Exercices

Ex n°1 : Soit X un espace de Banach et soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus sur X

1) Montrer que si : $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B}$

2) Montrer que : $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$; $\forall t, s \geq 0$

Ex n°2 : Soit $X = \{f : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \,/\, f$ est uniformément continue et bornée$\}$

avec la norme : $\|f\|_X = \sup_{x \in [0,+\infty)} |f(x)|$

Soit $\{T(t) ; t \geq 0\}$ une famille d'opérateurs linéaires définie par : $T(t)f(x) = f(t+x)$; $\forall t \geq 0$ et $x \in [0,+\infty)$

1) Montrer que $\{T(t) ; t \geq 0\}$ est un C_0-semigroupe de contraction sur X

2) Trouver son générateur infinitésimal A

Ex n°3 : Soit $X = L^p(\mathbb{R})$; $p \in [1,+\infty)$ et soit $\{T(t), t \geq 0\}$ une famille d'opérateurs linéaires définie par

$$T(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{\frac{-y^2}{4t}} dy \;,\; f \in X$$

Montrer que $\{T(t), t \geq 0\}$ est un C_0-semigroupe.

Ex n°4 : Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ un C_0-semigroupe. Alors

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x, \forall x \in X, t \geq 0$$

Ex n°5: Soit X un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ et $T(t) = e^{At}$, $t > 0$

Montrer que pour $h > 0$ assez petit, on a :

$$A = (T(h) - I)\left(\int_0^h T(s)\,ds\right)^{-1}$$

Ex n°6 : Soit $\{T(t); t \geq 0\}$ un C_0-semigroupe de générateur infinitésimal A.

1) Montrer que pour tout $x \in X$ et pour tout $t > 0$, on a

$$\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$$

2) En déduire que $x \in \overline{D(A)}$, c'est-à-dire que A est à domaine dense dans X.

Ex n°7 : Soit X un espace de Banach et $\{T(t); t \geq 0\}$ un semi-groupe sur X. On note A le générateur infinitésimal de $\{T(t); t \geq 0\}$.

1) Rappeler la définition de l'opérateur A

2) Dans ~~quel~~ cas a-t-on $A \in \mathcal{L}(X)$, c'est-à-dire que l'opérateur A est borné sur X.

3) On suppose maintenant que $\{T(t); t \geq 0\}$ est un C_0-semigroupe. i.e $\lim\limits_{t \to 0^+} T(t)x = x$; $\forall x \in X$

suite $\xrightarrow{3}$

on rappelle le théorème de Banach-Steinhaus (ou "principe de la borne inférieure").

théorème de Banach-Steinhaus : si $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de $\mathcal{L}(X)$ tel que pour chaque $x \in X$; $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$.

Alors la famille $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{L}(X)$ c'est-à-dire $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

En considérons une suite $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overset{+}{0}$ et les opérateurs $T_n = T(t_n)$ correspondant, Montrer qu'il existe $w > 0$ et $M > 0$ tel que $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$

4) Montrer que $\lim\limits_{h \to \bar{0}} \dfrac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax$

En déduire que pour tout $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

EX 8 : Soient $T(t)$ et $S(t)$; $t \geq 0$ deux semigroupes ayant même générateur infinitésimal $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$

1) Soit $x \in D(A)$. Montrer que la fonction

$s \in [0, t] \longrightarrow T(t-s)S(s)x \in X$ est constante

(calculer la dérivée)

2) En déduire que $S(t)x = T(t)x$ pour tout $x \in X$

c'est-à-dire que le semigroupe engendré par A est unique

Ex n°9 : Soit $\{T(t); t \geq 0\}$ un C_0-semigroupe et A son générateur infinitésimal et soit $\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\lambda > \omega\}$.

On définit l'opérateur : $R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ espace des opérateurs linéaires bornés.

par : $$R(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, dt = R(\lambda, A)$$

Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a : $\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}$

Ex n°10 : Soit A un opérateur défini par : $A\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}$

pour tout $\varphi \in D(A) = \{\varphi \in L^2(0,\pi) \mid \frac{d^2\varphi}{dx^2} \in L^2(0,\pi);\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0\}$

$X = L^2(0,\pi)$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f, g)_X = \int_0^\pi f(x)\, \overline{g(x)}\, dx, \ \forall f, g \in L^2(0,\pi)$$

1) Vérifier que A est un opérateur linéaire
2) Montrer que A est auto-adjoint c-à-d $A^* = A$
(ce qui implique que A est fermé)
3) Déduire que $(-A)$ engendre un C_0-semigroupe de contraction $\{T(t); t \geq 0\}$ sur $X = L^2(0,\pi)$.
4) Déterminer les valeurs propres de A et les fonctions propres associées
5) Donner une base de Reisz de $X = L^2(0,\pi)$
6) Déduire que A est un opérateur spectral de Reisz
7) Donner l'expression de $T(t)x$ pour $x \in L^2(0,\pi)$ ainsi que l'expression de Ax, pour $x \in D(A)$