

## **Chapitre II**

*Modélisation géométrique des  
surfaces complexes*

## II Modélisation géométrique des surfaces complexes.

### II.1 Introduction.

La modélisation géométrique des produits est au cœur de la maquette numérique. Elle doit proposer une représentation tridimensionnelle des différentes contraintes fonctionnelles ou esthétiques qui s'appliquent au produit. Le modèle de référence de la maquette numérique est le principal vecteur d'information entre tous les métiers qui interviennent sur le produit.[9]

Nous allons étudier la représentation géométrique des courbes et surfaces complexes liées à la conception et à la fabrication.

### II.2. Les Courbes de Bézier.

#### II.2.1 Utilité et découverte des courbes de Bézier.

L'interpolation n'est pas toujours très adaptée pour certaines utilisations telles que le dessin par ordinateur, la CAO (conception assistée par ordinateur), etc.

C'est dans le domaine de la CAO que les courbes de Bézier [86] ont été inventées et plus précisément dans l'industrie automobile. Dans les années 1960, les machines à commandes numériques sont apparues, il fallait donc décrire les formes (comme les courbes de carrosserie) avec des équations mathématiques.

La première solution était d'interpoler linéairement un grand nombre de points. Cette méthode a de nombreux inconvénients :

- Pour la machine, il y a beaucoup de paramètres.
- Il est impossible d'agrandir (mais aussi de translater, de déformer, ...) une partie d'une pièce sans rajouter de points supplémentaires.
- Placer des points n'est pas intuitif pour les designers.
- Il est très fastidieux de modifier la courbe.
- Un autre procédé était donc nécessaire pour exprimer une courbe avec peu de paramètres et que ceux ci soient naturels.
- L'idée révolutionnaire des courbes de Bézier est l'utilisation de points de contrôle et non de points d'interpolation. Cela veut dire que la courbe ne passe pas par les points donnés mais les approchés.

## II.2.2 La conception de Bézier

Les courbes de Bézier [87] ont entre autres été créées par **Pierre BÉZIER** chez Renault en 1962. Bien que ce type de courbes porte son nom, il n'est pas certain que Bézier ait été le premier à construire cette courbe. En effet **Paul DE CASTELJAU** [88] chez Citron, a développé la même courbe plus ou moins à la même époque bien que son approche diffère de celle de Bézier. L'approche de De Casteljaou étant plus intuitive et plus utilisée. La méthode de Bézier repose sur la déformation de l'espace. Nous partons d'une courbe simple (comme un quart de cercle) sur un système d'axes. En réalité, la courbe choisie par Bézier était un polynôme. Puis, nous déformons l'espace, ce qui change la courbe. La Figure II.1 montre une déformation sur un quart de cercle.

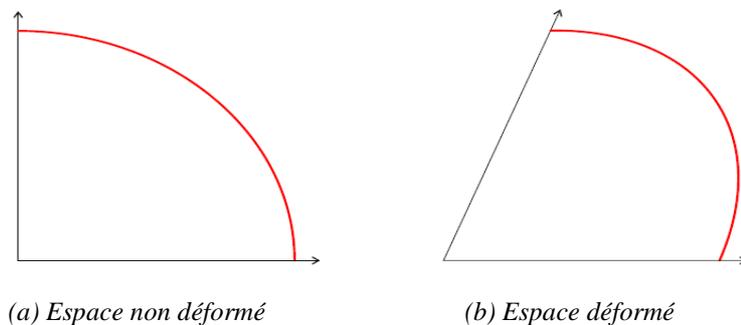


Figure II. 1–Déformation d'un espace à 2 dimensions

Il est clair que déformer un espace à deux dimensions ne permet pas de faire toutes les transformations que nous voudrions sur la courbe. Nous passons donc à un espace à trois dimensions. La Figure II.2 montre le résultat. La courbe est tracée en rouge. Le trait bleu correspond aux points de contrôle. Comme nous le voyons, la méthode de Bézier est relativement complexe. Il n'est pas très facile d'obtenir l'expression de la courbe.

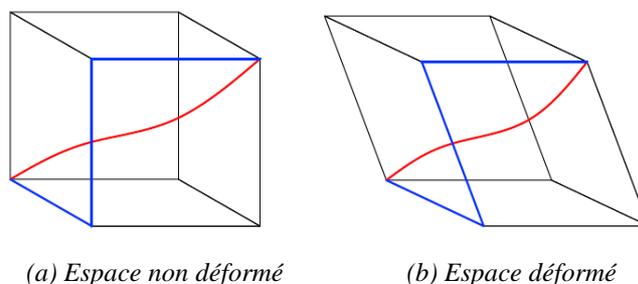


Figure II. 2–Déformation d'un espace à 3 dimensions

### II.2.2.1 Courbe de Bézier sur 3 points

#### II.2.2.1.1 Définition récursive de De Casteljaou

Géométriquement, une courbe de Bézier [89-90] peut se définir comme une construction récursive de barycentres dans les rapports  $(1 - t)$  et  $t$ .

Le segment  $[M_1(t) M_2(t)]$  est tangent à la courbe en  $M(t)$ .

- Niveau 1 sur  $(P_1, P_2)$  :

$$M_1(t) = (1 - t) P_1 + t P_2 \tag{2.1}$$

- Niveau 1 sur  $(P_2, P_3)$  :

$$M_2(t) = (1 - t) P_2 + t P_3 \tag{2.2}$$

- Niveau 2 sur  $(P_1, P_2, P_3)$  :

$$M(t) = (1 - t) M_1(t) + t M_2(t) = (1 - t)^2 P_1 + 2 t(1 - t) P_2 + t^2 P_3 \tag{2.3}$$

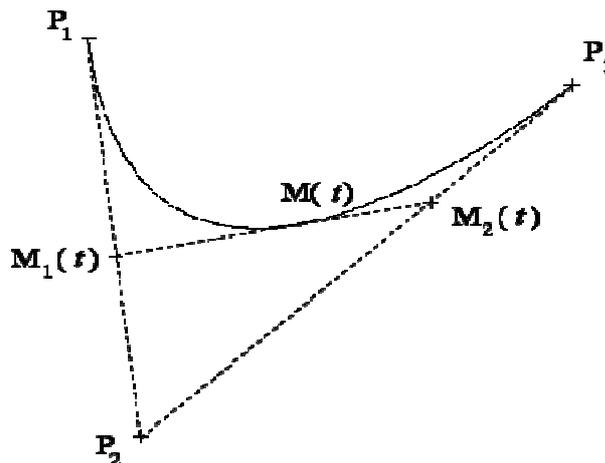


Figure II. 3–Courbe de Bézier sur 3 points. [89]

#### II.2.2.1.2 Calcul matriciel avec les polynômes de Bernstein

Les coordonnées d'un point s'obtiennent comme le produit d'une matrice de monômes du paramètre  $t$ , une matrice de coefficients et une matrice de points de contrôle  $P_1, P_2, P_3$  [89-90].

$$\begin{aligned} M(t) &= (1 - t)^2 P_1 + 2 t(1 - t) P_2 + t^2 P_3 \\ &= B_0^2(t) P_1 + B_1^2(t) P_2 + B_2^2(t) P_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$M(t) = [B_0^2(t) \quad B_1^2(t) \quad B_2^2(t)] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$M(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^1 & t^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Avec  $[B_0^2(t) \ B_1^2(t) \ B_2^2(t)]$ : Polynômes de Bernstein (2.7)

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} : \text{Points de contrôle} \quad (2.8)$$

### II.2.2.2 Courbe de Bézier sur 4 points

#### II.2.2.2.1 Définition récursive de De Casteljaou

Le segment  $[M_{21}(t) \ M_{22}(t)]$  est tangent à la courbe en  $M(t)$ .

- Niveau 2 sur  $(P_1, P_2, P_3)$  :

$$M_{21}(t) = (1-t) M_1(t) + t M_2(t) = (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t) P_2 + t^2 P_3 \quad (2.9)$$

- Niveau 2 sur  $(P_2, P_3, P_4)$  :

$$M_{22}(t) = (1-t) M_2(t) + t M_3(t) = (1-t)^2 P_2 + 2t(1-t) P_3 + t^2 P_4 \quad (2.10)$$

- Niveau 3 sur  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  :

$$M(t) = (1-t) M_{21}(t) + t M_{22}(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4 \quad (2.11)$$

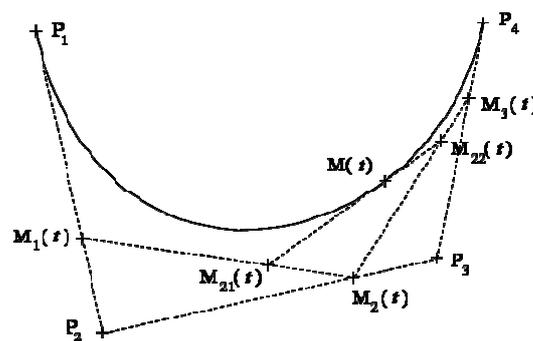


Figure II. 4—Courbe de Bézier sur 4 points. [89]

#### II.2.2.2.2 Calcul matriciel avec les polynômes de Bernstein

Les coordonnées d'un point s'obtiennent comme le produit d'une matrice de monômes du paramètre  $t$ , une matrice de coefficients et une matrice de points de contrôle  $P_1, P_2, P_3, P_4$  [89-90].

$$M(t) = (1 - t)^3 P_1 + 3 t(1 - t)^2 P_2 + 3 t^2(1 - t) P_3 + t^3 P_4 \quad (2.12)$$

$$= B_0^3(t) P_1 + B_1^3(t) P_2 + B_2^3(t) P_3 + B_3^3(t) P_4 \quad (2.13)$$

$$M(t) = [B_0^3(t) \quad B_1^3(t) \quad B_2^3(t) \quad B_3^3(t)] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$M(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t^1 & t^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$[B_0^3(t) \quad B_1^3(t) \quad B_2^3(t) \quad B_3^3(t)]: \text{ Polynômes de Bernstein} \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} : \text{ Points de contrôle} \quad (2.17)$$

### II.2.2.3 Interpolation par les polynômes de Bernstein.

La pondération des points de contrôle dans une courbe de Bézier à 4 points est donnée par les 4 polynômes de Bernstein suivants :

$$B_0^3(t) = (1 - t)^3; \quad B_1^3(t) = 3 t(1 - t)^2; \quad B_2^3(t) = 3 t^2(1 - t); \quad B_3^3(t) = t^3. \quad (2.18)$$

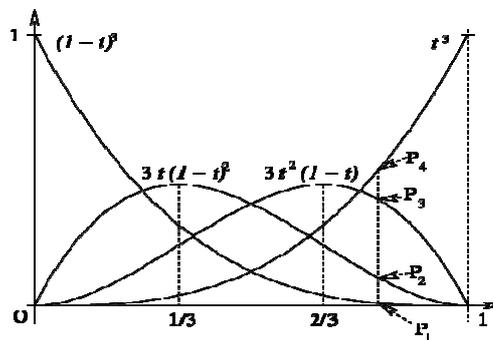


Figure II. 5– Interpolation par les polynômes de Bernstein [89]

### II.2.2.3 Courbe de Bézier sur n points

#### II.2.2.3.1 Généralisation de la définition récursive de De Casteljaou

Une courbe de Bézier à n points de contrôle se définit ainsi comme une construction récursive de barycentres dans les rapports (1 - t) et t [89-90].

Le segment  $[M_i^{k-1}(t) M_{i+1}^{k-1}(t)]$  est tangent à la courbe en  $M_i^k(t)$ .

$$M_i^k(t) = (1-t)M_i^{k-1}(t) + tM_{i+1}^{k-1}(t)$$

$$\begin{cases} k = 0, 1, \dots, n \\ i = 0, 1, \dots, n-k \end{cases} \quad (2.19)$$

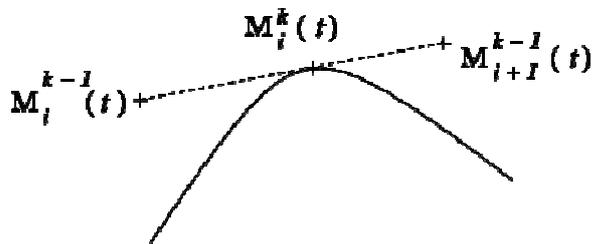


Figure II. 6– Représentation de la tangente à la courbe  $M_{ik}(t)$ . [89]

#### II.2.2.3.2 Définition récursive de De Casteljaou

Le calcul récursif des barycentres dans le cas d'une courbe à 5 points de contrôle est illustré [89-90]:

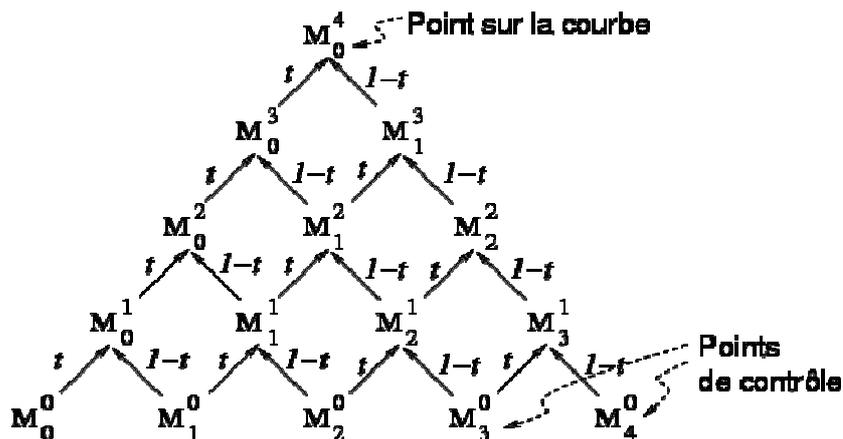


Figure II. 7–Illustration du calcul récursif d'une courbe à 5 points de contrôle. [89]

#### II.2.2.3.3 Généralisation des polynômes de Bernstein

Une courbe de Bézier à n points de contrôle se définit comme un barycentre de ses points de contrôle dont les coefficients sont les polynômes de Bernstein [89-90].

$$M(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) M_i \quad (2.20)$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} B_i^n(t) \in [0,1] \text{ quand } t \in [0,1] \\ \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

### II.2.2.3.4 Développement de la forme polynomiale

En développant et en ordonnant par rapport aux puissances de t, tout point d'une courbe de Bézier se met sous la forme [89-90]:

$$M(t) = \sum_{i=0}^n t^i P_i \quad (2.23)$$

Où les coefficients  $P_i$  sont des combinaisons affines des points de contrôles.

## II.2.2.4 Propriétés

### II.2.2.4.1 Propriétés géométriques

#### a. Interpolation aux points extrêmes

Toute courbe de Bézier passe par les points de contrôle extrêmes. Les points de contrôle intermédiaires sont des points de contrôle externes à la courbe.

#### b. Invariance affine

La transformée affine d'une courbe de Bézier est la courbe passant par la transformée des points.

#### c. Enveloppe convexe

Une courbe de Bézier appartient à l'enveloppe convexe des points qui la contrôlent.

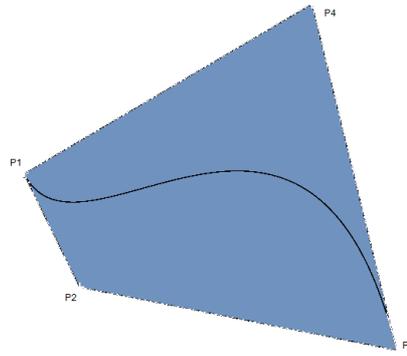


Figure II. 8–Représentation de l'enveloppe convexe. [89]

### II.2.2.4.2 Dérivée et tangente à la courbe

Forme générale de la dérivée [91-92]:

$$\vec{P}'(t) = n \sum_k (P_{k+1} - P_k) B_k^{n-1} \tag{2.24}$$

### II.2.2.4.3 Tangente aux points extrêmes

Elle est dans la direction de l'arête du polygone de contrôle.

Sa longueur dans un rapport n (le degré de la courbe).

$$\begin{aligned} \vec{P}'(0) &= n(P_1 - P_0) = n \overline{P_0 P_1} \\ \vec{P}'(1) &= n(P_n - P_{n-1}) = n \overline{P_{n-1} P_n} \end{aligned} \tag{2.25}$$

### II.2.2.4.4 Continuité entre deux courbes de Bézier

- a. Continuité de position

Elle est assurée en faisant coïncider les points extrêmes :

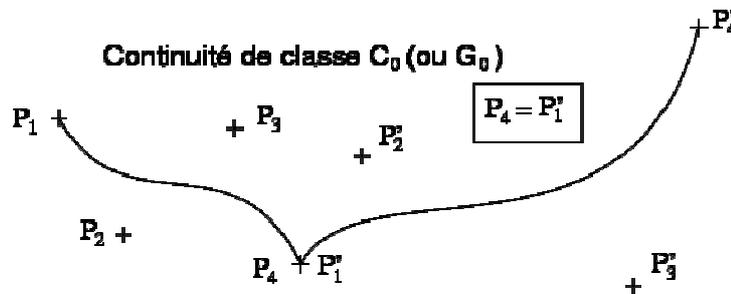


Figure II. 9 – Continuité de position. [89]

b. Continuité de classe G1

La continuité de classe G1 est vérifiée si et seulement si les points extrêmes sont confondus et les segments extrêmes alignés :

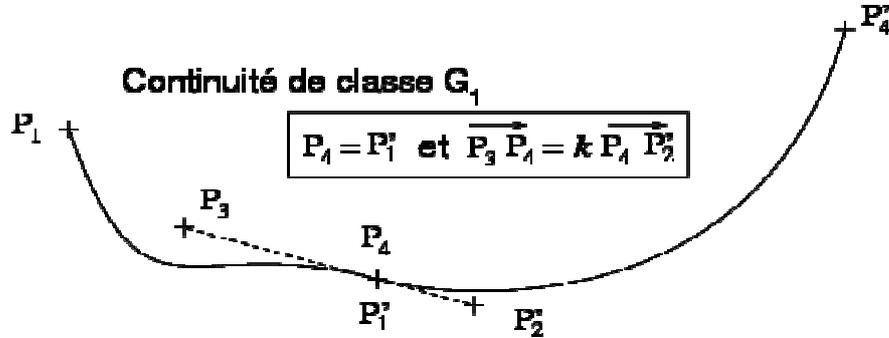


Figure II. 10 – Continuité de classe G1. [89]

On se place dans le cas où les paramètres des deux courbes sont définis sur des intervalles de même longueur.

L'article de **Yi-Jun Yang et all** [93] discute l'approximation de la continuité de courbure G1 sur une surface NURBS (Figure II.11).

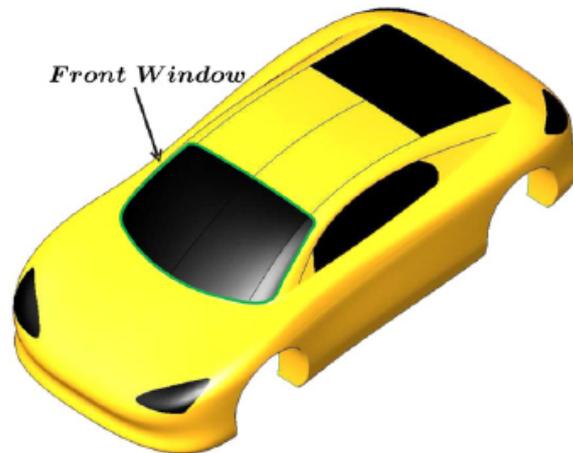


Figure II. 11 – Continuité de classe G1. [93]

c. Continuité de classe C1

La continuité de classe C1 est vérifiée si et seulement si les points extrêmes sont confondus et situés au milieu du point qui les précède et de celui qui les suit :

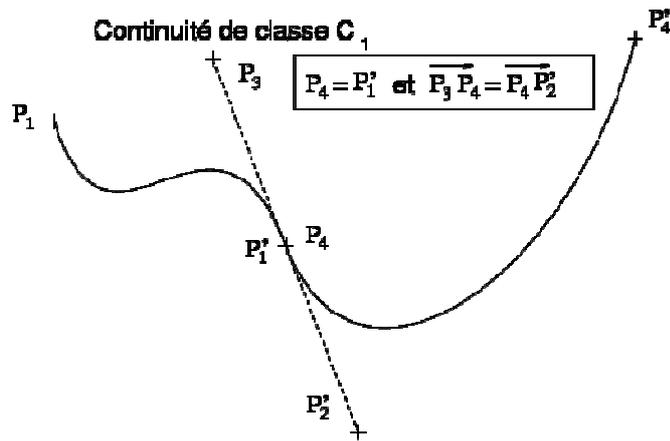


Figure II. 12 – Continuité de classe C1. [89]

On se place dans le cas où  $t_1$ , le paramètre de  $B_1$ , est défini sur  $[a_1, b_1]$  et  $t_2$ , le paramètre de  $B_2$ , sur  $[a_2=b_1, b_2]$ .

### II.3 Les courbes Spline

#### II.3.1 Définition

Une spline de degré  $n$  est une fonction polynomiale par morceaux de degré  $n$  qui est continue de classe  $C_{n-1}$  à chaque nœud [89-90].

Une courbe spline est définie par  $n+1$  points de contrôle et  $n+1$  fonctions de pondération :

$$P = P_0R_0(t) + P_1R_1(t) + \dots + P_nR_n(t) \tag{2.25}$$

Les fonctions de pondérations sont définies sur des intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$ .

$T=(t_0, t_1, \dots, t_{n+1})$  est appelé vecteur de points nodaux.

Les fonctions de pondération sont des spline d'ordre  $m$  (des polynômes par morceaux continus d'ordre  $m-1$  aux nœuds).

#### II.3.2 Les courbes B-Spline (Spline de Base)

Une courbe B-spline d'ordre  $m$  est définie par [89-90]:

- Un vecteur de nœuds  $T = (t_0, t_1, \dots, t_{n+1})$ ,
- $n+1$  points de contrôle  $P_k$
- $n+1$  fonctions de pondération  $S_{m,k}$  définies récursivement sur des intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$  :

$$S_{m,k}(t) = \frac{t-t_k}{t_{k+m-1}-t_k} S_{m-1,k}(t) + \frac{t_{k+m}-t}{t_{k+m}-t_{k+1}} S_{m-1,k+1}(t) \tag{2.26}$$

### II.3.2.1 B-Spline d'ordre 1

- Fonction de pondération  $S_1$  des B-spline d'ordre 1

$$0 \leq t \leq 1 : S_{1,0}(t) = 1 \quad (2.27)$$

- Représentation graphique (Figure II.13)

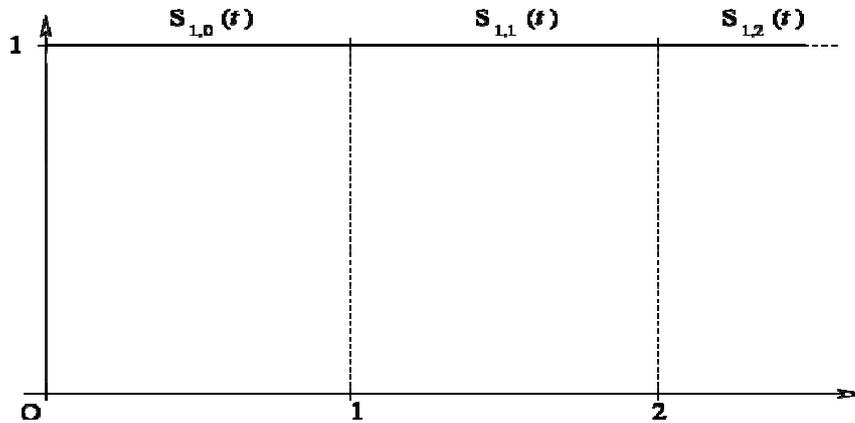


Figure II. 13 – B-spline d'ordre 1. [89]

### II.3.2.2 B-Spline d'ordre 2

- Fonction de pondération  $S_2$  des B-spline d'ordre 2

$$0 \leq t \leq 1 : S_{2,0}(t) = t, \quad (2.27)$$

$$1 \leq t \leq 2 : S_{2,0}(t) = 2 - t \quad (2.28)$$

- Définition récursive :

$$S_{2,0}(t) = (t-0)/(1-0) \cdot S_{1,0}(t) + (2-t)/(2-1) \cdot S_{1,1}(t) \quad (2.29)$$

- Représentation graphique (Figure II.14)

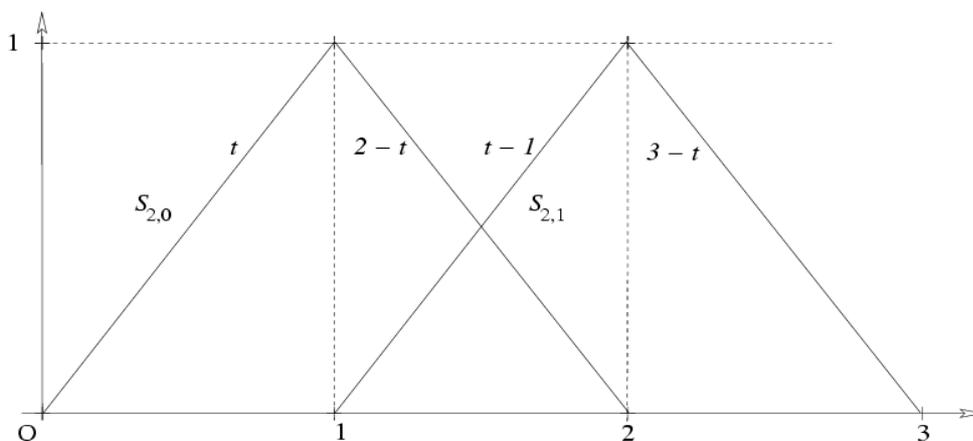


Figure II. 14– B-spline d'ordre 2. [89]

### II.3.2.3 B-Spline d'ordre 3

- Fonction de pondération  $S_3$  des B-spline d'ordre 3

$$0 \leq t \leq 1 : S_{3,0}(t) = a(t) = 1/2 \cdot t^2, \quad (2.30)$$

$$1 \leq t \leq 2 : S_{3,0}(t) = b(t) = 3/4 - (t - 3/2)^2, \quad (2.31)$$

$$2 \leq t \leq 3 : S_{3,0}(t) = c(t) = 1/2 \cdot (3 - t)^2 \quad (2.32)$$

- Représentation graphique (Figure II.15)

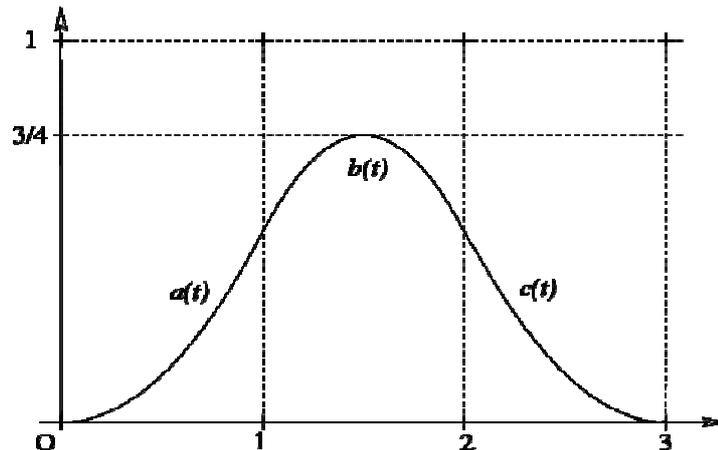


Figure II. 15 – B-spline d'ordre 3 [89]

### II.3.3 Propriétés

Les propriétés géométriques des Courbes B-spline :

- Interpolation aux points extrêmes
- Toute courbe B-spline commence par un point sur la première arête du polygone de contrôle est tangente à celui-ci (idem pour le dernier point).
- Les points intermédiaires sont des points de contrôle externes à la courbe.
- La transformée affine d'une courbe B-spline est la courbe passant par la transformée des points.
- Une courbe B-spline appartient à l'enveloppe convexe des points qui la contrôlent. Si elle est d'ordre  $n$ , elle appartient à l'enveloppe convexe de  $n-1$  points consécutifs.

## II.4 Les Courbes NURBS

Les Non Uniform Rational B-Spline (NURBS) sont des outils de modelage qui se présentent sous la forme de courbes calculées à partir de l'extrapolation de quelques points de contrôle.

Contrairement aux courbes de Bézier, on peut en modifier localement l'apparence en déplaçant certains points ou nœuds de contrôle. Ces nœuds ne sont pas distribués de manière homogène (Non uniforme) et possèdent un poids (rational) qui intervient dans le calcul d'ensemble de la courbe.

La possibilité de déplacer ces points et d'en modifier le poids permet de créer des formes d'une grande complexité avec assez peu d'éléments de contrôle.

Une courbe NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) d'ordre m est définie par [89-90-3]:

- Un vecteur de nœuds  $T = (t_0, t_1, \dots)$ ,
- n+1 points de contrôle  $P_k$
- n+1 fonctions de pondération  $R_{m,k}$  déduites des fonctions de pondération des B-spline  $S_{m,k}$  au moyen de n+1 poids  $w_k$  (généralement choisis positifs stricts) :

$$R_{m,k}(t) = \frac{w_k S_{m,k}(t)}{\sum_j w_j S_{m,j}(t)} \quad (2.33)$$

## II.4.1 Propriétés

Les propriétés géométriques des Courbes NURBS :

- En choisissant correctement les points de contrôle et les poids, toute conique peut être représentée exactement par une NURBS.
- La transformée affine d'une courbe NURBS est la courbe passant par la transformée des points.
- Contrairement aux courbes B-spline, l'image d'une courbe NURBS par une projection est la courbe NURBS passant par la projection des points. Les poids doivent être recalculés en fonction de la matrice de projection.

## II.5 Surface de Bézier

### II.5.1 Surface bi-cubique sur 16 points

Une surface bi-cubique de Bézier est définie par 16 points de contrôle  $P_{i,j}$  ( $i,j$  dans  $\{1...4\} \times \{1...4\}$ ) [89-90].

Quatre points  $M_k(t)$  ( $k$  dans  $\{1...4\}$ ) sur les courbes de Bézier cubiques définies par  $P_{k,j}$  ( $j$  dans  $\{1...4\}$ ) , et le point  $N(t,s)$  sur la courbe de Bézier définie par les quatre points  $M_k(t)$

précédents.

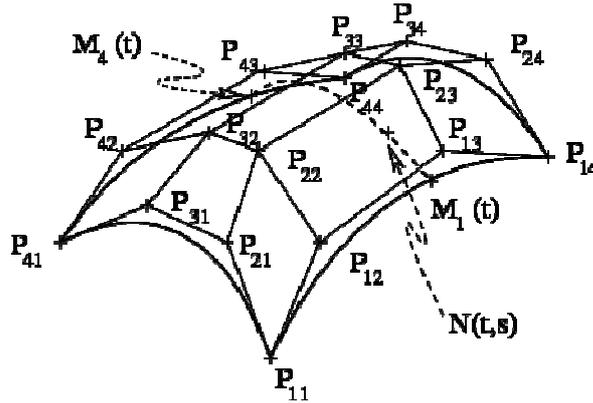


Figure II. 16– surface bi-cubique de Bézier [89].

## II.5.2 La récursive de De Casteljaou

On construit récursivement les points du patch par interpolation bilinéaire sur les paramètres u et v.

Le point sur la surface est  $M_{0,0}^n$ .

$$M_{i,j}^k(u,v) = (1-u)(1-v)M_{i,j}^{k-1}(u,v) + u(1-v)M_{i,j+1}^{k-1}(u,v) + (1-u)vM_{i+1,j}^{k-1}(u,v) + uvM_{i+1,j+1}^{k-1}(u,v) \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} k = 1 \dots n \\ i = 0, 1 \dots n-k \text{ et } j = 0, 1 \dots n-k \end{cases} \quad (2.36)$$

### II.5.2.1 Calcul matriciel de Bernstein

Calcul par produit matriciel :

- Courbe de Bézier

$$M_1(t) = \begin{bmatrix} B_0^3(t) & B_1^3(t) & B_2^3(t) & B_3^3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

- Surface de Bézier

$$N(t,s) = B_0(s)M_1(t) + B_1(s)M_2(t) + B_2(s)M_3(t) + B_3(s)M_4(t) \quad (2.38)$$

$$N(t,s) = t \begin{bmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} & P_{41} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} & P_{42} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{43} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^3(s) \\ B_1^3(s) \\ B_2^3(s) \\ B_3^3(s) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$N(t,s) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & t^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} & P_{41} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} & P_{42} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{43} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} & P_{44} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$X \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{bmatrix}$$

### II.5.3 Propriétés des surfaces de Bézier

#### II.5.3.1. Propriétés aux bords

Une surface de Bézier passe par les quatre points de contrôles aux coins.

Les quatre bords d'une surface de Bézier sont des courbes de Bézier dont les points de contrôle sont  $M_{0,j}$ ,  $M_{m,j}$ ,  $M_{i,0}$  ou  $M_{i,n}$ .

Les normales aux coins de la surface sont les produits vectoriels des tangentes aux courbes des bords.

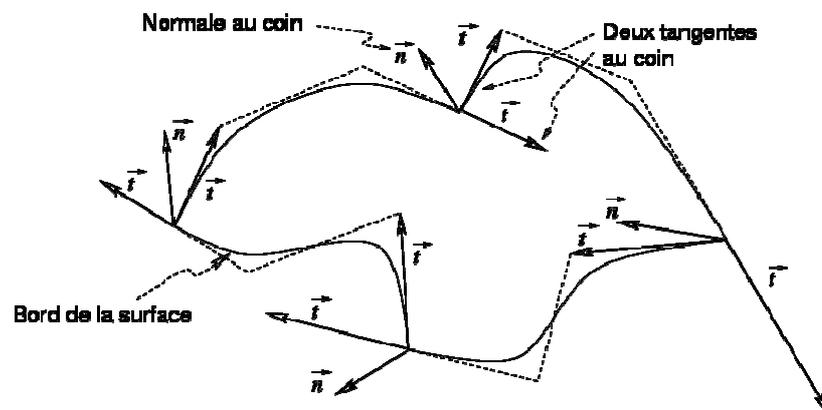


Figure II. 17– Propriété au bord des surfaces de Bézier [89].

#### II.5.3.2 Propriétés affines

Une surface de Bézier est incluse dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle.

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) = 1 \quad (2.41)$$

L'image d'une surface de Bézier par une transformation affine est la surface générée par l'image de ses points de contrôle.

## II.6 Surfaces NURBS

Les surfaces NURBS s'obtiennent par extension de la définition des courbes NURBS [3] :

- Deux vecteurs de nœuds T et S, un pour chacune des variables t et s,
- (m+1)x(n+1) points de contrôle  $P_{i,k}$ ,
- (m+1)x(n+1) fonctions de pondération  $R_{m,n,i,k}$  déduites des fonctions de pondération des

B-splines  $S_{m,k}$  au moyen de (m+1)x(n+1) poids  $w_{i,k}$  :

$$N(t,s) = \sum_{i,k} R_{m,n,i,k}(t) P_{i,k} \quad (2.42)$$

$$R_{m,n,i,k}(t) = \frac{w_{i,k} S_{m,i}(t) S_{n,k}(s)}{\sum_{j,l} w_{j,l} S_{m,j}(t) S_{n,l}(s)} \quad (2.43)$$

## II.7 Application

Plusieurs modèles ont été appliqués durant l'élaboration de cette thèse, entre autre du domaine biomécanique [94-95], ou manufacturier [96-97].

Dans cette partie nous allons présenter les plus importantes d'entre elles.

### II.7.1 Modélisation géométrique d'une ailette de turbine.

Dans l'industrie manufacturière, il existe une grande variété d'aube de turbine Figure II.18-19 [98]



Figure II. 18- Différents modèles d'ailettes de turbines à gaz



Source: NASA (2008)

Figure II. 19- Graphe de progression de modèles d'ailettes de turbine [98]

➤ La modélisation 3D d'ailette suit les étapes de créations suivantes :

Notons que La technique permettant la modélisation 3D peut être soit reverse engineering ou Strato-Conception (décrite au chapitre I), sous un logiciel de CAO (dans notre cas SOLIDWORKS).

Les étapes sont :

- Création des sections :

En faisant appel à la fonction Spline intégrée dans Solidworks.

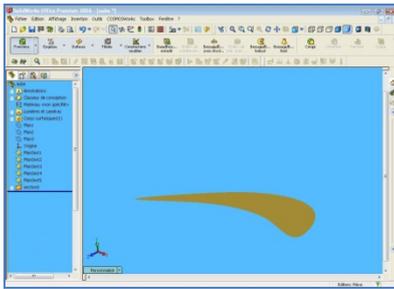


Figure II.20a- Création de la première section en profil spline Sous Solidworks

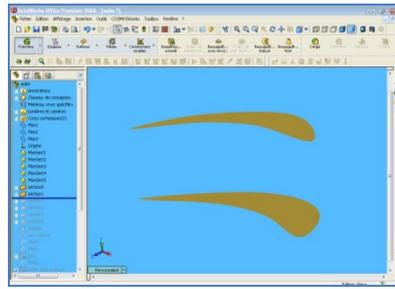


Figure II .20b- Création de la seconde section en profil spline Sous Solidworks

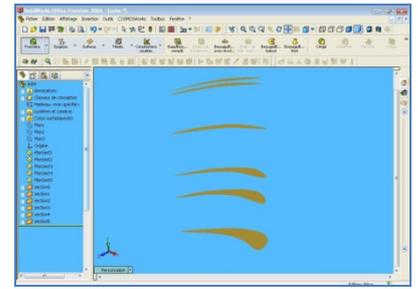


Figure II.20c- Création des autres sections en profil spline Sous Solidworks

o Création de volume

Pour créer le volume on utilise la fonction ‘loft’ permettant de joindre ces sections pour former un aubage (figure II.20d).

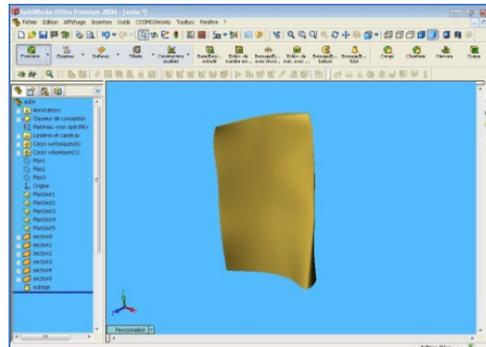


Figure II.20d- Création du volume d’aubage sous Solidworks

o Création du profil en sapin.

o Création du modèle 3D d’ailette.

o Après utilisation des différentes fonctions (symétrie d’esquisse, enlèvement et ajout de matière) le modèle 3D est obtenu (Figure II.20e, Figure II.20f).

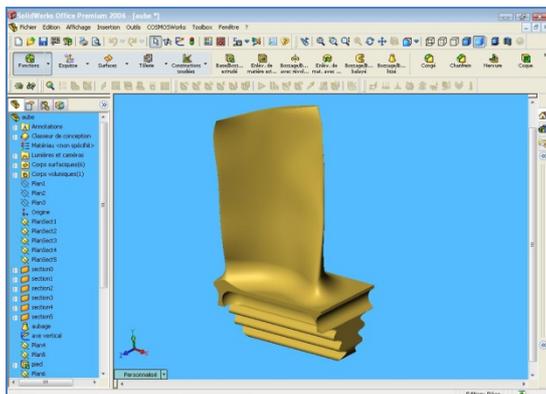


Figure II.20e- Création Final de l’ailette sous Solidworks

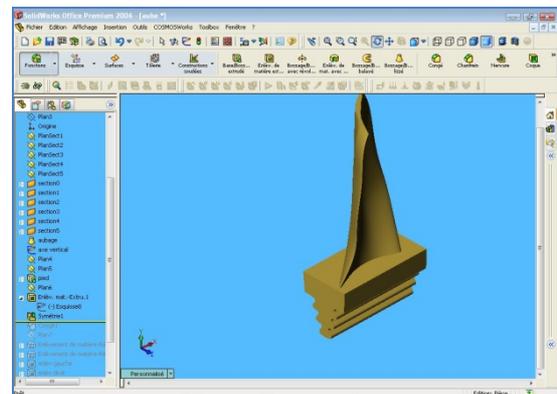


Figure II.20f – Autre vu de l’ailette sous Solidworks

## **Chapitre III**

Génération des trajectoires  
d'usinage

## III. Générations de trajectoires d'usinage

### III.1. Introduction

Le langage sur lequel se base actuellement la programmation des machines à CN est la norme 6983 qui définit les principes du code G. Ce dernier présente certains inconvénients aux vues des nouvelles stratégies d'usinage et crée une rupture de la chaîne numérique au niveau de la fabrication. De nouveaux formats, format par courbes de Béziérs et par NURBS, voient le jour actuellement dans le but de palier aux manques du code G et d'intégrer complètement la chaîne CAO-FAO-CN.

Lorsqu'on utilise des cordes des segments de droites pour décrire des géométries complexes, on aboutit à coup sûr à des programmes très lourds, difficiles à gérer et lents à exécuter. Le développement des interpolations des courbes de Béziérs et NURBS dans les CNC de dernière génération s'annonçait dans ce sens très prometteur, permettant d'usiner ces mêmes géométries complexes à l'aide de blocs programmes nettement moins nombreux, ce qui éliminait de ce fait les goulots d'étranglement de transfert de données à la commande. Notre travail a pour objectif de présenter ces nouvelles stratégies d'usinage basé sur l'interpolation des courbes de Béziérs et NURBS ainsi que leurs nouveaux formats NC. Un programme sera développé permettant de tracer les trajectoires des courbes de Béziérs et NURBS en suite de les utilisées dans un logiciel de FAO. Des exemples seront illustrés.

### III.2 Le processus d'élaboration des pièces de forme complexe

Le processus d'élaboration des pièces de forme complexe doit garantir la fidélité entre la pièce et les spécifications fonctionnelles exprimant l'idée initiale du designer (Figure III.1). Le processus se décompose en une activité de conception et une activité de fabrication. On construit tout d'abord un modèle géométrique à partir des spécifications fonctionnelles. Il constitue le modèle de référence de la maquette numérique. Les trajectoires de l'outil permettant l'usinage de la pièce ou de son empreinte (dans un moule ou une matrice) sont calculées par le module de FAO. Finalement la pièce est usinée selon les trajectoires précédemment calculées.

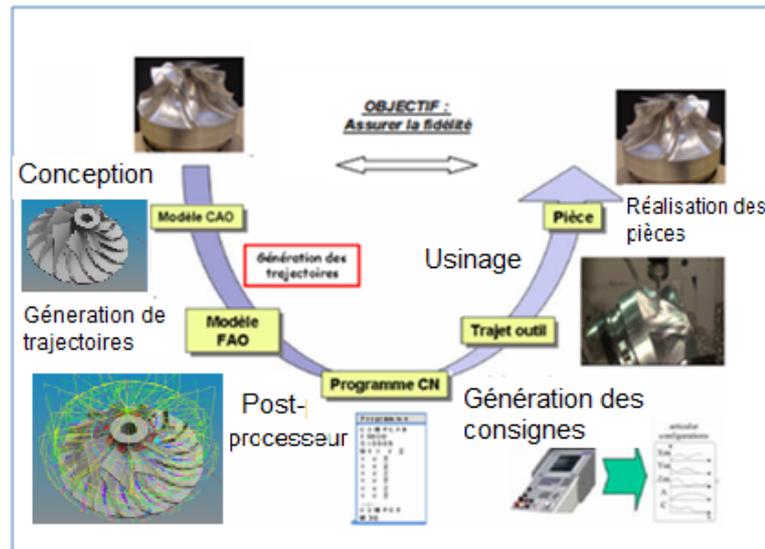


Figure III. 1–Processus d'élaboration des pièces de forme complexe.

Chaque maillon du processus est susceptible d'introduire des écarts entre la géométrie de la pièce réalisée et celle escomptée. Le premier problème est la dégradation de l'information lors de l'expression de l'idée du concepteur en données géométriques dans le modèleur 3D. En effet, les techniques de construction des surfaces restent limitées, elles ne permettent pas toujours de réaliser les formes souhaitées par le concepteur ainsi que les raccordements entre surfaces nécessaires à un usinage précis. L'utilisateur est tributaire des fonctionnalités du logiciel mis à sa disposition. La forme résultante ne correspond donc pas forcément à l'intention du concepteur mais est la plus proche représentation géométrique que le modèleur permette d'obtenir. En outre, les spécifications fonctionnelles ne sont pas exprimées en tant que telles, seule la géométrie les satisfaisant est définie dans le modèle CAO.

Les activités de génération de trajectoires et de fabrication doivent assurer la réalisation d'un produit fidèle au modèle CAO. Des écarts supplémentaires sont introduits d'abord en FAO lors du calcul de la trajectoire de l'outil, puis lors de l'usinage à cause des performances de la commande numérique, du comportement dynamique de la machine outil et des déformations de l'outil.

L'obtention des pièces de forme gauche se fait soit en fraisage à 3 ou à 5 axes en bout par balayage, soit en fraisage à 5 axes par le flanc d'un outil cylindrique ou conique. La fabrication d'une pièce nécessite la construction de passes d'usinage et leur juxtaposition en fonction d'une stratégie d'usinage. Celle-ci regroupe les choix d'un mode de guidage, d'un pas de discrétisation longitudinal (tolérance de flèche) et d'un pas de discrétisation transversal (hauteur de crête) (Figure III.2). Le choix des paramètres de tolérance de flèche et de hauteur de crête doit assurer la réalisation d'une surface réelle respectant des spécifications géométriques de défaut de forme

et d'état de surface [100], ainsi que des spécifications fonctionnelles de fidélité à la forme, c'est-à-dire le respect des arêtes vives et des sens de concavité.

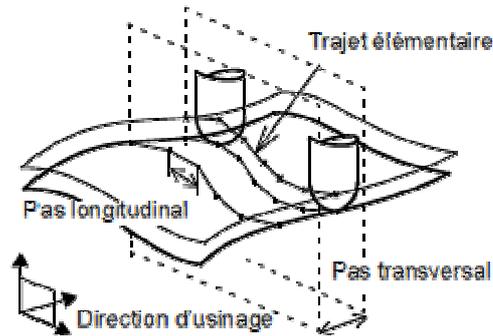


Figure III. 2–Fraisage par balayage [100]

La surface enveloppe des mouvements de l'outil ainsi générée ne respecte pas nécessairement les contraintes de forme et de continuité imposées par le concepteur. Il ne s'agit pas d'un problème de procédé puisque le copiage de forme utilisé avant le développement de la FAO permettait l'obtention de surfaces répondant à des contraintes géométriques de forme et de continuité équivalentes. La perte de qualité survient lors du transfert des spécifications géométriques de la surface nominale à l'ensemble discret des positions admissibles de l'outil.

En conclusion, le processus d'élaboration des pièces de forme gauche introduit des écarts au cœur de la maquette numérique. De nouveaux écarts apparaissent ensuite lors de l'usinage à cause d'incompatibilités entre les trajectoires programmées et les caractéristiques dynamiques de la machine. De cette constatation est né le concept de la surface d'usinage [101].

### III.2.1 Notions de continuité des surfaces

La modélisation des surfaces complexes s'effectue à l'aide de carreaux bi paramétrés raccordés selon une continuité donnée. La continuité aux raccordements peut être mathématique, notée  $C_i$ , mais également géométrique, notée  $G_i$  [102]: il y a continuité géométrique s'il existe une reparamétrisation des surfaces garantissant la continuité mathématique au raccordement. On définit également un degré de continuité:

- La continuité de degré 0, notée  $C_0$  et  $G_0$ : dans ce cas la continuité mathématique et géométrique sont équivalentes, les deux carreaux partagent une frontière commune.
- La continuité de degré 1, notée  $C_1$  et  $G_1$  : la continuité mathématique indique que les vecteurs normaux (définissant le plan tangent) sont identiques de part et d'autre du

raccordement alors que la continuité géométrique indique que les vecteurs normaux sont colinéaires.

- La continuité de degré 2, notée C2 et G2 : la continuité mathématique indique que les dérivées secondes sont égales alors que la continuité géométrique indique que les indicatrices de Dupin sont égales de part et d'autre du raccordement [103].

### III.3 Génération de trajectoires

Les machines à commande numérique conventionnelles utilisent uniquement l'interpolation linéaire G01 et l'interpolation circulaire G02, G03. Les systèmes de FAO doivent générer plusieurs segments linéaires et circulaires pour aboutir à une géométrie approximative en respectant une tolérance imposée et transmettre le programme NC à la machine CNC. Cependant lorsque la précision devient sévère, ces approches conventionnelles n'arrivent pas à résoudre les problèmes suivants:

- La tolérance élevée impose un nombre très important de segments approximisant la forme et par conséquent un volume élevé d'informations à transmettre du système FAO à la machine CNC.
- En usinage à grande vitesse la partie opérative de la machine CNC ne peut pas exécuter l'usinage avec un volume d'information important dans un temps très court.
- Variation de la vitesse d'avance et de la vitesse de coupe lors du raccordement entre deux segments linéaires.
- Discontinuité de l'accélération causant des vibrations néfastes pour la qualité d'usinage.

Ces inconvénients montrent qu'il est difficile de satisfaire les exigences de l'Usinage à Grande Vitesse (UGV) en utilisant les approches conventionnelles. Pour remédier à ces inconvénients les surfaces paramétriques Bézier, B-spline, NURBS sont adoptées par les systèmes CAO/FAO et les systèmes CNC. Les courbes NURBS ont émergées comme outil performant de représentation aussi bien pour les formes libres que pour les géométries analytiques. Les interpolateurs NURBS ne nécessitent pas une décomposition en segments linéaires et circulaires, ce qui permet de réduire le volume d'informations transmises entre CAO/FAO et le système CNC. De nos jours les NURBS sont largement utilisées dans les systèmes CAO/FAO. Les NURBS sont rarement utilisées dans le système CNC. On assiste à un regain d'intérêt pour l'introduction des NURBS dans les systèmes CNC, et seuls FANUC et SIEMENS ont réussi à implanter cette technologie dans leurs systèmes. Les études actuelles

sont généralement focalisées sur l'utilisation des NURBS sur les machines CNC à trois axes.

### III.3.1 Génération de trajectoires par format d'interpolation Bézier

Mathématiquement une courbe de Bézier paramétrique est définie par [89-90-104-105]:

$$p(u) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(u)P_i \quad (3.1)$$

$$B_{n,i}(u) = c(n,i)u^i(i-u)^{n-i} \quad (3.2)$$

$$c(n,i) = \frac{n!}{n!(n-i)!} \quad (3.3)$$

### III.3.2 Génération de trajectoires par format d'interpolation B-spline

Une courbe spline est définie par n+1 points de contrôle et n+1 fonctions de pondération [91-92-104-105-106].

Les spline de base uniforme sont définis par les expressions suivantes :

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq u \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-t_i)N_{i,k-i}(u)}{t_{i-k-1}-t_i} + \frac{(t_{i-k}-u)N_{i,k-i}(u)}{t_{i-k}-t_{i+1}} \quad (3.5)$$

Où k le contrôle du degré (k-1) du polynôme en u donner.

$$N + K + 1 = T \quad (3.6)$$

Où T le nombre de nœuds.

### III.3.3 Génération de trajectoires par format d'interpolation NURBS

La forme générale des courbes NURBS est la suivante [89-90-104-106-105-107]:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)P_i = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_iP_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} = \frac{A(u)}{w(u)} \quad (3.7)$$

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \quad (3.8)$$

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{other wise} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3.10)$$

$i=0,1,\dots,n$

Où  $P_i$  : points de contrôle

$w_i$ : les poids des points de contrôle

$W(u)$ : fonction poids

$A(u)$ : fonction B-spline

$n+1$ : nombres de points de contrôle

$p$  : le degré de la courbe NURBS

La  $m^{\text{ieme}}$  dérivation de la courbe NURBS **Piegl L.** [3], est donnée par:

$$C^{(m)}(u) = \frac{A^{(m)}(u) - \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} w^{(i)}(u) C^{(m-i)}(u)}{w(u)} \quad (3.11)$$

$$w^{(m)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(m)}(u) w_i \quad (3.12)$$

$$A^{(m)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(m)}(u) w_i P_i \quad (3.13)$$

$$N_{i,p}^{(m)}(u) = p \left( \frac{N_{i,p-1}^{(m-1)}(u)}{U_{i+p} - U_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(m-1)}(u)}{U_{i+p+1} - U_{i+1}} \right) \quad (3.14)$$

$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)!i!} = \binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \quad (3.15)$$