Université de Batna2

Département de Mathématiques

Devoir: Théorie des semi-groupes 1^{er}année Master M.A 2019/2020

Exercice 1: On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t)\,;X(t)\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R} \\ X(0) &= X_0\in\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$
$$\text{où } A(t)\in M_2(\mathbb{R}).$$

1. 1) a-Rappeler la solution de ce système lorsque la matrice A ne dépend pas de t.

   b-On suppose que $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Montrer que la solution est donner par: $X(t)=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} X_0$.

   2): On suppose maintenent que pour tout $t,s\in\mathbb{R}$, on a : $A(t)A(s)=A(s)A(t)$.

   Montrer que la solution s'écrit sous la forme $X(t)=\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)X_0$.

   3): a- On suppose que $A(t)=\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.Montrer que la solution du système est :

   $$X(t)=\begin{pmatrix} 1 & 1+(t-1)e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} X_0.$$

   b-Montrer que :

   $$\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2}(e^t-1) \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

   c- Quelle est votre conclusion ?.

   Exercice 2:

   Soit $X=L^p(\mathbb{R})\,;p\in[1,+\infty]$ et soit $\{T(t)\,;t\geq 0\}$ une famille d'opérateurs linéaires définie par :

   $$T(t)f(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,e^{-\frac{y^2}{4t}}dy\ ;\ f\in X\ .$$

   Utiliser les propriétées de la transformée de Fourier et le produit de convolution pour montrer que

   la famille $\{T(t)\,;t\geq 0\}$ est un C_0-semi groupe sur X.