DESCRIPTION GEOMETRIQUE

DES SYSTEMES ARTICULES

I.1 INTRODUCTION

Pour concevoir, simuler ou commander un robot on est amené, entre autre, à décrire, sous forme d'équations mathématiques le comportement du système physique en question, soit ainsi à rechercher divers modèles (modèles géométriques, cinématiques, dynamiques,…etc.) permettant d'engendrer les mouvements du robot nécessaires pour remplir une tâche dans un environnement donné.

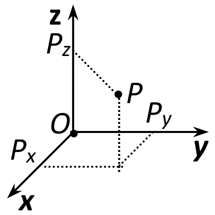
L'obtention de ces différents modèles n'est pas aisée, la difficulté varie selon la complexité de la cinématique de la chaîne articulée ; entrent en ligne de compte le nombre de degrés de liberté, le type des articulations, ainsi que le type de la chaîne cinématique qui peut être ouverte simple, arborescente ou fermée. La description que nous présentons dans le présent chapitre est fondée sur des conventions qui permettent d'avoir la même approche quelle que soit le type de la structure.

I.2 POSITION - ORIENTATION ET REPERES

I.2.1 POSITION D'UN POINT

La position d'un point "P" dans un repère {R} orthonormé direct, est définie par les coordonnées cartésiennes de ce point relativement au repère considéré.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$



I.2.2 DESCRIPTION D'UNE ORIENTATION

Etant donné deux repères {R_A} et {R_B} orthonormés directs, on définit la matrice d'orientation ${}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B$ du repère {R_B} par rapport au repère {R_A} par :

$$ {}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{x}_B & {}^{A}\boldsymbol{y}_B & {}^{A}\boldsymbol{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

Où ${}^{A}\boldsymbol{x}_B$, ${}^{A}\boldsymbol{y}_B$ et ${}^{A}\mathbf{z}_B$ désignent respectivement les cosinus directeurs des vecteurs unitaires $\boldsymbol{x}_B$, $\boldsymbol{y}_B$ et $\mathbf{z}_B$ du repère { R_B } exprimés dans le repère {R_A}.

La matrice ${}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B$ est orthogonale, ainsi sa matrice inverse est égale à la matrice transposée.

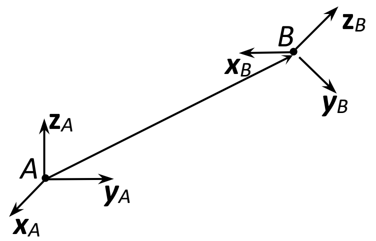
$$\left({}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B\right)^{-1} = \left({}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B\right)^{t} \qquad (3.3)$$

Ses éléments représentent les cosinus directeurs d'orientation. Elle ne contient que trois paramètres indépendants (l'un des vecteurs ${}^{A}\boldsymbol{x}_B$, ${}^{A}\boldsymbol{y}_B$ ou ${}^{A}\mathbf{z}_B$ se déduit du produit vectoriel des deux autres; par exemple ${}^{A}\boldsymbol{x}_B = {}^{A}\boldsymbol{y}_B \wedge {}^{A}\mathbf{z}_{\boldsymbol{B}}$; en outre le produit scalaire ${}^{A}\boldsymbol{x}_B * {}^{A}\boldsymbol{y}_B$ est nul et les normes de ${}^{A}\boldsymbol{x}_B$ et de ${}^{A}\boldsymbol{y}_B$ sont égales à 1).

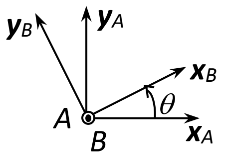
I.2.3 DESCRIPTION D'UN REPERE

Etant donnés deux repères {R_A} et {R_B}; la description de {R_B} relativement à {R_A} est définie par la matrice d'orientation du repère {R_B} par rapport au repère {R_A} et la position de l'origine du repère {R_B} exprimée dans le repère {R_A}.

$$\{\mathrm{R_B}\} = \left\{{}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B \text{ , } {}^{A}\boldsymbol{P}_B \right\} \quad \text{Avec} \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_B = \overrightarrow{AB} \qquad (3.4)$$



Exemple : $\xrightarrow{Rot\,(\theta,\, \mathbf{z}_A)}$



{R_A} {R_B}

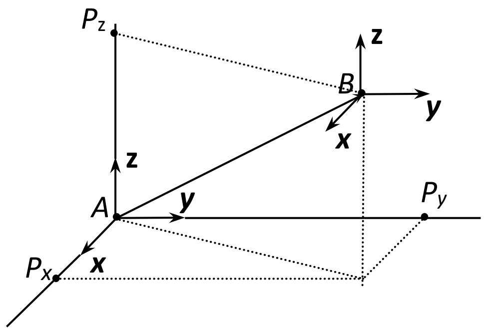
$${}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B = \begin{bmatrix} Cos(\theta) & -Sin(\theta) & 0 \\ Sin(\theta) & Cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_B = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc, la description de {R_B} relativement à {R_A} est définie par :

$$\{\mathrm{R_B}\} = \left\{ \begin{bmatrix} Cos(\theta) & -Sin(\theta) & 0 \\ Sin(\theta) & Cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

I.2.4 TRANSFORMATIONS HOMOGENES

Etant donné deux repères {R$_A$} et {R$_B$} de même base (***x***, ***y***, **z**), ayant comme origines, les deux points A et B respectivement.



La description de {R$_B$} relativement à {R$_A$} est :

$$\{R_B\} = \left\{ {}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ , } {}^{A}\boldsymbol{P}_B = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \right\}$$

La position d'un point *P* dans l'espace est définie par :

$${}^{A}\boldsymbol{P}_P = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}$$: Position de *P* dans {R$_A$}.

$${}^{B}\boldsymbol{P}_P = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}$$: Position de *P* dans {R$_B$}.

De la relation : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_P = {}^{A}\boldsymbol{P}_B + {}^{B}\boldsymbol{P}_P$ (3.5)

Sous forme matricielle :

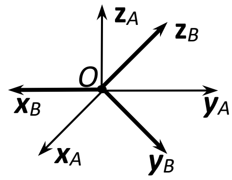
$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_P = {}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_B * {}^{B}\boldsymbol{P}_P \qquad (3.6)$$

$${}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$: dite matrice de ***transformation homogène*** d'une translation pure.

I.2.5 ROTATION PURE

Etant donné deux repères {R$_A$} et {R$_B$}de même origine (*A* = *B* = *O*) et de bases différentes: $(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{y}_A, \mathbf{z}_A)$ pour le repère {R$_A$} et $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{y}_B, \mathbf{z}_B)$ pour le repère {R$_B$}.

$$ {}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} , \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$



La description de {R_B} relativement à {R_A} est définie par : $\{R_B\} = \{{}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B \ , \ {}^{A}\boldsymbol{P}_B\}$

La position d'un point *P* dans l'espace est définie par :

$$ {}^{A}\boldsymbol{P}_P = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} $$: Position de *P* dans {R_A}.

$$ {}^{B}\boldsymbol{P}_P = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} $$: Position de *P* dans {R_B}.

Sous forme matricielle :

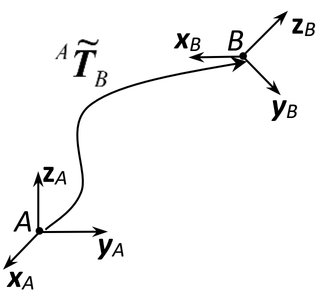
$$ \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_P = {}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_B * {}^{B}\boldsymbol{P}_P \qquad (3.7) $$

Et on peut aussi écrire : $$ \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_P = {}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_B * {}^{B}\boldsymbol{P}_P \qquad (3.8) $$

La matrice $ {}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_B = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $ dite matrice de ***transformation homogène*** d'une rotation pure.

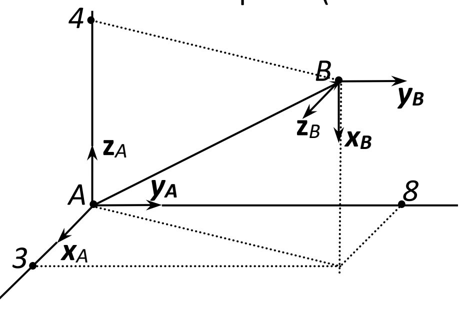
I.2.6 TRANSFORMATION DES REPERES (TRANSLATION + ROTATION)

Une transformation quelconque, de rotation et/ou de translation, appliquée au repère {R_A}, qui l'amène sur le repère {R_B}, est définie par la matrice ${}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_B$, appelée matrice de ***transformation homogène*** :



$$
{}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_{B} = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_{B} & & {}^{A}\boldsymbol{P}_{B} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (3.9)
$$

La matrice ${}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_{B}$ représente la transformation permettant de passer du repère {R_A} au repère {R_B}, cette matrice permet d'exprimer dans {R_A} les coordonnées d'un point (d'un vecteur) donné dans {R_B}.



Exemple Soient les deux repères {R_A} et {R_B} suivants :

On a

$$
{}^{A}\boldsymbol{x}_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \; ; \; {}^{A}\boldsymbol{y}_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } {}^{A}\boldsymbol{z}_{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{A}\tilde{\boldsymbol{R}}_{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \; {}^{A}\boldsymbol{P}_{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

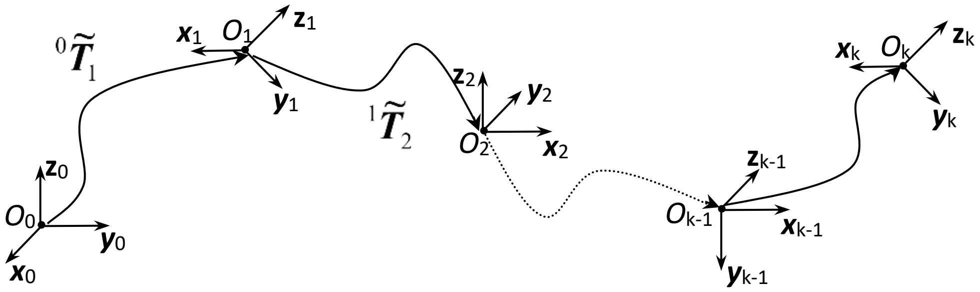
Un point P de coordonnées (-1, 3, 2) relativement à {R_B}. Ces coordonnées par rapport au repère {R_A} sont obtenues par :

$$
{}^{A}\boldsymbol{P}_{P} = {}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_{B} * {}^{B}\boldsymbol{P}_{P} \quad \text{avec} \quad {}^{A}\tilde{\boldsymbol{T}}_{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad {}^{A}\boldsymbol{P}_{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{on a donc} \quad \overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

I.2.7 TRANSFORMATIONS COMPOSEES

Etant donné k+1 repères {R_0 }, {R_1 }, {R_2 },......{R_k } dans l'espace, et ${}^{i}\tilde{\boldsymbol{T}}_{j}$ la matrice de transformation homogène permettant de passer du repère {R_i }au repère{R_j }.



Si le repère $\{R_0\}$ subit k transformations consécutives et si la $i^{éme}$ transformation (i =1,k) est définie par rapport au repère courant $\{R_{i-1}\}$ alors, la transformation $^{0}\widetilde{\boldsymbol{T}}_K$ peut être déduite de la composition des multiplications à droite de ces transformations :

$$^{0}\widetilde{\boldsymbol{T}}_K = {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{T}}_1 * {}^{1}\widetilde{\boldsymbol{T}}_2 * {}^{2}\widetilde{\boldsymbol{T}}_3 \ldots {}^{K-1}\widetilde{\boldsymbol{T}}_K \tag{3.10}$$

Où :
$$^{0}\widetilde{\boldsymbol{T}}_K = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{R}}_K & & {}^{0}\boldsymbol{P}_K \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Avec
$$\begin{cases} {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{R}}_K = {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1 * {}^{1}\widetilde{\boldsymbol{R}}_2 * {}^{2}\widetilde{\boldsymbol{R}}_3 \ldots\ldots {}^{K-1}\widetilde{\boldsymbol{R}}_K \\ {}^{0}\boldsymbol{P}_K = {}^{0}\boldsymbol{P}_1 + {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{R}}_1 * \left({}^{1}\boldsymbol{P}_2 + {}^{1}\widetilde{\boldsymbol{R}}_2 * \left({}^{2}\boldsymbol{P}_3 + \ldots\ldots + {}^{K-2}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{K-1} * \left({}^{K-1}\boldsymbol{P}_K\right)\right)\ldots\right) \end{cases} \tag{3.11}$$