = \left\langle z, \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_0 & -\alpha I \end{pmatrix} y \right\rangle \Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_0 & -\alpha I \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle z, \hat{A} z \rangle = -\langle A_0^{\frac{1}{2}} z_1, A_0^{\frac{1}{2}} z_2 \rangle + \langle z_2, A_0 z_1 \rangle - \alpha \langle z_2, z_2 \rangle$$

$$= -\langle z_2, A_0 z_1 \rangle + \langle z_2, A_0 z_1 \rangle - \alpha \langle z_2, z_2 \rangle = -\alpha \langle z_2, z_2 \rangle$$

Alors : $Re \langle z, Az \rangle_Z = -\alpha \|z_2\|^2 ; \forall z \in D(A)$

$Re \langle y, \hat{A} y \rangle_Z = -\alpha \|y_2\|^2 ; \forall y \in D(\hat{A})$

On conclut que si $\alpha \geq 0$. Alors A est un générateur d'un semi groupe de contraction.

<u>Application</u> : considérons le système

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dt^2}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,t), \; t > 0, \; 0 < x < 1 \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 \end{cases}$$

Soit $A_0 h = -\frac{d^2 h}{dx^2}$ dans l'espace $H = L^2(0,1)$

avec $D(A_0) = \left\{ h \in H \; ; \; \frac{dh}{dx} \text{ est absolument continue et } \frac{d^2 h}{dx^2} \in L^2(0,1), h(0) = h(1) = 0 \right\}$

A_0 est un opérateur auto-adjoint positif et $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

On peut écrire le système donné sous la forme abstraite suivante ,

$\dot{Z}(t) = A Z(t)$; $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}$ dans l'espace $Z = D(A_0^{\frac{1}{2}}) \times L^2(0,1)$

Comme $\alpha = 0$. Alors A engendre un semi groupe de contraction.

Montrons que A est un operateur spectrale de Riesz.

Soit λ_n une valeur propre de A et φ_n la fonction propre correspondante. Alors : $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_n^2 \\ -A_0 \varphi_n^1 \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_n^2 = \lambda_n \varphi_n^1 \\ -A_0 \varphi_n^1 = \lambda_n \varphi_n^2 \end{cases}$

donc $-A_0 \varphi_n^1 = \lambda_n \varphi_n^2 = \lambda_n (\lambda_n \varphi_n^1) = \lambda_n^2 \varphi_n^1$

$\Rightarrow \dfrac{d^2 \varphi_n^1}{d x^2} = \lambda_n^2 \varphi_n^1 \Rightarrow \varphi_n^1(x) = \alpha e^{\lambda_n x} + \beta e^{-\lambda_n x}$

On a : $\varphi_n^1(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

$\varphi_n^1(1) = 0 \Rightarrow \alpha e^{\lambda_n} + \beta e^{-\lambda_n} = 0 \Leftrightarrow \alpha (e^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n}) = 0$

$\Rightarrow 2i\alpha \sin(-i\lambda_n) = 0 \Rightarrow \sin(-i\lambda_n) = 0 \Rightarrow -i\lambda_n = n\pi ; n \geq 1$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = in\pi ; n \geq 1}$.

$\varphi_n^1(x) = \alpha (e^{\lambda_n x} - e^{-\lambda_n x}) = 2i\alpha \sin(-i\lambda_n x) \Rightarrow \varphi_n^1(x) = \sin n\pi x, n \geq 1$

Alors : $\varphi_n^2(x) = \lambda_n \varphi_n^1(x) = \lambda_n \sin n\pi x ; n \geq 1$

donc $\varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin n\pi x \\ \lambda_n \sin n\pi x \end{pmatrix} ; n \geq 1 , \lambda_n = in\pi ; n \geq 1$

On peut montrer que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une base orthogonale.

Soit $\phi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_H}$ (i.e normaliser les f^{ct})

on a : $\|\varphi_n\|_Z^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_Z = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_n^1 \\ \varphi_n^2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z$

$$= \langle A_0^{\frac{1}{2}} \varphi_n^1, A_0^{\frac{1}{2}} \varphi_n^1 \rangle_H + \langle \varphi_n^2, \varphi_n^2 \rangle_H = \langle \varphi_n^1, A_0 \varphi_n^1 \rangle_H + \langle \varphi_n^2, \varphi_n^2 \rangle_H$$

$$= \langle \varphi_n^1, -\lambda_n^2 \varphi_n^1 \rangle + \langle \varphi_n^2, \varphi_n^2 \rangle = -\lambda_n \langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle + \langle \lambda_n \varphi_n^1, \lambda_n \varphi_n^1 \rangle$$

$$= -\lambda_n^2 \langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle + |\lambda_n|^2 \langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle = n^2\pi^2 \langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle + n^2\pi^2 \langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle$$

et comme $\langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle_{H=L^2(0,1)} = \int_0^1 \varphi_n^1(x) \cdot \varphi_n^1(x) dx = \int_0^1 \sin^2 n\pi x \, dx$

$$= \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^1 - \frac{1}{4n\pi} \sin 2\pi n x \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

~~donc $\langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle = \|\varphi_n^1\|_H^2 = \frac{1}{2}$~~ donc. donc $\langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle = \|\varphi_n^1\|_H^2 = \frac{1}{2}$.

Alors : $\|\varphi_n\|_Z^2 = 2n^2\pi^2 \langle \varphi_n^1, \varphi_n^1 \rangle_H = \frac{2}{2} n^2\pi^2 \|\varphi_n^1\|_H^2 = n^2\pi^2 \|\varphi_n^1\|_H^2$

donc : $\phi_n(x) = \frac{\varphi_n}{n\pi}$ (car $\|\varphi_n\| = n\pi$; $n \geq 1$)

Alors $(\phi_n(x))_{n\geq 1}$ est une base orthonormée donc c'est une base de Riesz

on a ; $\forall n, m \geq 1$; $\lambda_n \neq \lambda_m$ et $\lim_{n\to+\infty} |\lambda_n| = +\infty$. Donc $(\lambda_n)_{n\geq}$ sont totalement déconnectés et on a : $\sup_{n\geq 1} \lambda_n = 0$, $\omega_0 = 0$.

Alors, A est un opérateur spectral de Riesz, Alors A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T(t)$ donné par :

$$T(t)z = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \ , \ z \in Z$$

$$\Rightarrow T(t)z = \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} \langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_n^1 \\ \phi_n^2 \end{pmatrix} \rangle_Z \phi_n \ ; \ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} [\langle z_1, A_0 \phi_n^1 \rangle_H + \langle z_2, \phi_n^2 \rangle_H] \phi_n$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_n t} [\langle z_1, A_0 \varphi_n^1 \rangle_H + \langle z_2, \varphi_n^2 \rangle_H] \varphi_n .$$

La borne de croissance de T est $w_0 = \sup_{n\geq 10} R\lambda_n = 0$

Problème de Cauchy :

Exemple 1 : soit le système : $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y_0 , y'(0) = y_1 \end{cases}$

Soit $z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Alors $z'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'(t) = A z(t) , \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad z_0 = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2, Considérons le problème,

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \ ; \ 0 < x < 1 , \ t > 0 \\ y(x,0) = y_0(x) = y_0 \\ y(1,t) = y(0,t) = 0 , \ t > 0 \end{cases} , \ \boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}}$$

on peut réécrire ce problème comme une équation différentielle abstraite dans l'espace de Hilbert $H = L^2(0,1)$ sous la forme

$$\dot{z}(t) = A z(t)$$

$$z(0) = z_0 \quad , \text{où } A f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \text{ avec}$$

$$D(A) = \{ f \in L^2(0,1) ; \frac{d^2 f}{dx^2} \in L^2(0,1) ; f(0) = f(1) = 0 \}$$

Problème homogène :

Soit H un espace de Hilbert, A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ tel que $D(A) \subset H$

Déf : le problème de Cauchy abstrait pour l'opérateur A avec une donnée initiale y_0 consiste à trouver une solution y au problème de la valeur initiale :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A y(t) \ , \ t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (P.C.A)$$

Déf : une solution classique (ou forte) du problème (P.C.A) est une fonction $y(t)$ à valeurs dans H qui est continûment différentiable pour $t \geq 0$, qui appartient à $D(A)$ pour tout $t \geq 0$ et qui satisfait les deux équations dans (P.C.A)

~~Remarque : (P.C.A) ne peut pas avoir une solution pour $y_0 \notin D(A)$~~

Remarque : le problème se réduit à l'étude d'existence d'un semigroupe unique $T(t)$ qui admette A pour générateur infinitésimal dans $D(A)$. lorsque ce pb est ~~résoluble~~, i.e, lorsque l'opérateur A vérifie les conditions de la réciproque du théorème de Hill-Yosida, on dira qu'on a résolu le pb (P.C.A) au sens des semigroupes.

Théorème : Si A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ sur H. Alors le problème de Cauchy abstrait (PCA) admet une solution classique unique donnée par $y(t) = S(t) y_0$ où $y_0 \in D(A)$

Preuve : on a : si $y_0 \in D(A)$

$$\frac{d}{dt}(S(t)y_0) = A S(t) y_0 = \cancel{S(t) A y_0} = S(t) y$$

donc $y(t) = S(t) y_0$. Alors

$$\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) \text{ avec } y(0) = S(t_0) y_0 = S(0) y_0 = y_0$$

Alors $\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

donc $y(t)$ est une solution du problème de Cauchy (PCA)

Montrons l'unicité de cette solution, soit v une autre solution du (PCA) dans $C^1([0,+\infty[; H) \cap C([0,+\infty[; D(A))$.

Fixons $t > 0$ et posons : $Z(s) = S(t-s) v(s)$, $s \in [0,t]$

donc $Z \in C^1([0,+\infty[; H) \cap C([0,+\infty[; D(A))$ et on a pour tout $s \in [0,t]$:

$$\frac{dZ}{ds}(s) = \frac{d}{ds}(S(t-s)v(s))$$
$$= \frac{d}{ds}(S(t-s))v(s) + S(t-s)\frac{dv}{ds}(s)$$
$$= -AS(t-s)v(s) + S(t-s)Av(s)$$
$$= -S(t-s)Av(s) + S(t-s)Av(s) = 0$$

donc : $\frac{d}{ds} z(s) = 0 \Rightarrow z(s) = z(t) ; \; \forall s \in [0,t]$

$\Rightarrow \quad z(0) = z(t) \Rightarrow S(t) v(0) = S(t-t) v(t)$

$\Rightarrow \quad S(t) y_0 = S(0) v(t) \Rightarrow S(t) y_0 = v(t) \Rightarrow y(t) = v(t)$

Donc $y(t) = v(t) ; \forall t \geq 0$. d'où l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

<u>Théorème 2</u>, Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans H et tq : $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; \inf |\lambda - \lambda_n| > 0\} \neq \emptyset$.

Si le problème (P.C.A) admet une solution classique unique. Alors A engendre un C_0-semigroupe.

<u>Remarque</u> : Si $y_0 \notin D(A)$, Alors $S(t) y_0 \notin D(A)$ et donc en général le problème de Cauchy abstrait n'admet pas de solution classique

<u>Déf 3</u>, Une fonction $y \in C([0,+\infty[; H)$ est une solution faible de (P.C.A) <u>ssi</u> pour chaque $z \in D(A^*)$, la fonction $\langle y(t), z \rangle$ est absolument continue sur $[0,+\infty[$ et :

$$\frac{d}{dt} \langle y(t), z \rangle = \langle y(t), A^* z \rangle \text{ pour presque tout } t \in [0,+\infty[$$

<u>Théorème 3</u>, Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe dans H. Alors (P.C.A) admet une solution faible unique pour chaque $y_0 \in H$ et cette solution est donnée par :

$z(t) = S(t) y_0$.

Preuve : • Si $z_0 \in D(A)$, $\langle S(t)z_0, z\rangle$ est dérivable par rapport à t et

on a : $\frac{d}{dt}\langle S(t)z_0, z\rangle = \langle \frac{d}{dt}(S(t)z_0), z\rangle = \langle AS(t)z_0, z\rangle = \langle S(t)z_0, A^* z\rangle$

donc : $\frac{d}{dt}\langle S(t)z_0, z\rangle = \langle S(t)z_0, A^* z\rangle$

donc $y(t) = S(t)z_0$ est une solution faible.

• Si $z_0 \in H$, Comme $D(A)$ est dense dans H, c-à-d, il existe une suite

$(z_n)_{n\geq 1}$ dans $D(A)$ tq : $\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$

$\forall n \geq 0$, $z_0^n \in D(A) \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle S(t)z_0^n, z\rangle = \langle S(t)z_0^n, A^* z\rangle$

On a : $\langle S(t)z_0, z\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle S(t)z_0^n, z\rangle = \langle \lim_{n\to+\infty} S(t)z_0^n, z\rangle$

et $\frac{d}{dt}\langle S(t)z_0, z\rangle = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\langle S(t+h)z_0, z\rangle - \langle S(t)z_0, z\rangle\right]$

$= \frac{d}{dt}\langle S(t)z_0, z\rangle$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle S(t)z_0, z\rangle = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\langle S(t+h)\lim_{n\to+\infty} z_0^n - S(t)\lim_{n\to+\infty} z_0^n, z\rangle$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\lim_{n\to+\infty}\langle \frac{S(t+h)-S(t)}{h} z_0^n, z\rangle$

$= \lim_{h\to 0}\lim_{n\to+\infty}\langle \frac{S(h)S(t)-S(t)}{h} z_0^n, z\rangle$

$= \lim_{h\to 0}\lim_{n\to+\infty}\langle \frac{S(h)-I}{h} S(t) z_0^n, z\rangle$

$\frac{d}{dt}\langle S(t)z_0, z\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle \lim_{h\to 0}\frac{S(h)-I}{h} S(t) z_0^n, z\rangle$

$$= \lim_{n\to+\infty} \langle AS(t)z_0^n, z\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle S(t)z_0^n, A^* z\rangle$$

$$= \langle \lim_{n\to+\infty} S(t)z_0^n, A^* z\rangle = \langle S(t)\lim_{n\to+\infty} z_0^n, A^* z\rangle$$

$$= \langle S(t)z_0, A^* z\rangle = \frac{d}{dt}\langle S(t)z_0, z\rangle$$

donc : $\frac{d}{dt}\langle S(t)z_0, z\rangle = \langle S(t)z_0, A^* z\rangle$

où $S(t)z_0$ est une solution faible

Montrons l'unicité de cette solution

Soit $v(t)$ une autre solution et posons : $w(t) = y(t) - v(t)$. Alors $\forall z \in D(A^*)$, on a :

$$\frac{d}{dt}\langle w(t), z\rangle = \frac{d}{dt}\langle y(t)-v(t), z\rangle = \frac{d}{dt}\langle y(t), z\rangle - \frac{d}{dt}\langle v(t), z\rangle$$

$$= \langle y(t), A^* z\rangle - \langle v(t), A^* z\rangle$$

$$= \langle y(t) - v(t), A^* z\rangle = \langle w(t), A^* z\rangle$$

integrons les deux membres, on trouve :

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\langle w(s), z\rangle = \int_0^t \langle w(s), A^* z\rangle ds$$

$$\Rightarrow \langle w(t), z\rangle - \langle w(0), z\rangle = \int_0^t \langle w(s)ds, A^* z\rangle = \langle \int_0^t w(s)ds, A^* z\rangle$$

$w(0) = y(0) - v(0) = y_0 - y_0 = 0$ donc

$$\langle w(t), z\rangle = \langle \int_0^t w(s)ds, A^* z\rangle = \langle A\int_0^t w(s)ds, z\rangle$$

$\Rightarrow \int_0^t w(s)ds \in D(A)$ et on a : $w'(t) = Aw(t)$

~~$0 \in D(A)$ car~~ on a : $w(0) = 0 \in D(A)$ et forte.

$w(t) = S(t)w(0) = 0 \Rightarrow w(t) = 0, \ \forall t \geq 0$

$\Rightarrow y(t) - v(t) = 0 \Rightarrow y(t) = v(t), \ \forall t \geq 0$ d'où l'unicité de la solution

Exemple : Considérons le problème :
$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ ; \ 0<x<1, \ t>0 \\ y(x,0) = z(x) \ ; \ 0<x<1 \\ y(1,t) = y(0,t) = 0, \ t>0 \end{cases}$$

On peut réécrire ce problème sous la forme :

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad \text{où } Az = \frac{d^2 z}{dx^2} \text{ avec}$$

$$D(A) = \{f \in L^2(0,1) \ ; \ \frac{d^2 f}{dx^2} \in L^2(0,1) \ ; \ f(0) = f(1) = 0\}$$

Comme A engendre un C_0-semi-groupe sur $Z = L^2(0,1)$. Alors le problème $(*)$ admet une solution classique si $z_0 \in D(A)$ et solution faible si $z_0 \in Z = L^2(0,1)$ et cette solution est donnée par :

$$z(t) = S(t)z_0 = \sum_{n \geq 1} e^{\lambda_n t} \langle z_0, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad \text{où}$$

$$\lambda_n = -n^2\pi^2 \ ; \ n \geq 1 \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x \ ; \ n \geq 1$$

Problème non homogène

Considérons le problème non homogène suivant

$$\text{P.N.H} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + f(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sur un espace de Hilbert Z ; $f : [0,t] \longrightarrow Z$

Déf : une solution $z : [0,t] \longrightarrow Z$ est une solution classique ou fort pour le problème (P.N.H) si : $z \in C^1([0,+\infty[; Z) \cap C([0,+\infty[; D(A)))$ et elle vérifie l'équation différentielle (PNH) avec la condition initiale.

Lemme : Si $z(\cdot)$ est une solution classique du (PNH). Alors :

$$z(t) = S(t) z_0 + \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds$$

Preuve : puisque $z(\cdot)$ est une solution classique du (PNH). Alors la fonction g définie par : $g(\tau) = S(t-\tau) z(\tau)$ est dérivable par rapport à $\tau \in [0,t]$ et on a :

$$\frac{d}{d\tau} g(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(S(t-\tau) z(\tau)\right) = -A\, S(t-\tau) z(\tau) + S(t-\tau) \frac{dz}{d\tau}(\tau)$$

$$= -AS(t-\tau) z(\tau) + S(t-\tau)\left(A z(\tau) + f(\tau)\right)$$

$$= -AS(t-\tau) z(\tau) + S(t-\tau) A z(\tau) + S(t-\tau) f(\tau)$$

$$= S(t-\tau) f(\tau)$$

donc : $\frac{d}{d\tau} g(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(S(t-\tau) z(\tau)\right) = S(t-\tau) f(\tau)$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(S(t-\tau) z(\tau)\right) d\tau = \int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow S(t-t) z(t) - S(t-0) z(0) = \int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow z(t) = S(t) z_0 + \int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

__Corollaire,__ Si le problème (PNH) admet une solution classique. Alors cette solution est unique.

Car l'expression : $z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$ est unique.

__Théorème.__

Si $z_0 \in D(A)$ et $f(\cdot) \in C^1([0,T]; Z)$. Alors le pb (PNH) admet une solution classique donnée par :

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

__Preuve,__ D'après ce qui précède, si le problème (PNH) admet une solution. Alors elle est donnée par : $z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$ pour $z_0 \in D(A)$. Alors $S(t)z_0 \in C^1([0,T]; Z) \cap C([0,T], D(A))$

Il suffit de montrer que : ~~$v(t) = \int S(t-\tau) f(\tau) d\tau$~~

$$v(t) = \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \in C^1([0,T]; \overset{\circ}{Z}) \cap C([0,T]; D(A))$$

__on a,__ $v(t) = \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t S(t-\tau)\left(f(0) + \int_0^\tau f'(s)ds\right)d\tau$

$$= \int_0^t S(t-\tau)f(0)d\tau + \int_0^t S(t-\tau)\left(\int_0^\tau f'(s)ds\right)d\tau$$

Comme on a : $\int_0^t S(t-\tau)y\, d\tau \in D(A)$ et $A\int_s^t S(t-\tau)y\,d\tau = S(t-s)y - y$ $\forall y \in H$

Alors : $v(t) = \underbrace{\int_0^t S(t-\tau)f(0)d\tau}_{\in D(A)} + \int_0^t \Big(\underbrace{\int_s^t S(t-\tau)f'(s)d\tau}_{\in D(A)}\Big)ds$

Alors :

$$A v(t) = A\left(\int_0^t S(t-\tau) f(0)\,d\tau\right) + A\int_0^t\left(\int_s^t S(t-\tau) f'(s)\,d\tau\right) ds$$

$$= A\int_0^t S(t-\tau) f(0)\,d\tau + \int_0^t A\left(\int_s^t S(t-\tau) f'(s)\,d\tau\right) ds$$

$$= S(t) f(0) - f(0) + \int_0^t \left(S(t-s) f'(s) - f'(s)\right) ds$$

$$= S(t) f(0) - f(0) + \int_0^t S(t-s) f'(s)\,ds - \int_0^t f'(s)\,ds$$

$$= S(t) f(0) - f(0) + \int_0^t S(t-s) f'(s)\,ds - f(t) + f(0)$$

$$= S(t) f(0) + \int_0^t S(t-s) f'(s)\,ds - f(t)$$

donc $A v(t) = S(t) f(0) + \int_0^t S(t-s) f'(s)\,ds - f(t)$

$$\boxed{A\int_\alpha^t S(t-r) y\,dr = S(t-r) y \Big|_\alpha^t}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t S(u) f(t-u)\,du\right)$$

$$= S(t) f(t-t) + \int_0^t S(u) f'(\underbrace{t-u}_{r})\,du \quad ; \ r = t-u$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt}(t) = S(t) f(0) + \int_0^t S(t-r) f'(r)\,dr$$

Comme $\frac{dv}{dt}(t)$ est continue et $\frac{dv}{dt}(t) = S(t) f(0) + \int_0^t S(t-r) f'(r)\,dr$

$$= A v(t) + f(t)$$

donc $\frac{dv}{dt}(t) = A v(t) + f(t)$.

Alors $AV(t) = \frac{dv(t)}{dt} - f(t) \in C([0,T]; Z)$.

donc $v(t) \in C([0,T]; D(A))$

On conclu que $v(t) \in C^1([0,T]; Z) \cap C([0,T]; D(A))$

Définition : Une fonction $z \in C([0,T]; Z)$ est une solution faible du (PNH) si : pour chaque $y \in D(A^*)$, la fonction $\langle z(t), y \rangle$ est absolument continue sur $[0,T]$ et on a :

$$\frac{d}{dt}\langle z(t), y \rangle = \langle z(t), A^* y \rangle + \langle f(t), y \rangle$$ pour presque tout $t \in [0,T]$.

Théorème :

Si $z_0 \in Z$ et $f \in L^1([0,T]; Z)$. Alors le problème (PNH) admet une solution faible unique donnée par :

$$z(t) = S(t) z_0 + \int_0^t S(t-s) f(s) ds$$

Un résultat de Perturbation :

Dans le cas particulier où $f(t) = D z(t)$ où $D \in \mathcal{L}(Z)$, on obtient le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A+D) z(t) \ ; \ t \geq 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

$\dot{z}(t) = A z(t) + f(t) = A z(t) + \frac{(A+D)}{A} z(t)$

on a le résultat suivant :

Théorème, Supposons que A est générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(t)$ dans un espace de Hilbert Z et soit $D \in \mathcal{L}(Z)$. Alors $(A+D)$ est le générateur infinitésimal du semigroupe $S_D(t)$.

Si $\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}$, alors $\|S_D(t)\| \leq M e^{(\omega + M\|D\|)t}$, $\forall t \geq 0$

le semigroupe $S_D(t)$ satisfait l'équation

$$S_D(t)z_0 = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)\, D S_D(s) z_0\, ds$$

et $S_D(t)z_0 = S(t)z_0 + \int_0^t S_D(t-s)\, D S(s) z_0\, ds$.