-Cours : Théorie du contrôle des systèmes linéaires.
(B.A) Master1 .M.A. 2020/2021.
Chapitre1 : Généralités.

Introduction générale :

La théorie du contrôle étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant

de la variable temporelle de façon à conduire l'état de ce système à un état donné à un instant donné.

Un système dynamique est décret par une équation qui modélise l'évolution

d'une grandeur physique par apport au temps, et qui est munie d'une donnée initiale.

Un système dynamique est dit continue s'il est écrit sous la forme :

$y(t) = f(t, y(t)), t \in \mathbb{R}$
$y(t_0) = y_0$

Il est dit discret s'il est écret sous la forme :

$y(k) = f(k, y(k)), k \in \mathbb{Z}$
$y(k_0) = y_{k_0}$

La grandeur physique $y(t)$ (resp. $y(k)$) s'appelle l'état du système à l'instant t (resp.k) ,

tandis que la fonction $t \longrightarrow y(t)$ (resp.$k \longrightarrow y(k)$) s'appelle la trajectoire du système.

On suppose qu'à tout instant $t \geq t_0$ (resp.$k \geq k_0$) , l'état $y(t)$ (resp. $y(k)$) appartient à

un espace vectoriel Y. Alors Y s'appelle espace d'état.

Si Y est de dimension finie , on dit que le système dynamique est de dimension finie ,

dans le cas contraire, il est dit de dimension infinie.

Les systèmes de dimension finie sont décrit par des équations différentielles ordinaires

(en abrégé : EDO) , et modélisent des phénomènes physiques dits " localisés"

tels le mouvement d'un solide ayant un nombre fini de degré de liberté (c-à-d., la possibilité pour un système d'évoluer dans une direction non contrainte) ,

la croissance d'une population quand la densité géographique n'est pas considéré, etc......

L'application $f : (t, y) \longmapsto f(t, y)$ s'appelle la dynamique du système.

Si f ne dépend pas de la variable temps, le système est dit autonome, dans ce cas,

on peut toujours supposer que $t_0 = 0$ (resp. $k_0 = 0$) . Dans le cas contraire,

le système est dit nonautonome.

On suppose maintenant qu'on peut agir sur le système dynamique par une fonction u,

alors, le système dynamique continue devient :

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

et le système dynamique discret devient :

$$y(k) = f(k, y(k), u(k))$$
$$y(k_0) = y_{k_0}$$

La fonction u s'appelle le contrôle et l'espace vectoriel auquel appartient $u(t)$ noté U

s'appelle l'espace des contrôles.

Généralement la fonction de contrôle considérée $u(.)$ est non continue

(au miieux continue par morceaux) ,et peuve ètre choisie sous certaines contraintes

dans le cadre de réaliser certains objectifs :

· Amener le système d'un certain état à un autre état (contrôlabilité) .

· Maintenir l'état d'un système dynamique trés proche d'une position donnée (stabilisation) .

· Minimiser une certaine fonction coùt (optimisation) .

Exemples :

Exemple1 : Le système masse-ressort

Le système masse-ressort avec contrôle $u(.)$ s'écrit de la façon suivante :

$$my''(t) + Ry(t) = u(t)\,; t > 0$$
$$y(t_0 = 0) = y_0, y'(t_0 = 0) = y_1$$

C'est une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients constants.

Question: Peut- on trouver au moins un contrôle $u(.)$ tel que $y(T) = y'(T) = 0.$? (contrôlabilité)

Exemple2 : le système du pendule .

Le système du pendule de masse m et de longueur l avec contrôle $u(.)$ est donné par :

$$ml^2\theta''(t) + mgl\sin\theta(t) = u(t), t > 0$$
$$\theta(t_0 = 0), \theta'(t_0 = 0) = \theta_1.$$

θ est l'angle du pendule formé avec la verticale.

θ' est la vitesse angulaire .

Question : Comment stabiliser ce système non linéaire ?. (stabilisation) .

Exemple3 : le problème de la barque

Le mouvement d'une barque se déplaçant à vitesse constante sur une rivière où il y a un courant $c(y)$

est modélisé par :

$$x'(t) = v\cos(u(t)) + c(y(t)) \quad ; \quad x(0) = 0$$
$$y'(t) = v\sin(u(t)) \quad ; \quad y(0) = 0.$$

où v est la vitesse et $u(t)$, l'angle de la barque par rapport à l'axe (o, x) , est le contrôle.

Question : Comment atteindre un point donné sur l'autre berge ?. (optimisation) .

De maniére plus générale, nous considérons des systèmes de contrôle sous la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad \forall t \in I \text{ un intervalle de } \mathbb{R}$$
$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \qquad (S)$$

où $y : t \in I \longrightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 1$, décrit l'état du système .

$u : t \in I \longrightarrow \mathbb{R}^m, m \geq 1$, est le contrôle.

et $f \ : t \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$,décrit la dynamique du système .

Définition1 :

On appelle trajectoire d'un système de contrôle toute fonction régulière

$t \in I \subset \mathbb{R} \longrightarrow (y(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui satisfait (S) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition2 :

On appelle point d'équilibre du système de contrôle $y'(t) = f(y(t), u(t))$ un couple

$(y_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfaisant $f(y_e, u_e) = 0$.

Définition3 :(fonction absolument continue)

On dit qu'une fonction $F : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est absolument continue sur l'intervalle $[0, T]$ et on écrit

$F \in AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ s'il existe une fonction $f \in L^1([0, T] : \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$F(t) - F(0) = \int_0^t f(s)\, ds, \forall t \in [0, T] \ .$$

Si une fonction F est absolument continue sur $[0, T]$, alors elle est continue sur $[0, T]$ et elle est

dérivable presque partout (p.p en abrégé) ,de dérivée égale à f .

Théorème1 :(théorème de Lusin)

Pour chaque fonction $F : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, F est mesurable si et seulement s'il existe une suite de sous

ensembles compacts disjoints $J_k \subset [0, T]$ avec $mes\left([0, T] \diagdown \cup_{k=1}^{+\infty} J_k\right) = 0$ et tel que la restriction

de F à chaque ensemble J_k est continue.

Les objectifs principaux de la théorie du contrôle que nous allons aborder sont :

les notions de contrôlabilité, d'observabilité, de stabilisation.

Nous allons aussi aborder brièvement la notion de contrôle optimal pour les systèmes dynamiques,

et en particulier pour les systèmes dynamiques linéaires.

Avant d'étudier ces notions clés des systèmes de controle , il faut avant tout s'assurer

que les systèmes que nous étudions admettent des solutions et quelles sont uniques.

Nous allons commencer de voir ou revoir certains outils mathématiques importents :

théorème de Cauchy-Lischitz pour les systèmes différentiels avec fonctions mesurables.

Théorème de Cauchy-lipschitz :

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

F une application continue de $I \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition4 :

étant donnée $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$, le problème de Cauchy usuel consiste à trouver $J \subset I$

un intervalle contenant t_0, et une application $y : I \longmapsto \Omega$ dérivable sur J , satisfaisant :

$$y'(t) = F(t, y(t)) \ ; t \in J$$
$$y_0(t_0) = y_0 \quad t_0 \in I \quad , y_0 \in \Omega$$

(PC)

Forme intégrale de problème de Cauchy :

Un couple (J, y) est solution de problème de Cauchy (PC) si et seulement si, l'équation intégrale

suivante est vérifiée : $\forall t \in J \ ; \ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds$
(FI)

Théorème 2 :(Cauchy-Lipschitz, cas continu et Lpschitz global)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $F : I \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ une application continue en t et en y,

supposée globalement Lipschitzienne à sa deuxième variable y au sens suivant :

pour tout compact $K \subset I$, il existe $L > 0$ tel que ;

pour tout $t \in K$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$; $\| F(t, y_1) - F(t, y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|$.

Alors, pour tout $t_0 \in I$, et $y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy : $y'(t) = F(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$

admet une unique solution $t \longmapsto y(t)$ qui est global (définie sur I tout entier) .

Démonstration : Le principe de la démonstration consiste à observer que y est solution du problème

de Cauchy (PC) si et seulement si y vérifiée l'équation intégrale $(F.I)$,

$i.e.,.$ $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds$; $\forall t \in J$

On introduit l'espace $Y = C^0(I; \mathbb{R}^n)$, il s'agit d'un espace de Banach (espace vectoriel normé complet)

équipé de la nome de la convergence uniforme $\|y\|_Y = \sup_{t \in I} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $y \in Y$.

Résoudre le problème de Cauchy (PC) revient à chercher un point fixe de l'application $\Phi : Y \longrightarrow Y$

où pour tout $y \in Y$, $\Phi(y)$ est tel que : $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds$; $\forall t \in J.$

On montre que l'application Φ est strictement contractante de Y dans Y et on conclut par

le théorème du point fixe de Picard (voir cours EDO) .

L'hypothèse de continuité en t de l'application faite au théorème2 n'est pas vraiment satisfaisante

pour l'étude des systèmes de contrôle.

En effet, ces systèmes s'écrivent sous la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$
$$y(t_0) = y_0 \ . \qquad (S)$$

Où $u \in L^1(I; \mathbb{R}^m)$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n$.

Donc,pour chaque contrôle considéré $u \in L^1(I;\mathbb{R}^m)$, L'étude du système (S) se ramène à celle

du problème de Cauchy en posant :

$F(t,y,) = f(t,y,u(t))\,;\ \forall t \in I, \forall\, y \in\ \mathbb{R}^n, y(t_0) = y_0 \qquad (PC_u)$

Mais ,dans ce cas, l'application F ne sera pas nécessairement continue en t, alors afin de traiter

cette situation, on dispose de la variante suivante du théorème2**.**

(la démonstration utilise des arguments analogues à ceux évoqués ci-dessus (théorème**1**)).

Théorème3 : (Cauchy-Lpschitz, cas mesurable et Lipschitz global).

On suppose que :

$i)$ L'application F est mesurable en t et continue en y, c-à-d.,

- pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, l'application $t \longmapsto F(t,y)$ est mesurable, et
- pour presque tout $t \in I$ l'application $t \longmapsto F(t,y)$ est continue.

$ii)$ L'application F est intégrable en t, c-à-d., $\forall y \in \mathbb{R}^n, \exists \beta \in L^1(I;\mathbb{R}^+), \forall t \in I; \|F(t,y)\| \leq \beta(t)$.

$iii)$ L'application F est globalement Lipschitzienne en y,c-à-d.,

$\exists \alpha \in L^1(I;\mathbb{R}^+)\,;\ p.p\ t \in I\ , \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n,\ \|F(t,y_1) - F(t,y_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t)\,\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^n}$.

Alors, il existe une unique solution au problème de Cauchy (PC_u) telle que $y \in AC(I;\mathbb{R}^n)$.

Cette solution, qui est dérivable p.p sur I , satisfait le système différentiel (S_u) pour presque tout $t \in J$;

elle vérifie également $\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds$; $p.p\ t \in J. \qquad (FI_u)$

Exemple4 :

ON se place dans $\mathbb{R}\,(n=1)$ et on considère le système de contrôle (S) avec un contrôle u

à valeurs scalaires $(m=1)$ et l'application f telle que: $\ f(t,y,u) = y^2 + u$

(qui ne dépend pas explicitement de t).

On obtient alors le problème de Cauchy : $y'(t) = y^2(t) + u(t)$. On considère la donnée initiale $y_0 = 0$,

et on suppose que le contrôle est constant en temps égal à $u_0 \in \mathbb{R}^+$.

On vérifie sans peine que la trajectoire est donnée par : $\ y(t) = \sqrt{u_0}\tan\left(\sqrt{u_0}t\right)$.

Systèmes de contrôle linéaires :

Cas1 : Systèmes de contrôle linéaires continus (SCC).

Considérons le système de contrôle linéaire à temps continu donné sous la forme suivante :

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + B(t)\,u(t) + g(t),\ \ t \in I \text{ un intervalle de } \mathbb{R} \qquad (SCC)$$
$$y(t_0) = y_0\ ,\ t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Les hypothèses du théorème3 sont clairement vérifies si les applications :

$t \longmapsto A(t),\ \ t \longmapsto B(t)\,u(t),\ \ \ t \longmapsto g(t)$

sont intégrables sur l'intervalle considéré I , supposons que :

$$A(.) \in L^1(I; M_{n\times n}(\mathbb{R})),\quad g \in L^1(I;\mathbb{R}^n)$$

Par ailleurs les hypothéses assurant l'intégrabilité de $B(.)\,u(.)$ dépendent de l'ensemble des contrôles considérés :

$\cdot$ Si $u(.) \in L^{+\infty}(I;\mathbb{R}^m)$, alors on suppose que $B(.) \in L^1(I;M_{n\times m}(\mathbb{R}))$

$\cdot$ Si $u(.) \in L^2(I;\mathbb{R}^m)$, alors on suppose que $B(.) \in L^2(I;M_{n\times m}(\mathbb{R}))$

De maniére générale

$\cdot$ Si $u(.) \in L^p(I;\mathbb{R}^m)$, alors on suppose que $B(.) \in L^q(I;M_{n\times m}(\mathbb{R}))$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

$\cdot$ Si les contrôles sont des fonctions mesurables à valeurs dans un compact $K \subset \mathbb{R}^m$,

alors on suppose que $B(.) \in L^1(I;M_{n\times m}(\mathbb{R}))$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 3 , nous assure que, pour chaque contrôle u,et pour chaque

donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}^n$, le système de contrôle linéaire continu (SCC) admet une unique solution

$y : I \longmapsto \mathbb{R}^n$ absolument continue. Cette solution satisfait l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = \Phi(t,t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\,[B(s)\,u(s)+g(s)]\,ds, \forall t \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (EI).$$

où $\Phi(t,t_0)$ désigne la résolvante du système linéaire homogène :

$$y'(t) = A(t)\,y(t), \qquad y(t_0) = y_0, \forall t \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (SCCH)$$

pour lequel, la solution est donnée par : $y(t) = \Phi(t,t_0)\,y_0$.

Définition5 :

La résolvante $\Phi(t,t_0)$ du système linéaire continu homogène $(SCCH)$ associée au système linéaire

continu (SCC) ,est la solution du problème de Cauchy :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = A(t)\,\Phi(t,t_0), \forall t,t_0 \in I$$

$$\Phi(t_0,t_0) = I_{n\times n} \text{ matrice identité}$$

où $\Phi(t,t_0) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

La résolvante $\Phi(t,t_0)$ possède les propriétés suivantes :

1) $\Phi(t_2,t_1)\,\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_2,t_0), \forall t,s,t_0 \in I$

2) $\Phi^{-1}(t,s) = \Phi(s,t), \forall t,s \in I.$

3) $\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s) = -\Phi(s,t)\,A(t), \forall t,s \in I$

4) Si $\Delta(t,t_0) = \det\Phi(t,t_0)$, on a alors : $\frac{\partial}{\partial t}\Delta(t,t_0) = tr(A(t))\,\Delta(t,t_0)$, $\Delta(t_0,t_0) = 1.\forall t,t_0 \in I.$

Remarque1 : La solution du système de contrôle continu (SCC) est obtenu par la méthode

de la variation de la constante.

On vérifie seulement que la solution y donnée par l'expression (IE) satisfait (SCC).

En effet : pour $t = t_0$, on a ,alors $y(t_0) = \Phi(t_0,t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0,s)\,[B(s)\,u(s)+g(s)]\,ds \Longrightarrow y(t_0) = y_0$.

et par dérivation de l'expression (EI) de y par rapport à t, on obtient :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \Phi'(t,t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi'(t,s)\,[B(s)\,u(s)+g(s)]\,ds + \Phi(t,t)\,[B(t)\,u(t)+g(t)] \\ &= A(t)\,\Phi(t,t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^{t} A(t)\,\Phi(t,s)\,[B(s)\,u(s)+g(s)]\,ds + \Phi(t,t)\,[B(t)\,u(t)+g(t)] \end{aligned}$$

$= A(t)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\left[B(s)u(s) + g(s)\right]ds\right) + \Phi(t,t)\left[B(t)u(t) + g(t)\right]$
$= A(t)y(t) + B(t)u(t) + g(t)$.

Détermination de la résolvante $\Phi(t,t_0)$:

La résolution du système (SCC) revient à la détermination d'une expression de la résolvante $\Phi(t,t_0)$.

Il est bien connu que lorsque la matrice $A(t)$ est triangulaire,

le système linéaire homogène $(SCCH)$ peut être résolu (et donc $\Phi(t,t_0)$) par des intégrations

sequentiels de chaque équation différentielle.

Cependant, dans le cas général, la détermination de la résolvante $\Phi(t,t_0)$ n'est pas facile.

Mais, on peut cité une classe importante de matrices $A(t)$ pour lesquelles une

expression de $\Phi(t,t_0)$ existe.

Théorème4 :

Si pour chaque $t, s \in I \subset \mathbb{R}$, on a : $A(t)\left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right) = \left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)A(t)$.

Alors $\Phi(t,s) = e^{\int_s^t A(\tau)d\tau} = I + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left[\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right]^k$.

Cette relation est satisfaite si et seulement si : $A(t)A(s) = A(s)A(t)$.

Cas2 : Systèmes de contrôle linéaire discret (SCD):

On considère maintenent le système de contrôle à temps discret donné sous la forme :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= A(k)y(k) + B(k)u(k) + g(k);\, k \in \mathbb{Z} \\ y(k_0) &= y_{k_0};\text{ pour } k = k_0, k_0+1, \ldots\ldots;\, k_0 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \qquad (SCD)$$

où : $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.

$y^T(k) = (y_1(k), y_2(k), \ldots\ldots, y_n(k))$, $u^T(k) = (u_1(k), u_2(k), \ldots\ldots, u_m(k))$.

Comme dans le cas des systèmes de contrôle linéaires à temps continu de dimension finie :

k_0 désigne le temps initial, k désigne le temps, $u(k)$ désigne le contrôle évalue au temps k .

$A : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{R}^{n\times n}$, $\quad B : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{R}^{n\times m}$, $\quad g : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{R}^n$.

Solution du système homohène :

Considérons tout d'abord le système homogène :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= A(k)y(k),\, k \in \mathbb{Z} \\ y(k_0) &= y_{k_0},\, k_0 \in \mathbb{Z};\, k > k_0 \end{aligned} \qquad (SCDH)$$

On observe que :

$$\begin{aligned} y(k+2) &= A(k+1)y(k+1) = A(k+1)A(k)y(k) \\ &. \\ &. \\ y(n) &= A(n-1)A(n-2)\ldots\ldots\ldots A(k+1)A(k)y(k) \\ &= \Pi_{j=k}^{n-1} A(j)\,y(k) \end{aligned}$$

C'est-à-dire, l'état du système au temps n est lié à l'état du système au temps k par

la matrice carrée $n \times n$: $\Pi_{j=k}^{n-1} A(j)$.

ce qui prouve que la matrice résolvante du système homogène dans le cas discret

est donnée sous la forme : $\Phi(n,k) = \Pi_{j=k}^{n-1} A(j)$, $n > k$; $n,k \in \mathbb{Z}$. tel que: $\Phi(k,k) = Id$ matrice identité.

Remarque2 :

La résolvante $\Phi(n,k)$ des systèmes de contrôle linéaires discret possède des propriétés analogues

à celles des systèmes de contrôles linéaires continus.

Solution du système nonhomogène :

Comme dans le cas à temps continu, la solution du système homogène discret $(SCDH)$ est donné

sous la forme: $y(n) = \Phi(n,k)\, y(k) = \Pi_{j=k}^{n-1} A(j)\, y_k$; $n > k$.

Pour le système de contrôle linéaire discret nonhomogène (SCD) la solution est obtenue

de la mnière suivane: On a,

pour k_0;

$$
\begin{aligned}
y(k_0+1) &= A(k_0)\, y(k_0) + B(k_0)\, u(k_0) + g(k_0) \\
y(k_0+2) &= A(k_0+1)\, y(k_0+1) + B(k_0+1)\, u(k_0+1) + g(k_0+1) \\
&= A(k_0+1)\left[A(k_0)\, y(k_0) + B(k_0)\, u(k_0) + g(k_0)\right] \\
&\quad + B(k_0+1)\, u(k_0+1) + g(k_0+1) \\
&= A(k_0+1)\, A(k_0)\, y(k_0) + A(k_0+1)\left[B(k_0)\, u(k_0) + g(k_0)\right] \\
&\quad + B(k_0+1)\, u(k_0+1) + g(k_0+1) \\
y(k_0+3) &= A(k_0+2)\, y(k_0+2) + B(k_0+2)\, u(k_0+2) + g(k_0+2) \\
&= A(k_0+2)\begin{bmatrix} A(k_0+1)\, A(k_0)\, y(k_0) + A(k_0+1)\left[B(k_0)\, u(k_0) + g(k_0)\right] \\ + B(k_0+1)\, u(k_0+1) + g(k_0+1) \end{bmatrix} \\
&\quad + B(k_0+2)\, u(k_0+2) + g(k_0+2) \\
&= A(k_0+2)\, A(k_0+1)\, A(k_0)\, y(k_0) + A(k_0+2)\, A(k_0+1)\left[B(k_0)\, u(k_0) + g(k_0)\right] \\
&\quad + A(k_0+2)\left[B(k_0+1)\, u(k_0+1) + g(k_0+1)\right] \\
&\quad + B(k_0+2)\, u(k_0+2) + g(k_0+2) \\
&= \Phi(k_0+3,k_0)\, y_{k_0} + \Phi(k_0+3,k_0+1)\left[B(k_0)\, u(k_0) + g(k_0)\right] \\
&\quad + \Phi(k_0+3,k_0+2)\left[B(k_0+1)\, u(k_0+1) + g(k_0+1)\right] \\
&\quad + \Phi(k_0+3,k_0+3)\left[B(k_0+2)\, u(k_0+2) + g(k_0+2)\right].
\end{aligned}
$$

d'aprés la formule de la résolvane : $\Phi(n,k) = \Pi_{j=k}^{n-1} A(j)$.

Donc, pour tout $k \geq k_0 + 1$, on obtient que l'expression de la solution des systèmes

de contrôle linéaires discret (SCD) est donnée sous la forme : $y(k) = \Phi(k,k_0)\, y_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k,j+1)\left(B(j)\, u(j) + g(j)\right); k > k_0$.

Systèmes de contrôle linéaires à coefficients constants :(cas continu)

Soit $n,m \in \mathbb{N}^*$ (en particulier $m \leq n$) ,et soit $T > 0$ un horizon temporel fixé.

On considère le système de contrôle linéaire continu, à coefficients constants et de dimonsion finie :

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= Ay(t) + Bu(t), \ \forall t \in [0,T] \qquad (SCC1) \\
y(0) &= y_0 \ , y_0 \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

où : $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Si $u \in L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$, alors le système $(SCC1)$ admet une unique solution absolument continue

$y : [0,T] \longmapsto \mathbb{R}^n$ (c-à-d., $y \in AC([0,T];\mathbb{R}^n)$) donnée par : $y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds, \forall t \in [0,T]$.

Cette solution est obtenue par la méthode de la variation de la constante, et dans ce cas

La matrice résolvante est écrit sous la forme: $\Phi(t,0) = e^{tA}$.

Détérmination de la résolvante e^{tA} :

La résolution du système $(SCC1)$ revient à la détermination d'une expression de la résolvante e^{tA}

Cas 1 :

Si A est une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ (réelle ou complexe)

avec $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ comme valeurs propres répétés selon leurs multiplicité algébrique,

alors il existe une base $v_1, v_2, ..., v_n$ de $\mathbb{C}^n$ avec v_i vecteur propre de A associe à la valeur propre λ_i.

Soit $P = [v_1, v_2, ..., v_n]$ la matrice dont la $i^{iéme}$ colonne est donnée par le vecteur propre v_i.

Alors $e^{tA} = PDP^{-1}$; où, D est la matrice diagonale donnée par: $D = iag\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t}\right)$.

Cas 2 :

Si A est non diagonalisable ,alors, pour calculer la résolvante e^{tA}, on réduit d'abord

cette matrice sous une forme dite forme de Jordan, on a alors le théorème suivant :

Théorème 5 :

Tout matrice carrée A de taille $n \times n$ dont le polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

est scindé, peut être réduite à la forme dite de Jordan , c-à-d, il existe une base par rapport à laquelle

la matrice A s'écrit soue la forme de blocs $P^{-1}AP = J = diag(J_1, J_2, ..., J_p)$.

Où P est la matrice de passage et $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & . & . \\ . & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$

est le bloc de Jordan de taille $n_i \times n_i$ de valeur propre λ_i. (alors $n \sum_{i=1}^{p} n_i)$.

Plus généralement, si l'on souhaite calculer l'exponentielle d'une matrice, on réduira d'abord cette

matrice sous la forme de Jordan . on a ainsi $A = PJP^{-1}$ et par suite $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$

L'exponentielle d'une matrice de Jordan est facile à calculer.

Pour une telle matrice on a : $J = D + N$ où D est diagonal et N nilpotente

$\left(\text{ c-à-d., } \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } N^{k-1} \neq 0 \text{ et } N^k = 0\right)$, D et N commutent (c-à-d., $DN = ND$) .

par conséquent $e^{tA} = Pe^{t(D+N)}P^{-1} = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}$. avec $e^{tN} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(tN)^j}{j!}$.

Calcul de la puissance d'une matrice :

Pour calcuter A^n, on évite de faire $A \times A \times A \times .... \times A, n$ fois , onpréfère la technique suivante,

quand elle est possible, on diagonalise A, on élève la réduite diagonale D à la puissance n,

puis on utilise la relation : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Remarque3 :

1) La solution du système linéaire homogène discret autonome :

$$y(k+1) = Ay(k)\,; k \in \mathbb{Z}$$
$$y(k_0) = y_{k_0}, k \geq k_0, k_0 \in \mathbb{Z}$$

est donnée sous la forme : $y(k) = \Phi(k, k_0)\, y_{k_0} = A^{(k-k_0)}y_{k_0}$, c'est -à dire $\Phi(k, k_0) = A^{(k-k_0)}$.

2) La solution du système linéaire nonhomogène discret autonome :

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k) + g(k)\,; k \in \mathbb{Z} \qquad (SCD)$$
$$y(k_0) = y_{k_0};\ \text{pour}\ k = k_0, k_0+1, ...;\ k_0 \in \mathbb{Z}$$

est donnée pour chaque contrôle $u : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{R}^m$ sous la forme :

$$y(k) = A^{(k-k_0)}y_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-(j+1)}\left(Bu(j) + g(j)\right),\ \Phi(k, k_0) = A^{(k-k_0)}.$$

Exemple 1: La résolvante du système suivant :

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t).$$

est obtenue de la manière suivante :

$i)$ la matrice de ce système est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dont les racines : $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ sont les valeurs propres

de la matrice A . Comme ces valeurs propres sont distinctes, la matrice A est diagonalisable.

La matrice de passage des vecteurs propres est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, avec $i^2 = -1$.

Donc : $A = PDP^{-1}$, ainsi $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cot t \end{pmatrix}$.

et la solution du système est donnée par :$y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cot t \end{pmatrix} y(0)$.

Exemple 2 : La résolvante du système linéaire dont la matrice donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est obtenue de la manière suivante :

$i)$ Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)^3$.

$ii)$ Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 1$ (simple), $\lambda_2 = 2$ (triple).

$iii)$ Les vecteurs propres associés sont :

$$a)\ v \in E_1 \Longleftrightarrow Av = v \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x = x \\ y = x \\ z = x \\ t = 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_1 = Vect\left\{u_1^T = (1,1,1,0)\right\}$.

$$b)\ v \in E_2 \Longleftrightarrow Av = 2v \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = y \\ z = y \\ t = 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow E_2 = Vect\left\{u_2^T = (0,1,1,0)\right\}.$$

Comme $\dim E_2 \neq 3 =$ multiplicité de λ_2. An'est pas diagonalisable.

On détermine une réduite de Jordan.

$\lambda_1 = 1$ étant une valeur propre simple, le bloc de Jordan est entièrement déterminé.

Construisons donc la suite de noyaux des puissances de $M = A - 2I$.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \dim Ker(M) = 1$$

On peut déja dire qu'il y aura un unique bloc de Jordan associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{on voit facilement que } Ker\left(M^2\right) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

de dim $= 2$.

$$M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{on a donc } Ker\left(M^3\right) = Vert\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

de dim $= 3$.

Cela signifie que la taille de Jordan associe à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est de taille 3.

$$\text{On prend } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker\left(M^3\right) \setminus Ker\left(M^2\right)$$

puis $v_2 = Mv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors dans la base $\{u, v_3, v_2, v_1\}$ la réduite de Jordan de A est de la forme $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $P^{-1}AP = J \Longrightarrow A = PJP^{-1}$. et ,on a $J = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et

$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 3 : Soit A est une matrice d'un système linéaire homogène discret donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} k & k^2+1 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \text{ avec } k_0 = 0.$$

Alors, la résolvante $\Phi(k,0)$ est donnée comme suite :

$\Phi(k,0) = A(k-1)\,A(k-2)\,............A(2)\,A(1)\,A(0)$

$$= \begin{pmatrix} k-1 & (k-1)^2+1 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{pmatrix} .... \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si par exemple $k = 3$, alors :

$$y(3) = A(2)\,A(1)\,A(0)\,y(0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(0).$$

Exercices :

exercice1 : Trouver le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres

correspondants pour chaque matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Montrer que la matrcice suivante est diagonalisable et diagonaliser .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Montrer que la matrice suivante A n'est pas diagonalisable ,et trouver la réduite de Jordan pour cette matrice: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice4 : Trouver e^{tA}, où A est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5: Calculer e^{tA} pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Montrer que pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, nous avons $e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$.

Exercice7 : Trouver la solution du système linéaire homogène suivant :

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} y(t) \,;\; y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice8 : Considérer l'équation du mouvement harmonique simple :

$$Z'' + \omega^2 Z = 0, \text{ avec } \omega \neq 0.$$

Prener comme variable d'état : $y_1 = Z$, $y_2 = \frac{1}{\omega} Z'$ et trouver la matrice résolvante $\Phi(t, 0)$.

Exercice9 : Soit le système de contrôle linéaire définie par :

$$y_1' = y_1 + 4y_2 + u(t)$$
$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

Déterminer la matrice résolvante $\Phi(t, 0)$ et écrire la solution générale correspondante du système.

Exercice 10 :

Soit le système de contrôle linéaire donné par :

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

avec $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u(t) = 1$ si $t \geq 0; u(t) = 0$ sinon.

$i)$ Trouver la résolvante $\Phi(t, 0)$.

$ii)$ Donner l'expression de la solution du système.

Exercice11 : Pour le système de contrôle linéaire :

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

déterminer la résolvante $\Phi(t, 0)$.

Si $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u(t) = e^{2t}; t \geq 0$, utiliser la formule:

$y(t) = \Phi(t, 0) y_0 + \int_0^t \Phi(t, s) Bu(s) ds$ pour obtenir l'expression de $y(t)$.

Chapitre 2

2.1 **Contrôlabilité et observabilité des systèmes linéaires.**

2.1.1- **Contrôlabilité des systèmes linéaires :**

Il est souvent souhaitable de déterminer une entrée $u(t)$ (un contrôle) qui provoque les états d'un système pour prendre différentes valeurs en temps fini, (par exemple, pour transférer le vecteur d'état d'une valeur vectorielle spécifiée à une autre), tel que le cas, par exemple, en attitude satellite contrôlé, où le satellite doit changer son orientation.

Ce type de propriété souhaitable conduit aux concepts de contrôlabilité:

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

On considère un système dynamique dans l'état $y(t) \in \mathbb{R}^n$ est régi par le système différentiel :

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + B(t)\,u(t), \quad \forall t \in I \qquad (2.1).$$

$$y(t_0) = y_0 \ , \ t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

avec : $A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B(t) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

La fonction temporelle $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ nous permet d'agir sur le système afin de modifier l'état.

On dit que u est un contrôle.

Si le contrôle $u \in L^2(J;\mathbb{R}^m)$ est fixé, où $J \subseteq I$ est un intervalle fermé borné.

Alors il existe une unique trajectoire $y = y_u \in AC(J;\mathbb{R}^m)$ associée à ce contrôle,

solution du système (2.1) au sens où cette trajectoire vérifiée la condition initiale $y_u(t_0) = y_0$

et le système différentiel: $y_u'(t) = A(t)\,y_u(t) + B(t)\,u(t)$ pour presque tout $t \in J$.

En utilisant la méthode de variation de la constante, la solution $y = y_u$ est donnée par :

$$y(t) = y_u(t) = \Phi(t,t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\,B(s)\,u(s)\,ds, \forall t \in J \ . \qquad (2.2)$$

Où $\Phi(t,t_0)$ désigne la matrice résolvante du système homogène :

$$y(t) = A(t)\,y(t)\,,\ y(t_0) = y_0; \forall t \in I \ .$$

En effet : La slution du système homogène: $y'(t) = A(t)\,y(t)\,,\ \ y(t_0) = y_0$ $,\forall t \in I$

est donnée en fonction de sa résolvante $\Phi(t,t_0)$ par : $y(t) = \Phi(t,t_0)\,y_0$.

Définissons maintenant une nouvelle variable $z(t) = \Phi(t_0,t)\,y(t)$.

Par différentiabilité de $z(t)$ par rapport à la variable t,on obtient :

$$z'(t) = \Phi'(t_0,t)\,y(t) + \Phi(t_0,t)\,y'(t)$$

$$= -\Phi(t_0,t)\,A(t)\,y(t) + \Phi(t_0,t)\left[A(t)\,y(t) + B(t)\,u(t)\right], \text{ car : } \Phi'(t_0,t) = -\Phi(t_0,t)\,A(t)\,.$$

Donc : $z'(t) = \Phi(t_0,t)\,B(t)\,u(t)$, et par intégration de t_0 à t_1, on obtient :

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,s)\,B(s)\,u(s)\,ds = y_{0+} \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,s)\,B(s)\,u(s)\,ds.$$

et comme, $y(t) = \Phi^{-1}(t_0,t)\,z(t)$, on a alors,

$$y(t) = \Phi^{-1}(t_0,t)\left[y_{0+} \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,s)\,B(s)\,u(s)\,ds\right]$$

$= \Phi(t,t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\, B(s)\, u(s)\, ds, \forall t \in J$.

Dans cette partie, nous allons s'interesser au contrôle qui transfère l'état y_0 à un certain autre état y_1 à un certain temps $t_1 > t_0 \geq 0$.

Résoudre ce problème revient à déterminer un contrôle admissible $u(t)$; $t \in [t_0, t_1]$

(généralement non unique) qui résout l'équation suivante :

$$y_1 = \Phi(t_1,t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,s)\, B(s)\, u(s)\, ds. \qquad (2.3).$$

Notons que: L'ensemble de contrôles admissibles sur un intervalle $J = [t_0, t_1]$ est l'ensemble

des contrôles tels que la trajectoire associée est bien définie sur $J = [t_0, t_1]$.

Dans ce cours , nous allons prendre $u \in L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$.

Définition 2.1.1:

On dit que le système linéaire (2.1) est contrôlable au temps $t_1 > t_0$ à partir de y_0 si :

$\forall y_1 \in \mathbb{R}^n$; $\exists\ u \in L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$ tel que la solution du système (2.1) satisfait : $y(t_1) = y_1$.

Donc, on cherche à atteindre la cible $y_1$au temps $t_1 > t_0$ à partir de y_0.

Remarque 2.1.1:

Un système de contrôle linéaire est caractérisé par ses éléments structurels, c-est-à-dire.,

par les matrices $A(t)$ et $B(t)$. Alors, on peut parler de contrôlabilité du couple $(A(t), B(t))$.

Ainsi notre but sera de caractériser la propriété de contrôlabilité de (2.1) en terme de $(A(t), B(t))$.

Pour ce faire, nous transformons d'abord (2.3) en une forme générique.

En posant :$\widehat{y_1} = y_1 - \Phi(t_1,t_0)\, y_0$, la contrôlabilité du système (2.1) est équivaut à:

$\forall \widehat{y_1} \in \mathbb{R}^n$; $\exists\ u \in L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$ tel que : $\widehat{y_1} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,s)\, B(s)\, u(s)\, ds$ (2.4).

C'est à dire., à la surjectivité de l'opérateur L défini par :

$$\begin{aligned} L : L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^m) &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ u \longmapsto \quad & L(u) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,s)\, B(s)\, u(s)\, ds. \end{aligned}$$

On introduit, maintenant le critère de caractérisation de la contrôlabilité du système (2.1)

formuler de la manière suivante :

L'opérateur adjoint de l'opérateur L est obtenu comme suit :

Puisque: $L(u) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,s)\, B(s)\, u(s)\, ds,\ \ u \in L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$.

Alors, pour chaque $z \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \langle Lu, z\rangle_{\mathbb{R}^n} &= \left\langle \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,s)\, B(s)\, u(s)\, ds, z \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \Phi(t_1,s)\, B(s)\, u(s), z\rangle_{\mathbb{R}^n}\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle u(s), B^*(s)\, \Phi^*(t_1,s)\, z\rangle_{\mathbb{R}^m}\, ds \\ &= \langle u, L^* z\rangle_{L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

Donc : l'operateur adjoint L^*est défini par :

$$L^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$$

$$z \longrightarrow (L^* z)(s) = B^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)\,z.$$

Utilisant maintenant la composition des opérateurs L et L^*, on obtient que :

$L \circ L^* = LL^*$ est donné sous la forme :

$$LL^* = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, B^*(s)\, \Phi^*(t_1, s)\, ds\ .$$

On obsèrve que $LL^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur linéaire borné .

C'est à dire LL^* est une matrice carrée d'ordre n.

Définition : La matrice LL^* est appelée matrice Grammienne de contrôlabilité pour

le système de contrôle linéaire (2.1) , et est donnée sous la forme :

$$W_c(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, B^*(s)\, \Phi^*(t_1, s)\, ds.$$

On a alors le théorème suivant .

Théorème 2.1.1 :

Le système de contrôle linéaire (2.1) est contrôlable sur l'intervalle $J = [t_0, t_1]$ si et seulement si :

La matrice Grammienne $W_c(t_1, t_0)$ est inversible et que le contrôle qui ramène (transfère)

le système (2.1) de l'état initial y_0 à l'état final y_1 (cible) est donné par :

$\overline{u}(t) = B^*(t)\,\Phi^*(t_1, t)\, W_c^{-1}(t_0, t_1)\,[y_1 - \Phi(t_1, t_0)\, y_0]$.

Démonstration : $\Longleftarrow (C.S)$. Si $W_c(t_1, t_0)$ est supposée inversible, alors le contrôle défini par : $\overline{u}(t) = B^*(t)\,\Phi^*(t_1, t)\, W_c^{-1}(t_0, t_1)\,[y_1 - \Phi(t_1, t_0)\, y_0]$ existe.

On Substitue cette expression dans la solution $y(t) = \Phi(t, t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds$

de l'équation : $y'(t) = A(t)\, y(t) + B(t)\, u(t)$,on obtient :

$$\begin{aligned}
y(t_1) &= \Phi(t_1, t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, \overline{u}(s)\, ds \\
&= \Phi(t_1, t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s) \left[B^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)\, W_c^{-1}(t_0, t_1)\,[y_1 - \Phi(t_1, t_0)\, y_0]\right] ds \\
&= \Phi(t_1, t_0)\, y_0 + \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, B^*(s)\, \Phi^*(t_1, s)\, ds\right] W_c^{-1}(t_0, t_1)\,[y_1 - \Phi(t_1, t_0)\, y_0]. \\
&= \Phi(t_1, t_0)\, y_0 + W_c(t_1, t_0)\, W_c^{-1}(t_0, t_1)\,[y_1 - \Phi(t_1, t_0)\, y_0] \\
&= \Phi(t_1, t_0)\, y_0 + [y_1 - \Phi(t_1, t_0)\, y_0] = y_1.
\end{aligned}$$

Donc: $y(t_1) = y_1$

C'est à dire que le contrôle $\overline{u}(t) = B^*(t)\,\Phi^*(t_1, t)\, W_c^{-1}(t_0, t_1)\,[y_1 - \Phi(t_1, t_0)\, y_0]$

conduit le système (2.1) à partir de l'état initial y_0 au temps t_0 à t'état final y_1 (cible)

au temps final t_1.

$\Longrightarrow (C.N)$. Nous avons besoin de montrer que si le systéme (2.1) est contrôlable,

alors la matrice Grammienne de contrôlabilité $W_c(t_1, t_0)$ est inversible.

Premièrement, on peut vérifie facilement que la matrice $W_c(t_1, t_0)$ est symétrique :

En effet, on a : (ici T désigne la transposition des vecteurs ou des matrices)

$$\begin{aligned}
W_c^T(t_1, t_0) &= \left(\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, ds\right)^T. \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\right)^T \left(\Phi(t_1, s)\, B(s)\right)^T ds \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, ds = W_c(t_1, t_0);
\end{aligned}$$

car $(AB)^T = B^T A^T$ et $\left(A^T\right)^T = A$; A, B des matrices.

Notons maintenant que si $x \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$ est un vecteur colonne arbitraire,
on peut construire la forme quadratique suivante :

$$x^T W_c(t_1, t_0)\, x = x^T \left(\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, ds \right) x$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} x^T \Phi(t_1, s)\, B(s)\, B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, x ds$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, x \right)^T \left(B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, x \right) ds$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\| B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, x \right\|^2 ds \geq 0.$$

Donc la matrcice $W_c(t_1, t_0)$ est semi-définie positive.
Supposons qu'il existe un certain vecteur colonne $z \neq 0$ tel que $z^T W_c(t_1, t_0)\, z = 0$.
On obtient alors que $\int_{t_0}^{t_1} \left\| B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, z \right\|^2 ds = 0$ qui implique en terme (utilisant les propriétés de la norme) que $B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, z = 0; s \in [t_0, t_1]$.
Cependant par hypothèse, le système (2.1) est contrôlable.
Donc, il existe un contrôle $u(.)$ tel que $y(t_1) = 0$ si $y(t_0) = z$.
c'est à dire que : $0 = -\Phi(t_1, t_0)\, z + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, u(s)\, ds$.
Donc : $z = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, s)\, B(s)\, u(s)\, ds$. Pr conséquent :
$\|z\|^2 = z^T z. = -\int_{t_0}^{t_1} z^T \Phi(t_0, s)\, B(s)\, u(s)\, ds = -\int_{t_0}^{t_1} \left[B^T(s)\, \Phi^T(t_1, s)\, z \right]^T u(s)\, ds = 0$.
C'est à dirs que $z = 0$.
Ce qui contredit l'hypothèse que $z \neq 0$. Donc $W_c(t_1, t_0)$ est définie positive,
et par conséquent la matrice $W_c(t_1, t_0)$ est inversible.

Corollaire 2.1.1 : Le système de contrôle linéaire (2.1) est contrôlable sur l'intervalle $J = [t_0, t_1]$ si et seulement si : Rang$(W_c(t_1, t_0)) = n$.

Propriétés de la matrice Grammienne de contrôlabilité :
1)- $W_c(t_0, t_1) = W_c^T(t_0, t_1)$ ($W_c(t_0, t_1)$ est symétrique)
2)- $W_c(t_0, t_1)$ est semi-définie positive pour $t_1 \geq t_0$.
3) $W_c(t_0, t_1)$ satisfait l'équation différentielle matricielle linéaire (Noter qu'on fixe t_0 et on varie t_1) :

$$\frac{d}{dt} W_c(t_0, t_1) = A(t)\, W_c(t, t_1) + W_c(t, t_1)\, A^T(t) + B(t)\, B^T(t) \quad ; \quad W_c(t_0, t_1) = 0.$$

4)- $W_c(t_0, t_1)$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$W_c(t_0, t_1) = \Phi(t_1, t)\, W_c(t_0, t)\, \Phi^T(t_1, t) + W_c(t, t_1).$$

Remarque 2.1.2 :
Noter qu'on peut aussi définir la matrice Grammienne sous la forme :

$$\widetilde{W}_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, s)\, B(s)\, B^T(s)\, \Phi^T(t_0, s)\, ds.$$

Ces deux formes de la matrice Grammienne sont congrueles, c'est à dire qu'elles
sont liées par la transformation suivante: $\widetilde{W}_c(t_0, t_1) = \Phi(t_0, t_1)\, W_c(t_0, t_1)\, \Phi^T(t_0, t_1)$.

Proposition 2.1.1 :
Si $u(.)$ est un autre contrôle qui ramène (transfère) $y(t_0) = y_0$ à $y(t_1) = y_1$.
Alors : $\int_{t_0}^{t_1} \|\overline{u}(s)\|^2 ds \leq \int_{t_0}^{t_1} \|u(s)\|^2 ds$.

Démonstration : Puisque les deux contrôles $\overline{u}$ et u satisfaient :
$y_1 = \Phi(t_1, t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, \overline{u}(s)\, ds$.
$y_1 = \Phi(t_1, t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, u(s)\, ds$.
On obtient, aprés soustraction de ces deux expressions que :

$0=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,s)\,B(s)\,[u(s)-\overline{u}(s)]\,ds.$

Multipliant à gauche cette équation par $[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]^T\left[W_c^{-1}(t_0,t_1)\right]^T,$
alors , on obtient que :

$0=[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]^T\left[W_c^{-1}(t_0,t_1)\right]^T\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,s)\,B(s)\,[u(s)-\overline{u}(s)]\,ds$
$=\int_{t_0}^{t_1}[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]^T\left[W_c^{-1}(t_0,t_1)\right]^T\Phi(t_1,s)\,B(s)\,[u(s)-\overline{u}(s)]\,ds$
$=\int_{t_0}^{t_1}\left(B^T(s)\,\Phi^T(t_1,s)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\right)^T[u(s)-\overline{u}(s)]\,ds$
$=\int_{t_0}^{t_1}\overline{u}^T(s)\,[u(s)-\overline{u}(s)]\,ds$,car: $\overline{u}(s)=B^T(s)\,\Phi^T(t_1,s)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]$
d'aprés le théorème(2.1.1) .

On a donc : $\int_{t_0}^{t_1}\overline{u}^T(s)\,[u(s)-\overline{u}(s)]\,ds=0\Longrightarrow\int_{t_0}^{t_1}\|\overline{u}(s)\|^2\,ds=\int_{t_0}^{t_1}\overline{u}(s)\,u(s)\,ds.$

Par conséquent : $0<\int_{t_0}^{t_1}\|\overline{u}(s)-u(s)\|^2\,ds=\int_{t_0}^{t_1}[\overline{u}(s)-u(s)]^T[\overline{u}(s)-u(s)]$
$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\|\overline{u}(s)\|^2-\|u(s)\|^2\right]ds$

et donc $\int_{t_0}^{t_1}\|u(s)\|^2\,ds=\int_{t_0}^{t_1}\left[\|\overline{u}(s)\|^2+\|\overline{u}(s)-u(s)\|^2\right]ds\geq\int_{t_0}^{t_1}\|\overline{u}(s)\|^2\,ds.$

Note :

Ce résultat peut être interprité comme montre le calcul :
$\overline{u}(t)=B^*(t)\,\Phi^*(t_1,t)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]$ est optimal au sens de la minimisation

de la fonctionelle : $J(u)=\int_{t_0}^{t_1}\|u(s)\|^2\,ds$, et on a la valeure minimale est donnée par :

$$\int_{t_0}^{t_1}\|\overline{u}(s)\|^2\,ds=\left\langle W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\,,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\right\rangle.$$

En effet, on a :

$\int_{t_0}^{t_1}\|\overline{u}(s)\|^2\,ds=\int_{t_0}^{t_1}\left\|B^T(s)\,\Phi^T(t_1,s)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\right\|^2ds$
$=\int_{t_0}^{t_1}\left\langle B^T(s)\,\Phi^T(t_1,s)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\,,B^T(s)\,\Phi^T(t_1,s)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\right\rangle ds$
$=\int_{t_0}^{t_1}\left\langle\Phi(t_1,s)\,B(s)\,B^T(s)\,\Phi^T(t_1,s)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\,,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\right\rangle ds$
$=\left(\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,s)\,B(s)\,B^T(s)\,\Phi^T(t_1,s)\,ds\right)W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\,,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]$
$=\left\langle W_c(t_0,t_1)\,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\,,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\right\rangle$
$=\left\langle[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\,,W_c^{-1}(t_0,t_1)\,[y_1-\Phi(t_1,t_0)\,y_0]\right\rangle.$

Exemple : On considère le système de contrôle linéaire :

$$y\prime(t)=A(t)\,y(t)+B(t)\,u(t)$$

avec $A(t)=\begin{pmatrix}-1&e^{2t}\\0&-1\end{pmatrix}$, et $B(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}.$

La résolvante est donnée en fonction de la matrice fondamentale du système $M(t)$

où : $M(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}&\frac{1}{2}e^{t}\\0&e^{-t}\end{pmatrix}.$

c'esr à dire que $\Phi(t,t_0)=M(t)\,M^{-1}(t_0)=\begin{pmatrix}e^{-(t-t_0)}&\frac{1}{2}\left(e^{t+t_0}-e^{-t+3t_0}\right)\\0&e^{-(t-t_0)}\end{pmatrix}$

Donc $\Phi(t,s)\,B(s)=\begin{pmatrix}e^{t}\\0\end{pmatrix}$

Alors $W_c(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\begin{pmatrix}e^{-t_1}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t_1}&0\end{pmatrix}ds=\int_{t_0}^{t_1}\begin{pmatrix}e^{-2t_1}&0\\0&0\end{pmatrix}ds$

$$= \begin{pmatrix} (t_1 - t_0)\, e^{-2t_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice n'est pas inversible, alors le système donné est incontrôlable.

Contrôlabilité des systèmes linéaires à coefficients constants :

On considère le système de contrôle linéaire autonome :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ \forall t \in [0, t_1] \\ y(0) = y_0 \ , y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (S)$$

où : $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$; $t_0 = 0$

Si $u \in L^2([0, t_1]; \mathbb{R}^m)$, alors le système (S) admet une unique solution absolument continue

$y : [0, t_1] \longmapsto \mathbb{R}^n$ (c-à-d., $y \in AC([0, t_1]; \mathbb{R}^n)$) donnée par : $y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\, ds, \forall t \in [0, t_1]$.

Cette solution est obtenue par la méthode de variation de la constante.

La matrice résolvante $\Phi(t, 0) = e^{tA}$.

Définition 2.1.2 : (contrôlabilité). On dit que le système linéaire autonome (S) est contrôlable

en temps $t_1 > 0$ à partir de y_0 si : $\forall y_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^2([0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ tel que : $y(t_1) = y_1$.

On cherche donc à attiendre la cible y_1 au temps t_1 à partir de y_0.

On posons : $y_2 = y_1 - e^{t_1 A}y_0$, la contrôlabilité en temps t_1 à partir de y_0 est équivaut à :

$\forall y_2 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^2([0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ tel que : $y_2 = \int_0^{t_1} e^{(t_1-s)A}Bu(s)\, ds$.

C'est à dire., à la surjectivité de l'application:

$$L : L^2([0, t_1]; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$u \longrightarrow Lu = \int_0^{t_1} e^{(t_1-s)A}Bu(s)\, ds.$$

1)- La matrice Grammienne de contrôlabilité est donnée par :

$$W_c(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{(t_1-s)A}BB^T e^{(t_1-s)A^T}u(s)\, ds$$

2)- Le contrôle $\overline{u}(t)$ qui ramène le système linéaire autonome (S) de l'état initial $y(0) = y_0$

à l'état final (cible) $y_1 = y(t_1)$ est donné par :$\overline{u}(t) = B^T e^{A^T(t_1-s)}W_c^{-1}(0, t_1)\left[y_1 - e^{t_1 A}y_0\right]$.

3)- La valeur minimale de la fonctionnelle est donnée par :

$$\int_0^{t_1} \|\overline{u}(s)\|^2\, ds = \left\langle W_c^{-1}(0, t_1)\left[y_1 - e^{t_1 A}y_0\right], \left[y_1 - e^{t_1 A}y_0\right]\right\rangle.$$

Le résultat remarquable, dû à Kalman, permet de caractériser la surjictivité de

l'application L définie ci dessus à partir d'une condition purement algèbrique ne faisant

intervenir que les matrices A et B .

On introduit la matrice de Kalman $W_c \in M_{n\times nm}(\mathbb{R})$ telle que :

$$W_c = \left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right].$$

Théorème 2.1.2 : (critère de Kalman)

Le système linéaire autonome : $y'_u(t) = Ay_u(t) + Bu(t)\, ; y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$

est contrôlable pour tout $t_1 > 0$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $Rang(W_c) = n$.

Ce qui signifie que la matrice C est de rang maximal.

Démonstration :

1) Supposons d'abord que $Rang\left(W_c\right) < n$. Il existe donc un vecteur $\Psi \in \mathbb{R}^n, \Psi \neq 0$

tel que $\Psi^T C = 0$,c'est à dire que $\Psi^T \left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right] = 0$

ce qui implique que $\Psi^T B = \Psi^T AB = ... = \Psi^T A^{n-1}B = 0$,

où Ψ^T désigne le transposé de Ψ.

D'aprés le théorème d'Hamilton Cayley, il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ tel que :

$A^n = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A + ... + \alpha_{n-1}A^{n-1}$. où I_n désigne la matrice identité.

On en déduit par récurrence que $\Psi^T A^k B = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Donc $\Psi^T e^{tA}B = 0$, pour tout $t \in [0, t_1]$. Par conséquent $\Psi^T Lu = 0$ pour tout u,

c'est à dire l'application L ne peut pas être surjective.

2) Réciproquement, si l'application L n'est pas surjective, il existe un vecteur $\Psi \in \mathbb{R}^n, \Psi \neq 0$

tel que $\Psi^T \left(\int_0^{t_1} e^{(t_1-s)A}Bu\left(s\right)ds\right) = 0, \forall u \in L^2\left([0, t_1]; \mathbb{R}^m\right)$.

En choisissons le contrôle $u\left(t\right) = B^T e^{(t_1-s)A^T}\Psi$ qui est bien dans $L^2\left([0, t_1]; \mathbb{R}^m\right)$,

on en déduit que $\Psi^T e^{tA}B = 0, \forall \in [0, t_1]$. En $t = 0$, il vient que $\Psi^T B = 0$,

puis en dérivant par rapport à t, il vient $\Psi^T AB = 0$ et ainsi de suite; d'ou :

$\Psi^T B = \Psi^T AB = \Psi^T A^2 B = ... = \Psi^T A^{n-1}B = 0$

La matrice $W_c = \left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right]$ ne peut donc être de rang maximal.

Remarque 2.1.3 :

d'aprés la relation : $e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$,et avec le théorème d'Hamilton Cayley

$y_2 = \int_0^{t_1} e^{(t_1-s)A}Bu\left(s\right)ds$ peut être écrit sous la forme :

$y_2 = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^k}{k!}u\left(s\right)ds = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} r_k\left(s\right)ds = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k B$,

où: $\alpha_k = \int_0^{t_1} r_k\left(s\right)ds = \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^k}{k!}u\left(s\right)ds$; $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

$$\Longrightarrow y_2 = \left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right] . \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Le système est contrôlable si et seulement si le système : $y = W_c\alpha$ peut être résolu

quel que soit y_1 c'est à dire si $rangW_c = n$

Exemple 1 : Soit le système de contrôle linéaire d'un oscillateur harmonique :

$$y\prime\left(t\right) = Ay\left(t\right) + Bu\left(t\right).$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supposons qu'on cherche un contrôle qui transfère le point $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

au point final $y_1 = 0$ au temps $t_1 = 2\pi$,

avec la minimisation de la fonctionelle (énergie) $J(u) = \int_0^{2\pi} u^2(t)\,dt$.

Preuve :On applique le théorème de la matrice Grammienne de contrôlabilité, on calcul tout d'abord e^{tA}, on obtient : $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

On applique le théorème de la matrice Grammienne de contrôlabilité, on trouve que :

$$W_c(0,2\pi) = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{(2\pi-s)A^T} ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 s & -\sin s \cos s \\ -\sin s \cos s & \cos^2 s \end{pmatrix} ds = \pi I$$

Donc $W_c^{-1}(0,2\pi)(y_1 - \Phi(2\pi,0)\,y_0) = \left(-\frac{1}{\pi}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

par conséquent $u(t) = -\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) & -\sin(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) & \cos(2\pi - t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\pi} \sin t$ est le contrôle désiré.

Exemple 2 :(contrôle d'un tram) .

Létat du tram (supposé de masse unité) est décrit par sa position et sa vitesse le long

d'un axe unidirectionnel et on contrôle l'accélération du tram sous la forme :

$$y''(t) = u(t)\,; \forall t \in [0, t_1]\,.$$

Cette équation différentielle du second ordre en temps se récrit comme un système

d'ordre un en temps .

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)\,; Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice de Kalman $W_c \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est $W_c = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Rang(W_c) = 2$.

Le tram est donc contrôlable en tout temps t_1 à partir de tout $Y_0 = (y_0, v_0)^T$ (positionet vitesse initiales) :

Cela signifie que quel que soit $Y_1 = (y_1, v_1)^T$ position et vitesse cibles en t_1,il existe un contrôle

u $\left(\text{ici en prend } u \in L^2([0,t_1]\,;\mathbb{R})\right)$ amenant le tram de Y_0 en Y_1 en temps t_1.

Remarque 2.1.4 :

Un critère de contrôlabilité équivalent au critère de Kalman quoi que moins facile à manipuler

est le critère de PBH (Popov-Belevitch-Hautus) donné dans le théorème suivant:

Théorème 2.1.3 : La paire (A, B) est contrôlable si et seulement si la matrice complexe $n \times (n+m)$

$\left[\begin{array}{cc} \lambda I - A & B \end{array}\right]$ est de rang égal à n,pour tout valeur propre λ de A.

Systèmes de contrôle linéaires discrets :

On considère le système de contrôle linéaire discret :

$y(k+1) = A(k)\,y(k) + B(k)\,u(k)\,, k \geq k_0; k, k_0 \in \mathbb{Z} \qquad (1)$

Où $A(k) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\,, B(k) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ et le contrôle $u(k) \in \mathbb{R}^m$ sont définies pour $k \geq k_0$.

Rappelons premièrement que l'état $y(k)$ solution du système (1)

est donnée pour tout $k > k_0$ par :

$$y(k) = \Phi(k, k_0)\,y(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)\,B(j)\,u(j)\,.$$

(2)

où la résolvante $\Phi(k, k_0) = A(k-1)\,A(k-2) \times .... \times A(k_0)$ pour $k > k_0$ et $\Phi(k_0, k_0) = I$.

Dans le casdes systèmes linéaires discret autonomes:

$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k)\,, k \geq k_0; k, k_0 \in \mathbb{Z} \qquad (3)$

où $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\,, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})\,, u(k) \in \mathbb{R}^m$.

L'état $y(k)$ solutiondu système (2) est donné par :

$y(k) = A^{(k-k_0)}y_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-(j+1)}Bu(j)\,, k \geq k_0. \qquad (4)$

Soit y_0 l'état initial au temps k_0. Pour qu'un état à un moment donné $k_1 > k_0$ prend la valeur y_1,il doit exister un contrôle u qui satisfait :

$y_1 = \Phi(k_1, k_0)\,y(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k_1-1} \Phi(k_1, j+1)\,B(j)\,u(j)\,. \quad (5)$

Systèmes linéaires discrets autonomes :

Pour le système de contrôle linéaire discret autonome donné dans (2),

on prend $k_0 = 0$,et $k_1 = K$. Rappelons que $\Phi(k, 0) = A^k$, donc on écret (5) sous la forme :

$y_1 = A^K y_0 + \sum_{j=0}^{K-1} A^{K-(j+1)}Bu(j)\,.$

Quand $K > 0$; $y_1 = A^K y_0 + C_K U_K. \qquad (6)$

où $W_{c,K} = \left[B, AB, A^2B, ..., A^{K-1}B\right]$, et $U_K = \left(u^T(K-1)\,, u^T(K-2)\,, ..., u^T(0)\right)^T$.

La matrice Grammienne de contrôlabilité est donnée alors sous la forme :

$W_c(0, K) = \sum_{j=0}^{K-1} A^{K-(j+1)}BB^T\left(A^T\right)^{K-(j+1)}. \qquad (7)\,.$

Exemple : Considérons le système de contrôle linéaire discret :

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k)\,.$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de Kalman $W_c = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Rang(W_c) = 2$.

Le système donné est contrôlable, c'est à dire , il existe une suite de contrôles qui transférera l'état du système du chaque état $y(0) = y_0$ à chaque état $y(n) = y_1$

(en n étapes, ici $n = 2 = Rang(W_c)$) donné par la relation (6) ,c'est à dire:

$$y_1 = A^2y_0 + W_2U_2 \Longrightarrow U_2 = C^{-1}\left(y_1 - A^2y_0\right) \Longrightarrow U_2 = \begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(y_1 - y_0)\,.$$

Voici maintenant les définitions de différentes type de contrôlabilité et quelques propriétés de leurs équivalences.

Définition 2.1.3 (Contrôlabilité exacte) :

Le système de contrôle linéaire (2.1) est exactement contrôlable sur l'intervalle $J = [t_0, t_1]$

si et seulement si : $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall y_1 \in \mathbb{R}^n; \exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$ tel que $y(t_1) = y_1$.

Cette définition est équivalente à la proposition suivante :

Proposition 2.1.2 :

Le système (2.1) est exactement contrôlable sur $J = [t_0, t_1]$ si et seulement si :

$$\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^n.$$

Démonstration :

Supposons que le système (2.1) est exactement contrôlable, alors selon la définition(2.1.2) on a :

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall y_1 \in \mathbb{R}^n; \exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m) \text{ tel que } y(t_1) = y_1.$$

c'est- dire ., $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall y_1 \in \mathbb{R}^n; \exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$ tel que $y_1 = \Phi(t_1, t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s)\, ds.$

Pour $y_0 = 0$, on a :$\forall y_1 \in \mathbb{R}^n; \exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$ tel que $Lu = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s)\, ds.$

Alors , $\operatorname{Im} L \supset \mathbb{R}^n$. et comme $\operatorname{Im} L \subset \mathbb{R}^n$, nos avons $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^n$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^n$,alors on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m) \text{ tel que } y = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s)\, ds$$

et par hypothèse, on a : $\exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$ tel que : $y = Lu(.)$.

Soient y_0, y_1 quelconques dans $\mathbb{R}^n$, et si on pose $y = y_1 - \Phi(t_1, t_0) y_0$.

On trouve que : $\exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$ tel que $y_1 - \Phi(t_1, t_0) y_0 = Lu(.)$

c'est à dire., $\exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$ tel que $y_1 = \Phi(t_1, t_0) y_0 + Lu(.)$. On déduit que :

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall y_1 \in \mathbb{R}^n; \exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m) \text{ tel que } \quad y_1 = y(t_1)\ .$$

D'où la contrôlabilité exacte du système (2.1).

Théorème 2.1.4 :

Le système (2.1) est exactement contrôlable sur $J = [t_0, t_1]$ si et seulement si :

$$\exists c_0 > 0 \text{ tel que : } \int_{t_0}^{t_1} \|B^*(s) \Phi^*(t_1, s) z\|_{\mathbb{R}^m}^2 ds \geq c_0 \|z\|_{\mathbb{R}^n}^2 ; \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration : D'aprés la proposition (2.1), le système (2.1) est exactement contrôlable

si et seulement si l'operateur L est surjectif si et seulement si son opérateur adjoint L^* est injectif,

d'aprés le lemme suivant:

Lemme 2.1.1 : L'opérateur L^* est injectif si et seulement si :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \|L^* z\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} \geq \delta \|z\|_{\mathbb{R}^n} ; \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Donc, on obtient que : $\exists \delta > 0$ tel que $\int_{t_0}^{t_1} \|B^*(s) \Phi^*(t_1, s) z\|_{\mathbb{R}^m}^2 ds \geq c_0 \|z\|_{\mathbb{R}^n}^2 ; \forall z \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.4 (Contrôlabilité à zéro (ou contrôlabilité nulle)) :

Le système (2.1) est contrôlable à zéro sur l'intérvalle $J = [t_0, t_1]$ si et seulement si :

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n \ ; \exists\, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m) \text{ tel que } \quad y(t_1) = 0.$$

Proposition 2.1.2 : La contrôlabilité à zéro (nulle) est équivalente à la contrôlabilité exacte.

Démonstration : Il est évident que la contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité à zéro .

On montre maintenant que la contrôlabilité à zéro implique la contrôlabilité exacte .

Supposone que le système est contrôlable à zéro et soit $z_0 = y_0 - \Phi(t_0, t_1) y_1$.

Donc il existe un contrôle u tel que : $0 = \Phi(t_1, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds$

$= \Phi(t_1, t_0) [y_0 - \Phi(t_0, t_1) y_1] + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds$

$= \Phi(t_1, t_0) y_0 - y_1 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds.$

Donc $y_1 = \Phi(t_1, t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds = y(t_1)$.

Ce qui implique que u transfère y_0 à y_1 durant $[t_0, t_1]$.

Les éléments de l'espace d'états $Y = \mathbb{R}^n$ ne sont pas tous contrôlables, alors on est conduit à définir un autre type de contrôlabilité.

Définition 2.1.5 (Contrôlabilité approximative (ou approchée)) :

Le système (2.1) est approximativement contrôlable sur $J = [t_0, t_1]$ si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0;\ \forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall y_1 \in \mathbb{R}^n; \exists\ u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$ tel que $\|y(t_1) - y_1\| \leq \varepsilon$.

Cette définition est équivalente à la proposition suivante.

Proposition 2.1.3 : Le système (2.1) est approximativement sur $J = [t_0, t_1]$ si et seulement si :

$\overline{\operatorname{Im} L} = Y = \mathbb{R}^n$ dans notre cas.

Où: $\overline{\operatorname{Im} L} = Y = \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists y_\epsilon \in \operatorname{Im} L$ tel que $\|y - y_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Démonstration :

Supposons que le système (2.1) est approximativement contrôlable, alors selon la définition(2.1.5) ,

$\forall \varepsilon > 0;\ \forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall y_1 \in \mathbb{R}^n; \exists\ u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$ tel que $\|y(t_1) - y_1\| \leq \varepsilon$.

ce qui implique que : $\left\| \ y_1 - \Phi(t_1, t_0) y_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds \right\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$

Si on pose: $y_1 - \Phi(t_1, t_0) y_0 = y$, on obtient que :$\left\| \ y - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds \right\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

or $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y_\epsilon$ tel que $\|y - y_\varepsilon\| < \varepsilon$ avec $y_\varepsilon = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds \in L$.

On déduit alors que $\overline{\operatorname{Im} L} = \mathbb{R}^n$.

Réciproquement, supposons que $\overline{\operatorname{Im} L} = \mathbb{R}^n$ est vérifie .

Soient y_0, y_1 quelconques dans $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ quelconque et si on prend : $y = y_1 - \Phi(t_1, t_0) y_0$

or $y_\varepsilon \in L$, alors $y_\varepsilon = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds$.

Par suite $\|y - y_\varepsilon\| = \left\| \ y_1 - \Phi(t_1, t_0) y_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) B(s) u(s) ds \right\|$

Ceci implique que $\|y_1 - y(t_1)\| \leq \varepsilon$.

Donc, on déduit que le système (2.1) est approximativement contrôlable.

Proposition 2.1.4 : Le système (2.1) est approximativement contrôlable t_1 si et seulement si :

$$KerL^* = \{0\}.$$

Remarque 2.1.5 : Le théorème précident est équivalent à : $\cap_{0 \le t \le t_1} KerB^*(s)\,\Phi^*(t_1, s) = (\operatorname{Im} L)^{\perp}$.

car $\overline{\operatorname{Im} L} = \mathbb{R}^n \iff (\operatorname{Im} L)^{\perp} = \{0\}$.

où $\overline{\operatorname{Im} L} = \mathbb{R}^n \iff \forall y \in \operatorname{Im} L, \langle y, x^* \rangle = 0$, pour $x^* \neq 0$.

Démonstration : Supposons que le système (2.1) est approximativement contrôlable, alors

d'aprés la proposition (2.1.4), on a : $\overline{\operatorname{Im} L} = \mathbb{R}^n$.

Montrer $KerL^* = \{0\}$ revient à montrer que $\cap_{0 \le t \le t_1} KerB^*(s)\,\Phi^*(t_1, s) = (\operatorname{Im} L)^{\perp}$.

Soit $y^* \in (\operatorname{Im} L)^{\perp}$, alors $\langle y, y^* \rangle = 0, \forall y \in \operatorname{Im} L$. Ce qui implique :

$\left\langle \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, u(s)\, ds, y^* \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle u(s), B^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)\, y^* \rangle\, ds = 0, u \in L^2(J; \mathbb{R}^m)$.

Si on pose $u(t) = B^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)\, y^*$, l'équation $\int_{t_0}^{t_1} \langle u(s), B^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)\, y^* \rangle\, ds = 0$ devient :

$\|B^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)\, y^*\|_{L^2(J;\mathbb{R}^m)} = 0$ presque partout $s \in [t_0, t_1]$.

Vu que $\Phi(t_1, s)$ est continue, alors $B^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)\, y^* = 0$ sur $[t_0, t_1]$.

Ce qui implique que $y^* \in \cap_{0 \le t \le t_1} KerB^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)$.

Par conséquent $\cap_{0 \le t \le t_1} KerB^*(s)\,\Phi^*(t_1, s) = (\operatorname{Im} L)^{\perp}$.

Réciproquement . Supposons que $\cap_{0 \le t \le t_1} KerB^*(s)\,\Phi^*(t_1, s) = \{0\}$

Soit $y \in \operatorname{Im} L$, alors $y = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, u(s)\, ds$. Ceci est équivaut à:

$\langle y, y^* \rangle = \left\langle \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, B(s)\, u(s)\, ds, y^* \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle u(s), B^*(s)\,\Phi^*(t_1, s)\, y^* \rangle\, ds = 0$.

Alors $y^* \in (\operatorname{Im} L)^{\perp}$. Donc $(\operatorname{Im} L)^{\perp} = \{0\}$.

Ce qui revient à dire que $\overline{\operatorname{Im} L} = \mathbb{R}^n$,

d'où le système est approximativement contrôlable.

2.2 Observabilité des systèmes linéaires :

Le problème d'observabilité consiste à la capacité de déterminer l'état du système à partir

de la connaissance de l'entrée $u(t)$ (le contrôle) et la sortie $z(t)$ correspondante dans le temps.

Puisque, il est souvent difficile voir impossible de mesurer l'état d'un système directement

(par exemple , températures et pressions internes dans un moteur à combistion interne),

il est extrêmement souhaitable de déterminer ces états en observant les entrées et les sorties

du système sur un intérvalle de temps fini.Ceci conduit aux concepts d'observabilité de l'état.

On considère un système de contrôle linéaire augmenté par une fonction d'observation :

$$y(t) = A(t)\, y(t) + B(t)\, u(t) \qquad (2.2)$$
$$z(t) = C(t)\, y(t) + D(t)\, u(t) \qquad (2.3)$$

Où $A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), B(t) \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), C(t) \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), D(t) \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$.

Rappelons que pour chaque état initial donné $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour chaque contrôle admissible

(entrée) $u(t), t \in [t_0, t_1]$ (un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$), l'unique solution de l'équation d'état (2.2)

est donnée par : $y(t) = \Phi(t, t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds, \forall t \in [t_0, t_1]$. (2.4)

où $\Phi(t, t_0)$ désigne la matrice résolvante d'état du système homogène :

$$y(t) = A(t)\, y(t),\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.5)$$

En substituant (2.4) dans (2.3), on obtient que la réponse du système $z(t)$ (la sortie)

est donnée par : $z(t) = C(t)\, \Phi(t, t_0)\, y_0 + C(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds + D(t)\, u(t)$ (2.6).

et comme $u(t)$ et $z(t)$ sont connus, on pose : $\widetilde{z}(t) = z(t) - C(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds - D(t)\, u(t)$

Donc, on peut écrire : $\widetilde{z}(t) = C(t)\, \Phi(t, t_0)\, y_0$.

Le problème est alors de déterminer l'état initial y_0 à partir de la donnée $\widetilde{z}(t)$,

c'est à dire à partir seulement de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $z(t)$.

Remarque 2.2.1 : Il est clair que l'observabilité du système entrée-sortie $(2.2) - (2.3)$

dépend seulement du couple de matrices $(A(t), C(t))$.

Définition 2.2.1 : Le systéme de contrôle linéaire observé :

$$y(t) = A(t)\, y(t) + B(t)\, u(t).$$
$$z(t) = C(t)\, y(t) + D(t)\, u(t).$$

est dit obsevable, sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ s'il est possible de déterminer uniquement

l'état initial $y_0 = y(t_0)$ à partir de la connaissance de la sortie $z(t)$ sur $[t_0, t_1]$.

Létat du système est complètement connu si l'état initial y_0 est connu.

Si on définit l'opérateur $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^p)$ par : $Ly_0 = C(t)\, \Phi(t, t_0)\, y_0$.

Alors $\widetilde{z}(t) = (Ly_0)(t), \forall t \in [t_0, t_1]$.

Pour introduire le critère d'observabilité du système entrée-sortie $(2.2) - (2.3)$,

nous allons tout d'abord définir l'opérateur adjoine de l'opérateur L.

Puisque : $Ly_0 = C(t)\, \Phi(t, t_0)\, y_0$. alors, on a :

$\forall v \in L^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^p)$, on a :

$$\begin{aligned}\langle (Ly_0)(.), v(.)\rangle_{L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^p)} &= \langle C(t)\, \Phi(t, t_0)\, y_0, v\rangle_{L^2([t_0,t_1];\mathbb{R}^p)} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle C(t)\, \Phi(t, t_0)\, y_0, v(t)\rangle\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle y_0, \Phi^*(t, t_0)\, C^*(t)\, v(t)\rangle\, dt \\ &= \left\langle y_0, \int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t, t_0)\, C^*(t)\, v(t)\, dt \right\rangle_{\mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

$= \langle y_0, L^* \upsilon (.) \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $L^* \upsilon (t) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^* (t, t_0) C^* (t) \upsilon (t) \, dt$.

Par la composition des opérateurs L et L^* en la forme L^*L , on obtient que :

$L^*L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est défini par : $L^*L = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^* (t, t_0) C^* (t) C (t) \Phi (t, t_0) \, dt$

Définition 2.2.2 : La matrice carrée $W_o (t_0, t_1)$ d'ordre n définie par:

$$W_o (t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^* (t, t_0) C^* (t) C (t) \Phi (t, t_0) \, dt \in M_{n \times n} (\mathbb{R})$$

est appellé matrice Grammienne d'observabilité.

Alors, on a le théorème suivant .

Théorème 2.2.1 : Le système de contrôle linéaire observé $(2.2) - (2.3)$ est observable

si et seulement si la matrice symétrique $W_o (t_0, t_1)$, dite matrice Grammienne d'observabilité

est inversible.

Démonstration : $\Longleftarrow (c.s)$. Supposons que $u (t) = 0, \forall t \in [t_0, t_1]$,

Alors, d'aprés la relation (2.6) , on a : $z (t) = C (t) \Phi (t, t_0) y_0$.

Multipliant cette relation à gauche par $\Phi^* (t, t_0) C^* (t)$ et intégrant entre $t_0$et t_1, on obtient:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^* (t, t_0) C^* (t) z (t) \, dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} \Phi^* (t, t_0) C^* (t) C (t) \Phi (t, t_0) \, dt \right) y_0 = W_o (t_0, t_1) y_0.$$

Si $W_o (t_0, t_1)$ est non singulière, alors l'état initial y_0 est donné par :

$y_0 = W_o^{-1} (t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^* (t, t_0) C^* (t) z (t) \, dt$. Donc, le système $(2.2) - (2.3)$ est observable.

$\Longrightarrow (c.n)$. On suppose maintenant que le système de contrôle linéaire observé $(2.2) - (2.3)$

est observable et on montre que $W_o (t_0, t_1)$ est non singulière (inversible)

Premièrement, si $\upsilon^T \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur ligne arbitraire,

Où, T désigne la transposition des vecteurs ou des matrices, alors on a :

$$\upsilon^T W_o (t_0, t_1) \upsilon = \upsilon^T \left(\int_{t_0}^{t_1} \Phi^* (t, t_0) C^* (t) C (t) \Phi (t, t_0) \, dt \right) \upsilon,$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (C (t) \Phi (t, t_0) \upsilon)^T (C (t) \Phi (t, t_0) \upsilon) \, dt \geq 0.$$

Donc $W_o (t_0, t_1)$ est une matrice semi-définie positive.

Supposons maintenant qu'il existe un vecteur colonne $\widetilde{\upsilon} \neq 0$ tel que :$\widetilde{\upsilon}^T W_o (t_0, t_1) \widetilde{\upsilon} = 0$.

Il vient alors de l'inégalité ci-dessous que : $C (t) \Phi (t, t_0) \widetilde{\upsilon} = 0$;pour tout $t \in [t_0, t_1]$.

Ceci implique que lorsque $\widetilde{\upsilon} = y_0$, la sortie est identique à zéro sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.

de sorte que y_0 de peut pas être déterminner dans ce cas à partir de la connaissance de $z (.)$.

Cela contredit l'hypothèse que le système $(2.2) - (2.3)$ est observable.

Donc $W_o (t_0, t_1)$ est définie positive de plus symétrique, donc $W_o (t_0, t_1)$ est inversible.

Définition 2.2.3: Un état y est non observable au temps t_0, si la sortie d'entrée nulle du système est nulle pour chaque $t \geq t_0$., c'est à dire: $C(t)\Phi(t,t_0)y = 0$ pour chaque $t \geq t_0$.

Thèorème 2.2.2 : Un état y est non observable au temps t_0, si et seulement si :

$$y \in Ker(W_o(t_0,t_1)), \text{ pour chaque } t_1 \geq t_0.$$

Démonstration : Si y est non observable, alors $C(t)\Phi(t,t_0)y = 0$ pour chaque $t \geq t_0$.

En multipliant $W_o(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t,t_0)\, dt$ par y , on obtient que :

$W_o(t_0,t_1)y = 0$,pour chaque $t_1 \geq t_0$.

Réciproquement. Supposons que $y \in Ker(W_o(t_0,t_1))$, alors :

$y^T\ W_o(t_0,t_1)y = \int_{t_0}^{t1} \|C(t)\Phi(t,t_0)y\|^2 dt = 0$,pour chaque $t_1 \geq t_0$..

Ceci implique que :$C(t)\Phi(t,t_0)y = 0$,pour chaque $t_1 \geq t_0$, or que l'état y est non observable.

Corollaire 2.2.1 : Le système de contrôle linéaire observé $(2.2) - (2.3)$ est observable au temps t_0,

or la paire des matrices $(A(t), C(t))$ est observable au temps t_0, si et seulement s'il existe $t_1 \geq t_0$,

tel que : $Rang(W_o(t_0,t_1)) = n$.

Si le système est observable, l'état initial y_0 au temps t_0 est donné par :

$y_0 = W_o^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t,t_0) C^*(t) z(t)\, dt.$

Exemple : Soit le système : $y'(t) = A(t)y, \quad z(t) = C(t)y$

.

Où $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $C(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

.

La matrice Grammienne d'observabilité est donnée par :

$W_o(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{2t_0} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} de = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t_1} - e^{-4t_0} \end{pmatrix}.$

Il est clair que le système est non observable, puisque $Rang(W_o(t_0,t_1)) = 1 < 2 = n$.

Observation des systèmes linéaires autonomes :

$$y(t) = Ay(t) + Bu(t) \qquad (2.7)$$

$$z(t) = Cy(t) + Du(t) \qquad (2.8)$$

Où $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), C \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), D \in M_{p\times m}(\mathbb{R}); y(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Pour chaque contrôle admissible $u(t); t \in [0,t_1]$, et pour chaque donné initial $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

l'équation d'état (2.7) admet une unique solution absolument continue $y \in AC([0,t_1];\mathbb{R}^n)$

donnée sous la forme :

$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\, ds$, pour presque tout $t \in [0,t_1]$.

où $\Phi(t,0) = e^{tA}$ est la matrice résolvante d'état du système homogène :

$y(t) = Ay(t); y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$.

En substituant cette expression dans l'équation $(2.8)(,)$, on obtient que :

$z(t) = Ce^{tA}y_0 + C\int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\, ds + Du(t)$.

Si on pose $\widetilde{z}(t) = z(t) - \int_0^t Ce^{(t-s)A} Bu(s)\, ds - Du(t)$.

Donc, on peut écrire : $\widetilde{z}(t) = Ce^{tA} y_0 = \sum_{k=0}^{n-1} CA^k \alpha_k(t) = blocdiag\{\alpha_k I\} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

(d'aprés le théorème de Hamilton-Cayley).

Le problème est alors de déterminer l'état initial y_0 à partir de la donnée $\widetilde{z}(t)$,

C'est à dire à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie.

Définition 2.2.4 : Un état y est non observable si la réponse d'entrée nulle du système

est nulle pour tout $t \geq 0$., c'est à dire que : $Ce^{tA} y_0 = 0$, pour chaque $t \geq 0$.

La matrice Grammienne est donnée dans ce cas sous la forme :

$W_o(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T(t_1-s)} C^T C e^{A(t_1-s)} ds$.

Critère d'observabilité de Kalman :

Théorème 2.2.4 : Le système :

$y' = Ay + Bu,\ z = Cy + Du$

où : $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), C \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), D \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$

est observable si et seulement si la matrice d'observabilité :

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} . \in M_{np\times n}(\mathbb{R}).$$

est de rang n., c'est à dire $Rang(W_o) = n$.

Démonstration : L'observabilité $z(t)$ et ses dérivées par rapport au temps t sont données par :

$z(t) = Ce^{tA} y_0, z'(t) = CAe^{tA} y_0, z''(t) = CA^2 e^{tA} y_0, \ldots\ldots\ldots\ldots, z^{(n-1)}(t) = CA^{(n-1)} e^{tA} y_0$.

Pour $t = 0$, on a $z(0) = Cy_0, z'(0) = CAy_0, z''(0) = CA^2 y_0, \ldots\ldots\ldots\ldots, z^{(n-1)}(0) = CA^{(n-1)} y_0$.

a condition initiale $y_0 = y(0)$ peut être obtenue de l'équation :

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ . \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix} y(0) = \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \\ z''(0) \\ . \\ . \\ . \\ z^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}.$$

Si le système est observable, alors la matrice d'observabilité de Kalman $W_o \in M_{np\times n}(\mathbb{R})$ est de plein rang, donc, il existe une unique solution de $W_o y(0) = \overrightarrow{z}(0)$ donnée par: $y(0) = \left[W_o^T W_o\right]^{-1} W_o^T \overrightarrow{z}(0)$.

Donc le système est observable si et seulement si la condition du rang de Kalman est vérifie.

Exemple :On considère le système : $y' = Ay, \ \ z = Cy$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = [1, 0]$.

On a : $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Ce^{tA} = [1, t]$.

La matrice d'observabilité est donnée par :

$$W_o(0,T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} dt = \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} T & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & \frac{1}{3}T^3 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(W_o(0,T)) = \frac{1}{12}T^4 \neq 0$ pour chaque $T > 0$.

Alors $Rang(W_o(0,T)) = 2 = n$ pour tout $T > 0$, donc le système est observable.

Alternativement, notons que la matrice du critère d'observabilité de Kalman $W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Rang(W_o) = 2 = n$,donc le système est observable.

Remarque2.2.2 : Un critère d'observabilité équivalent au critère de Kalman quoi que moins facile

à manipuler est le critère de PBH (Popov-Belevitch-Hautus) donné par:

Théorème 2.2.3:(test PBH) : La paire (A, C) est observable si et seulement si la matrice $(n+p) \times n$

$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$ est de rang égal à n pour tout valeur propre λ de A.

Observabilité des systèmes linéaires discrets :

On considère le système linéaire discret :

$$y(k+1) = A(k)\, y(k) + B(k)\, u(k), k \geq k_0; k, k_0 \in \mathbb{Z}$$
$$z(k) = C(k)\, y(k) + D(k)\, u(k)$$

Où $A(k) \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), B(k) \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), C(k) \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), D(k) \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$, et le contrôle $u(k) \in \mathbb{R}^m$ sont définies pour chaque $k \geq k_0$.

La sortie $z(k)$ pour $k > k_0$ est donnée par :

$z(k) = C(k)\,\Phi(k,k_0)\, y(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\,\Phi(k, j+1)\, B(j)\, u(j) + D(k)\, u(k)$.

où la matrice résolvante $\Phi(k, k_0)$ est donnée par:

$\Phi(k, k_0) = A(k-1)\, A(k-2) \ldots\ldots\ldots\ldots A(k_0)$ pour $k > k_0$ et $\Phi(k_0, k_0) = Id$.

Dans le cas autonome :

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k)$$
$$z(k) = Cy(k) + Du(k)$$

Où $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), C \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), D \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$.

La matrice résolvante dans ce cas est $\Phi(k, k_0) = A^{(k-k_0)}, k \geq k_0$,

et pour $k_0 = 0$, la sortie est donnée par :

$z(k) = CA^k y(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-(j+1)} Bu(j) + Du(k)$, alors on a .

$\widetilde{z}(k) = CA^k y_0$, pour $k \geq 0$,où $\widetilde{z}(k) = z(k) - \left[\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-(j+1)} Bu(j) + Du(k)\right]$, pour $k > 0$ et $\widetilde{z}(0) = z(0) - Du(0)$ et $y_0 = y(0)$.

Définition 2.2.5 : Un état y est non observable si la sortie d'entrée nulle du système discret autonome est nulle pour tout $k \geq 0;$,
c'est à dire si $CA^k y_0 = 0$ pour chaque $k \geq 0$.
Corollaire 2.2.1 : Le système discret autonome est observable, or la paire des matrices (A, C) est observable si et seulement si :$Rang\,(W_o) = n$,
où $W_o = \begin{pmatrix} C & CA & CA^2 & . & . & . & CA^{n-1} \end{pmatrix}^T$.
Définition 2.2.6 : La matrice Grammienne d'observabilité est une matrice carrée n×n let que:

$$W_o\,(0, K) = \sum_{j=0}^{K-1} \left(A^T\right)^j C^T C A^j.$$

et la matrice du critère d'observabilité de Kalman dans le cas autonome est donnée par:

$$W_{o,K} = \left[C^T, (CA)^T, ..., \left(CA^{n-1}\right)^T\right]^T.$$

Corollaire 2.2.2: Le système linéaire discret autonome est observable, or la paire (A, C) est observable si et seulement si $RangW_o\,(0, K) = n$ pour certains (et par conséquent pour tout) $K \geq n$.
Si le système est observable, alors l'état initial y_0 au temps $k_0 = 0$ est donné par:

$$y_0 = W_o^{-1}\,(0, K)\, W_{o,K}^T\, (Y_{0,K-1} - M_K U_{0,K-1})\,, K \geq n$$

avec : $Y_{0,n-1} = \left[y^T\,(0)\,, y^T\,(1)\,, ..., y^T\,(n-1)\right]^T$.
$U_{0,n-1} = \left[u^T\,(0)\,, u^T\,(1)\,, ..., u^T\,(n-1)\right]^T$.
et M_n est la matrice de type $pn \times mn$, donnée par:

$$M_n = \begin{pmatrix} D & 0 & . & . & . & . & 0 \\ CB & D & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & . & . & . & . & 0 \\ CA^{n-1}B & CA^{n-2} & . & . & . & CB & D \end{pmatrix}.$$

Exemple :On considére le système linéaire discret :

$$y\,(k+1) = Ay\,(k)\,,\; z\,(k) = Cy\,(k)\,.$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.
La matrice Grammienne d'observabilité pour $K = n = 2$ est donnée par :

$$W_o\,(0, 2) = \sum_{j=0}^{1} \left(A^T\right)^j C^T C A^j$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

qui est de plein rang, par conséquent le système est observable.
Notons aussi que $RangW_o\,(0, K) = 2$ pour chaque $K \geq 2$ et que

$$W_o\,(0, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = W_o^T W_o.$$

l'unique vecteur $y\,(0)$ pet être déterminer de $z\,(0)$ et $z\,(1)$:

$$\begin{pmatrix} y_1\,(0) \\ y_2\,(0) \end{pmatrix} = W_o^{-1}\,(0, 2)\, W_{o_K}^T \begin{pmatrix} z\,(0) \\ z\,(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\,(1) - z\,(0) \\ z\,(0) \end{pmatrix}.$$

Dualité contrôlabilité-observabilité:

Considérons les deux systèmes suivants:

$$(i) \quad y'(t) = A(t)\,y(t) + B(t)\,u(t)\,, \quad z(t) = C(t)\,y(t)$$

et

$$(ii) \quad y'(t) = -A^T(t)\,y(t) + C^T(t)\,u(t)\,,\ z(t) = B^T(t)\,y(t) \quad .$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème : (dualité).Le système (i) est contrôlable si et seulement si le système dual (ii) est observable.

Démonstration : On peut voir seulement que: si $\Phi(t,t_0)$ est la matrice résolvante du système (i).

Alors $\Phi^T(t_0,t)$ est la matrice résolvante du système dual (ii).

En effet, la différentiabilité de : $I_n = \Phi(t,t_0)\,\Phi^{-1}(t,t_0)$

donne : $0 = \frac{d}{dt}I_n = \Phi'(t,t_0)\,\Phi^{-1}(t,t_0) + \Phi(t,t_0)\left[\Phi^{-1}(t,t_0)\right]'$

$$= A(t)\,\Phi(t,t_0)\,\Phi^{-1}(t,t_0) + \Phi(t,t_0)\left[\Phi^{-1}(t,t_0)\right]'$$

$$= A(t) + \Phi(t,t_0)\,\Phi'(t_0,t)\,.$$

ce qui implique que :

$$\Phi'(t_0,t) = -\ \Phi(t_0,t)\,A(t)\,, \text{ or } \left(\Phi'(t_0,t)\right)^T = -A^T(t)\left(\Phi(t_0,t)\right)^T.$$

Par conséquent, la matrice de contrôlabilité:

$W_c(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,s)\,B(s)\,B^T(s)\,\Phi^T(t_0,s)\,ds$ associée au système (i)

est identique à la matrice d'observabilité notée $\widehat{W}_o(t_0,t_1)$, associée au système (ii).

Réciproquement, la matrice d'observabilité $W_o(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(s,t_0)\,C^T(s)\,C(s)\,\Phi(s,t_0)\,ds$ associée au système (i) est identique à la matrice de contrôlabilité notée $\widehat{W}_c(t_0,t_1)$

associée au système (ii).

Dans le cas autonome, c'est à dire, si le système (i) et son dual (ii) sont donnés par:

$$(i) \quad y'(t) = Ay(t) + Bu(t)\,, \quad z(t) = Cy(t)$$

et

$$(ii) \quad y'(t) = -A^Ty(t) + C^Tu(t)\,,\ z(t) = B^Ty(t)\,.$$

Alors, on a :

1)-La matrice de contrôlabilité de Kaman du système (i) est :

$$W_c = \left[B, AB, A^2B, ..., A^{(n-1)}B\right].$$

2) -La mtrice de contrôlabilité de Kalman du système (ii) est :

$$\widehat{W_c} = \left[C^T, \left(-A^T\right)C^T, \left(-A^T\right)^2 C^T, ..., \left(-A^T\right)^{(n-1)} C^T\right].$$

3)- La matrice d'observabilité de Kalman du système (i) est :

$$W_o = \begin{pmatrix} C & CA & CA^2 & . & . & . & CA^{n-1} \end{pmatrix}^T..$$

4)- Lamatrice d'observabilité de kalman du système (ii)est :

$$\widehat{W_o} = \begin{pmatrix} B^T & B^T\left(-A^T\right) & B^T\left(-A^T\right)^2 & . & . & . & B^T\left(-A^T\right)^{(n-1)} \end{pmatrix}^T.$$

$$rang\begin{pmatrix} C^T & \left(-A^T\right)C^T & \left(-A^T\right)^2 C^T & . & . & . & \left(-A^T\right)^{(n-1)} C^T \end{pmatrix}$$

$$= rang\begin{pmatrix} C & CA & CA^2 & . & . & . & CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = n.$$

Décomposition d'un système linéaire :

Cas général :représentations d'état équivalentes :

Soit le système linéaire (SE) donné par :

$$y' = Ay + Bu,$$
$$z = Cy + Du$$

où : $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), C \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), D \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$.

Soit $x = Ty$, où T est une matrice nonsingulière , $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$,

Alors, le système linéaire :

$$x' = \overline{A}x + \overline{B}u. \qquad \overline{A} = TAT^{-1}, \overline{B} = TB.$$

où

$$z = \overline{C}x + \overline{D}u \qquad \overline{C} = CT^{-1}, \overline{D} = D.$$

est algébriquement équivalent au système (SE).

$1-$ **Décomposition d'un système linéaire non-contrôlable** :

Si le système (SE) défini par :

$$y' = Ay + Bu$$
$$z = Cy + Du$$

où : $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), C \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), D \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$

n'est pas contrôlable, alors il est possible de séparer la partie contrôlable du système

au moyen d'une transformation approprié . Cela revient à changer la base de l'espace d'état

de sorte que tous les vecteurs dans la partie contrôlable ont une certaine structure.

En particulier, soit $rang(W_c) = rang\left[B, AB, A^2B, ..., A^{(n-1)}B\right] = n_1 < n$.

c'est à dire que le système n'est pas contrôlable.

Soit une famille de vecteurs colonnes $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & . & . & . & . & v_{n_1} \end{bmatrix}$ engendrant le sous espace

contrôlable (c'est à dire., la partie des états qui sont contrôlables).

En posant $E_c = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & . & . & . & . & v_{n_1} \end{bmatrix}$; n_1 représente le rang de la matrice contrôlable de W_c

que l'on peut appeler rang de contrôlabilité ou indice de contrôlabilité.

Les vecteurs $v_i, i = 1, 2, ..., n_1$ peuvent être obtenus facilement par exemple en prenant

les n_1 premières colonnes linéairement indépendantes de la matrice W_c .

Soit aussi la matrice $E_{\overline{c}}$ dont les colonnes sont $(n - n_1)$ vecteurs linéairement indépendants

entre eux et orthogonaux aux vecteurs $v_i; i = 1, 2, ..., n_1$ de sorte que les colonnes

de la matrice $T_c = [E_c, E_{\overline{c}}]$ constituent une base de $\mathbb{R}^n$.

Alors, la transformation linéaire : $y = T_c x_c$, nous permet de transformer le système (SE)

au système équivalent $(SE1)$ donné par :

$$x_c' = \begin{bmatrix} \overline{A_{11}} & \overline{A_{12}} \\ 0 & \overline{A_{22}} \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} \overline{B_1} \\ 0 \end{bmatrix} u.$$
$$z = \begin{bmatrix} \overline{C_1} & \overline{C_2} \end{bmatrix} x_c + Du.$$

$\cdot$ La mtrice $T_c = [E_c, E_{\overline{c}}]$ est appelée matrice de passage de la représentation d'état (SE)

à la représentation d'état $(SE1)$.

La matrice $\overline{A_{22}}$ correspond clairement à la dynamique non contrôlable

(elle ne peut subir l'influence de u).

La partie contrôlable est la paire des matrices $\left(\overline{A_{11}}, \overline{B_1}\right)$, où $\overline{A_{11}} \in M_{n_1 \times n_1}(\mathbb{R}), \overline{B_1} \in M_{n_1 \times m}$.

2)- Décomposition d'un système linéaire non observable :

En rappelant que l'observabilité est le concept dual de celui de la contrôlabilié.

On considère le système linéaire (SE) comme dans le cas précédent.

et, on suppose que : $rang\,(W_o) = rang \begin{pmatrix} C & CA & CA^2 & . & . & . & CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = n_2 < n,$

où W_o est la matrice de kalman d'observabilité .

C'est à dire que, le système (SE) n'est pas observable

Soit T_o la matrice de passage dont les n_2 premières lignes sont constituées de n_2 lignes

linéairement indépendantes de W_o auquelles $(n - n_2)$ autre lignes viennent se concaténer

en colonne de sorte que l'image de T_o ne soit autre que $\mathbb{R}^n$.

Le changement de base $x_o = T_o y$ conduit alors à la décomposition:

$$x_o' = \begin{bmatrix} \overline{A_{11}} & 0 \\ \overline{A_{21}} & \overline{A_{22}} \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} \overline{B_1} \\ \overline{B_2} \end{bmatrix} u.$$

$$z = \begin{bmatrix} \overline{C_1} & 0 \end{bmatrix} x_o + Du.$$

La matrice $\overline{A_{22}}$ correspond clairement à la dynamique non observable

(elle ne peut être perçue au travers de la sortie z).

La partie observable est la paire des matrices $\left(\overline{A_{11}}, \overline{C_1}\right)$, où .$\overline{A_{11}} \in M_{n_2 \times n_2}(\mathbb{R}), \overline{C_1} \in M_{p \times n_2}(\mathbb{R})$.

Exemple : Soit le système d'ordre 3 défini par :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} y.$$

Calculer le rang de la mtrice de contrôlabilité.

On a $rangW_c = rang \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3.$

Donc le système est non contrôlable.

Soit la matrice de passage T_c formée par les deux premiers colonnes de W_c et un troisième

arbitraire indépendant des deux premiers donc $T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, où

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est arbitraire.

On calcul maintenant : $\overline{A} = T_c A T_c^{-1}$, $\overline{B} = T_c B$, $\overline{C} = C T_c^{-1}$ pour obtenir la décomposition de Kalman.

On a $T_c = \frac{1}{\det\left(T_c^{-1}\right)} \left(com T_c^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc: $\overline{A} = T_c A T_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{B} = T_c B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{C} = C T_c^{-1}$ $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

La paire contrôlable est :$\left(\overline{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \left(\overline{B_1} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)\right)$.

Exercices :

Exercice 1: Soit lev système linéaire : $y' = Ay + Bu$.

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a)- Montrer que la paire (A, B) est contrôlable.

b)- Déterminer la Grammienne de contrôlabilité .

c)-Calculer le contrôle $\overline{u}(t)$ qui transfére le système de l'état initial $y(0) = y_0$ a un autre état y_1

dans un temps fini $T > 0$.

Exercice 2 : On considére le système de contrôle linéaire observé :$y' = Ay, z = Cy$.

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1):

a)- Déterminer la Grammienne d'observabilité de ce système et déduire que le système est observable.

b)- Donner la matrice de Kalman d'observabilité.

2)-Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,et $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, montrer que le système n'est pas observable

et trouver l'espace $Ker W_o(0, T)$.

Exercice 3 : Soit le système linéaire scalaire : $y' = -ay + bu$.

a)-Déterminer la Grammienne de contrôlabilité du système.

b)-Calculer le contrôle $\overline{u}(t)$ qui transfére l'état de $y(0) = y_0$ a l'origine (i.e $y(T) = 0$) .en un temps $T > 0$.

Exercice 4 : Pour le système scalaire : $y' = a(t)y$,et $z = c(t)y$.

où $a(t) = -1$ et $c(t) = e^t$.

a)- Trouver la matrice Grammienne d'observabilité et déduire que le système est observable

au temps t_0.

b)- Déterminer pour chaque $t > t_0$, l'éta y_0 en utilisant l'expression:

$$y_0 = W_o^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t, t_0) C^*(t) z(t) dt.$$

Exercice 5 :a)- Ecrire l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2}{dt^2} y = u(t) ; y(0) = y_0, \frac{d}{dt} y(0) = y_1; \text{ où } y = (y_0, y_1)^T \in \mathbb{R}^2$$

sous la forme d'un système du premier ordre.

b)-Montrer que pour le nouveau système, la matrice Grammienne est non singulière pour $T > 0$.

c)- trouver le contrôle $\overline{u}(t)$ qui transfére l'état $(y_0, y_1)^T$ à l'origine $(0,0)^T$,au temps $T > .0$.

Exercice 6: Soit le système linaire :$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$.

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Montrer que le système est contrôlable.

Exercice 7 : On considère le système : $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$, et $z(t) = Cy(t)$.

où $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,et $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vérifier par la dualité que l'observabilité de la paire (A, C) est équivalente à la contrôlabilité du système dual dont la paire des matrices est $(-A^T, C^T)$.

Exercice 8 : Soit le système linéaire :

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) ; z(t) = Cy(t)$$

où $A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -4 \\ 4 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,et $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer une décomposition de Kalman ddu sysème et donner la partie contrôlable

et la partie non contrôlable gu système.

.

:

l