La théorie des semigroupes d'opérateurs linéaires à un paramètre

I. Introduction :

I.1 : Equation différentielle ordinaires scalaire

Il est bien connu que l'équation différentielle ordinaire scalaire :

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t)\ ;\ a \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une solution unique $x(t)$ donné sous la forme

$x(t) = e^{at} x_0\ ; t \geq 0$, $t \longrightarrow e^{at}$ est la fonction exponentielle

I.2 : Système d'équations différentielle ordinaire

Plus généralement, le système d'équations différentiel ordinaires :

$$(2)\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où, pour chaque $t \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

admet une solution unique pour tout $t \geq 0$. cette solution peut s'écrire sous la forme : $x(t) = e^{At} x_0$

On note que : $e^{At} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j t^j}{j!}$ avec $A^0 = I_{n\times n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$$

Remarques :

1- Si $A, B \in M_{n\times n}$ avec $AB = BA$, alors on a

$$e^{(A+B)t} = e^{At}\cdot e^{Bt} \text{ et on a } e^{A+B} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k \cdot B^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

2- Pour chaque $A \in M_{n\times n}$, on a :

$$\|e^{At}\|_{\mathbb{R}^n} = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\|A\|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\|A\|t)^n}{n!} = e^{\|A\|t}$$

En plus, si on suppose que $A \in M_{n\times n}$ est une matrice réelle symétrique, alors A est diagonalisable, soit $\lambda_j ; j=1,2,\dots,n$ les valeurs propres de A et soit $w_j ; j=1,2,\dots,n$ les vecteurs propres normalisés associés à $\lambda_j ; j=1,2,\dots,n$, et puisque A est symétrique, alors l'ensemble des vecteurs propres $(w_j)_{j=1}^n$ forme une base de $\mathbb{R}^n$. Alors on peut écrire

$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)\, w_j$, où $\alpha_j ; j=1,2,\dots,n$ peuvent être déterminer par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \alpha_j'(t) = \lambda_j \alpha_j(t), \; j=1,2,\dots,n \\ \alpha_j(0) = (x_0, w_j) ; \; (\cdot,\cdot) \text{ est le produit scalaire} \end{cases}$$

obtenu en remplaçant $x(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) w_j$ dans le système différentielle ordinaire (e).

avec $A w_j = \lambda_j w_j ; j=1,2,\dots,n$.

donc $\alpha_j(t) = e^{\lambda_j t}\alpha_j(0)$ et on a alors :

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t}\alpha_j(0) w_j = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t}(x_0, w_j) w_j$$

Pour un système différentielle ordinaire non homogène

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + f(t) \; ; \; t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $f(t) \in \mathbb{R}^n$, la solution $x(t)$ est donné sous la forme

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds$$

I.3 : Equation différentielle ordinaire dans un espace de Banach.

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel ou complexe et soit $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés $A : X \longrightarrow X$ muni de la norme $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

Soit $T > 0$. Pour chaque $A \in \mathcal{L}(X)$, le problème de Cauchy :

$$(3) \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) \,, \; t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \in X \end{cases}$$

peut être facilement résolu par la méthode d'approximation suivante :

Supposons que : $x_0(t) = x_0$, $x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t A x_n(s)\, ds$, $t \in [0,T]$

où l'intégrale est considérée au sens de Riemann.

Alors la solution de (3) est donné par

$$x(t) = \lim_{n \to +\infty} x_n(t) = e^{At} x_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x_0$$

où la série converge uniformément dans $\mathcal{L}(X)$

Remarque : Si X est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et A est un opérateur linéaire compact auto-adjoint sur X, Alors la solution $x(t)$ de l'équation d'évolution (3) peut s'écrire dans ce cas sous la forme

$$x(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{\lambda_j t} (x_0, w_j) w_j .$$

où $(\lambda_j)_{j=1}^{+\infty}$ est l'ensemble des valeurs propres et $(w_j)_{j=1}^{+\infty}$ est l'ensemble des vecteurs propres normalisés associés à $(\lambda_j)_{j=1}^{+\infty}$. $(w_j)_{j=1}^{+\infty}$ forme une base orthonormale de X.

Si A est un operateur linéaire non borné dans un espace de Banach X, c'est-à-dire : $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ [$D(A)$ le domaine de A). la solution de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \, ; \, t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in X \end{cases}$$

a été réalisée par l'introduction des semi-groupes.

Avant d'aborder cette théorie des semi groupes d'opérateurs linéaires, nous fixons un peu de terminologie

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$ et soit $A : X \longrightarrow X$ une application de X sur X.

<u>Définition 1</u> : On dit que A est un opérateur linéaire non borné si $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est une application linéaire et $D(A)$ est un sous-espace linéaire de X.

L'opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est noté généralement par $(A, D(A))$

<u>Remarque</u> : L'opérateur linéaire $A : X \longrightarrow X$ est dit borné s'il existe $c > 0$ tel que $\|Ax\|_X \leq c\|x\|_X$; $\forall x \in X$

<u>Définition 2</u> : Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ est dit fermé si son graphe :

$$Gr(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\} \text{ est fermé dans } X \times X.$$

<u>Remarque 2</u> : La caractérisation des fermés par les suites donne la proposition suivante

<u>Proposition</u> : Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x \in X$ et $Ax_n \longrightarrow y \in X$, on a alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$

Définition 3 Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné sur X. On dit que $(A, D(A))$ est un opérateur à domaine dense dans X si $D(A)$ est dense dans X.

Définition 4 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné à domaine dense dans X, L'opérateur adjoint de A est l'opérateur $(A^*, D(A^*))$ défini par :

$$D(A^*) = \{ y \in X^* \mid \exists c > 0 \text{ tq } \langle Ax, y \rangle \leq c\|x\|, \forall x \in D(A) \}$$

et $\langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle ; \forall x \in D(A)$ et $\forall y \in D(A^*)$.

Définition 5 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné

1) On appelle ensemble résolvant de A, qu'on note $\rho(A)$, l'ensemble

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A : D(A) \longrightarrow X \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A) \text{ est borné} \}$$

si A est fermé, alors d'après le théorème du graphe fermé on a : $\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A : D(A) \longrightarrow X \text{ est bijectif} \}$

2) on appelle spectre de A, l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

3) Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire borné $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ.

Proposition 2 (Equation de la résolvante)

Si $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire non borné, alors pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

En effet : de la définition de la résolvante on a :

$$[\lambda R(\lambda, A) - A R(\lambda, A)] R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

$$[\mu R(\mu, A) - A R(\mu, A)] R(\lambda, A) = R(\lambda, A)$$

En faisant la différence des deux égalités et compte tenu du fait que $R(\lambda, A)$ et $R(\mu, A)$ commutent, on obtient

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

Opérateurs sur les espaces de Hilbert

On suppose maintenant que X est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 1 : Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ sur X est dit dissipatif si et seulement si :

$$\forall x \in D(A) : \langle Ax, x \rangle_X \leq 0$$

Remarque 1 : Pour un espace de Hilbert complexe cette condition est remplacée par :

$$\forall x \in D(A) ; Re \langle Ax, x \rangle_X \leq 0 , Re = Reel$$

Remarque 1: Si X est un espace de Banach, un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ sur X est dit dissipatif si et seulement si :

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0 ; \|\lambda x - Ax\|_X \geq \lambda \|x\|_X .$$

Définition 2 : un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ sur X est dit m-dissipatif si et seulement si :

i) A est dissipatif

ii) $\forall f \in X, \forall \lambda > 0 ; \exists x \in D(A)$ tel que : $\lambda x - Ax = f$

théorème 1 : Si $(A, D(A))$ est un opérateur m-dissipatif. Alors, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse $(\lambda I - A)^{-1} f \in D(A)$ pour tout $f \in X$ et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X qui satisfait

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

théorème 2 : Si $(A, D(A))$ est un opérateur linéaire non borné m-dissipatif. Alors A est fermé et $D(A)$ dense dans X

Définition 3 : un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ à domaine dense dans X est dit :

i) auto-adjoint si $A^* = A$

ii) anti-adjoint si $A^* = -A$