Solutions

Exn° 1 : i) $e^{A}.e^{B} = \left(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots\right)\left(I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots\right)$

$$= I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + A + AB + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

$$= I + (A+B) + \frac{1}{2}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 \quad (\text{car } AB = BA)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = e^{A+B}$$

ii) $\forall t, s \geq 0$; $e^{At}.e^{As} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k A^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{n-k}.A^{n-k}.s^k.A^k}{(n-k)!\,k!}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} = e^{A(t+s)}$$

Exn° 2 : i) $(T(0)f)(x) = f(0+x) = f(x)$. Donc $T(0) = I$

ii) $(T(t+s)f)(x) = f(t+s+x) = T(t)f(s+x) = T(t)T(s)f(x), \forall x \in X, \forall t, s \geq 0$

donc : $\forall f \in X$; $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$

iii) $\lim_{t \to 0} \|T(t)f - f\|_X = \lim_{t\to 0} \left\{ \sup_{x \in X} |f(t+x) - f(x)| \right\} = 0, \forall f \in X$

de même, on a :

$$\|T(t)f\|_X = \sup_{x\in[0,+\infty)} |T(t)f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} |f(t+x)| = \sup_{y\in[t,+\infty)} |f(y)| \leq \sup_{y\in[0,+\infty)} |f(y)|$$

$= \|f\|_X$; $\forall t \geq 0$ donc $\|T(t)\| = 1$, $\forall t \geq 0$

Par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semigroupe de contractions sur X

2) Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ le générateur infinitésimal du C_0-semigroupe $T(t)$.

• Si $f \in D(A)$, alors $Af(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} = f'(x), \forall x \in X$

donc $D(A) \subset \{f \in X \mid f' \in X\}$

• Si $f \in X$ tel que $f' \in X$, alors : $\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_X = \sup_{x \in [0,+\infty[} \left| \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} - f'(x) \right|$

Mais $\left| \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} - f'(x) \right| = \left| \frac{f(t+x) - f(x)}{t} - f'(x) \right| = \frac{1}{t} \left| \int_x^{x+t} (f'(\tau) - f'(x))\, d\tau \right|$

$$\leq \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f'(\tau) - f'(x)|\, d\tau \longrightarrow 0$$

uniformément par rapport à x pour $t \to 0^+$. Par suite

$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_X \longrightarrow 0$ si $t \to 0^+$ d'où $f \in D(A)$ et $\{f \in X, f' \in X\} \subset D(A)$

Par conséquent $D(A) = \{f \in X \mid f' \in X\}$ et $Af = f'$

Comme cet opérateur et non borné, il ne peut pas engendrer un semi groupe uniformément continu.

Ex n° 4 : L'égalité résulte de l'évaluation suivante

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds - T(t)x \right\|_X = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [T(s)x - T(t)x]\, ds \right\|$$

$$\leq \sup_{s \in [t,t+h]} T(s)x - T(t)x$$

et d'après la continuité de l'app $[0,+\infty[\ni t \longrightarrow T(t)x \in X$

on déduit que $\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x$

Ex n° 5 : L'application $\mathbb{R}^+ \ni t \longrightarrow T(t) \in \mathcal{L}(X)$ est continue, donc

$\int_0^t T(s)ds \in \mathcal{L}(X)$, $\forall t \geq 0$, on a donc $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)ds = T(0) = I$

Il existe alors $\rho > 0$ tel que $\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)ds - I \| < 1$, ce qui implique

que $\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)ds$ est inversible et donc $\int_0^\rho T(s)ds$ est inversible.

Pour tout $h > 0$, on a : $\left(\frac{T(h) - I}{h}\right)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right) = \frac{1}{h}\left(\int_0^\rho (T(h+s) - T(s))ds\right)$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{h+\rho} T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds\right) = \frac{1}{h}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\right)$$

Donc $\frac{T(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\, ds\right)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$

donc $\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = (T(\rho) - I)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$

Ainsi, le générateur infinitésimal du semi groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ est l'opérateur linéaire borné $A = (T(\rho) - I)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$

Ex n° 6, 7 (voir cours)

Ex n° 8 : Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$, on définit l'application

$$[0,t] \ni s \longrightarrow U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A)$$

Alors $\frac{d}{ds}U(s)x = \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x$

$$= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0, \forall x \in D(A)$$

Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$

d'où $T(t)x = S(t)x$, $\forall x \in D(A)$ et $t \geq 0$

Puisque $\overline{D(A)} = X$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{L}(X)$, pour tout $t \geq 0$
il résulte que $T(t)x = S(t)x$, $\forall t \geq 0$ et $x \in X$

on obtient que : $T(t) = S(t)$; $\forall t \geq 0$

ce qui signifie que le semigroupe associé au générateur infinitésimal A est unique.

<u>Ex n°9</u> : Si $\lambda \in \Lambda_\omega$, alors $\lambda \in \rho(A)$ l'ensemble résolvant de A

et $R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$; $\forall x \in X$

de plus $\|R(\lambda, A)\|_X \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}$ (voir cours) $\left(\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, t \geq 0\right)$

Il est clair que $\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = \frac{d}{d\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$

$$= -\int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$$

et par récurrence, on peut montrer que :

(1) $\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$, $\forall x \in X$; $n \in \mathbb{N}^*$

d'autre part, d'après l'identité de la résolvante $R(\lambda; A)$:

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

et on pose, pour $h > 0$; $\mu = \lambda + h$ donc, on a :

$$\frac{R(\lambda + h; A) - R(\lambda, A)}{(\lambda + h) - \lambda} = -R(\lambda, A) R(\lambda + h, A)$$

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = \lim_{h \to 0} \frac{R(\lambda+h, A) - R(\lambda, A)}{(\lambda+h)-\lambda} = -\lim_{h \to 0} R(\lambda, A) R(\lambda+h, A)$$
$$= -R^2(\lambda, A)$$

Donc, on peut utiliser le même argument, on obtient que

(2) $$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A) = (-1)^{n-1} (n-1)!\, R^n(\lambda, A)$$

Combinons les deux résultats (1) et (2), on obtient

$$(n-1)!\, R^n(\lambda, A) x = \int_0^{+\infty} t^{(n-1)} e^{-\lambda t} T(t) x \, dt$$

donc $$\| (n-1)!\, R^n(\lambda, A) x \| \leq \int_0^{+\infty} t^{(n-1)} \| T(t) x \| dt \quad (\|T(t)\| \leq M_w e^{wt}, t \geq$$

$$\leq M_w \|x\| \int_0^{+\infty} t^{(n-1)} e^{-(\alpha - w)t} dt \; ; \alpha = \mathrm{Re}\lambda$$

Si on pose $u = (\alpha - w) t \Rightarrow du = (\alpha - w) dt$

donc $$\| (n-1)!\, R^n(\lambda, A) x \| \leq M_w \|x\| \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\alpha - w}\right)^{n-1} e^{-u} \frac{du}{\alpha - w}$$

$$= \frac{M_w \|x\|}{(\alpha - w)^n} \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{M_w \|x\| \Gamma(n)}{(\alpha - w)^n}$$

donc comme $\Gamma(n) = (n-1)!$, on obtient que

$$\| R^n(\lambda, A) \| \leq \frac{M_w}{(\mathrm{Re}\lambda - w)^n}, \; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ex n° 10 : 1) $A(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha A\varphi+\beta A\psi$; $\forall\varphi,\psi\in X=L^2(0,\pi)$ (clair)

2) on a tout d'abord : $\langle A\varphi,\varphi\rangle_X=\langle -\frac{d^2\varphi}{dx^2},\varphi\rangle_{L^2(0,\pi)}=\int_0^\pi\left(-\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\varphi\,dx$

par intégration par partie, on obtient que :

$$\langle A\varphi,\varphi\rangle_{X=L^2(0,\pi)}=-\frac{d\varphi}{dx}\varphi\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\,dx=\int_0^\pi\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx>0,\ (\varphi(0)=\varphi(\pi)=0)$$

donc $\langle A\varphi,\varphi\rangle_X>0$, c-à-dire A est positive.

A est auto-adjoint : on a : $\forall\varphi\in D(A)$ et $\psi\in D(A^*)$.

$$\langle A\varphi,\psi\rangle=\int_0^\pi\left(-\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\psi\,dx=-\frac{d\varphi}{dx}\psi\Big|_0^\pi+\varphi\frac{d\psi}{dx}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\varphi\frac{d^2\psi}{dx^2}dx$$

si $\psi\in D(A)$, alors on a :

$$\langle A\varphi,\psi\rangle=-\int_0^\pi\varphi\frac{d^2\psi}{dx^2}dx=\langle\varphi,A\psi\rangle$$

donc $A^*=A$ et $D(A^*)=D(A)$, donc A est auto-adjoint.

ce qui implique que A est fermé de plus on a : $\overline{D(A)}=X$

3) Comme $\langle -A\varphi,\varphi\rangle_X=\int_0^\pi\frac{d^2\varphi}{dx^2}\varphi\,dx=-\int_0^\pi\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx\leq 0,\ \forall\varphi\in D(-A)$

et $\langle -A^*\psi,\psi\rangle=\int_0^\pi\frac{d^2\psi}{dx^2}\psi\,dx=-\int_0^\pi\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2dx\leq 0$; $\forall\psi\in D(-A^*)$

c-à-dire : $\operatorname{Re}\langle -A\varphi,\varphi\rangle\leq 0,\ \forall\varphi\in D(A)$

$\operatorname{Re}\langle -A^*\psi,\psi\rangle\leq 0,\ \forall\psi\in D(A^*)$

on déduit alors que $(-A)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $\{T(t),\ t\geq 0\}$.

4) On a : $A\varphi=\lambda\varphi\Rightarrow -\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\lambda\varphi\Rightarrow\begin{cases}\varphi(x)=\alpha e^{i\sqrt{\lambda}x}+\beta e^{-i\sqrt{\lambda}x}\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0\end{cases}$

$\Rightarrow\alpha=-\beta$ et on a donc : $e^{i\sqrt{\lambda}x}-e^{-i\sqrt{\lambda}x}=0,\ \forall\alpha\neq 0$

$\Rightarrow 2i\sin\pi\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow\sqrt{\lambda_n}=n,\ n\geq 0\Rightarrow\lambda_n=n^2,\ n\geq 0$

et que : $\varphi_n(x)=\sin nx,\ n\geq 0$

donc $\phi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_X}$ tel que $\|\varphi_n\|^2_{X=L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi \varphi_n^2(x)dx = \int_0^\pi \sin^2 nx\,dx = \frac{\pi}{2}$

c'est-à-dire : $\phi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_{L^2(0,\pi)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$, $\forall n\geq 1$. Donc $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ est une base orthonormée, donc une base de Reisz.

6) Si $n\neq m$, alors on a : $\lambda_n \neq \lambda_m$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

donc $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est totalement déconéctée. donc A est un operateur spectral de Reisz.

7) on a : $T(t)x = \sum\limits_{n\geq 1} e^{-n^2t}\langle x,\phi_n\rangle\phi_n$; $\forall x\in L^2(0,\pi)$

et

$Ax = \sum\limits_{n\geq 1} n^2\langle x,\phi_n\rangle\phi_n$; $\forall x\in D(A)$

En plus, on a :

$$\|T(t)x\|_{X=L^2(0,\pi)} = \Big\|\sum_{n\geq 1} e^{-n^2t}\langle x,\phi_n\rangle\phi_n\Big\|_X \leq e^{-t}\sum_{n\geq 1}\|\langle x,\phi_n\rangle\phi_n\| = e^{-t}\|x\|$$

donc $\|T(t)\|\leq 1$; $\forall t\geq 0$, c'est-à-dire $\{T(t); t\geq 0\}$ est un C_0-semi groupe de contraction sur $X=L^2(0,\pi)$