MODELISATION GEOMETRIQUE

.1 INTRODUCTION

Pour analyser le comportement mécanique de la structure mécanique d'un robot ou d'un bras manipulateur, il est nécessaire de lier un repère orthonormé à chacun de ces corps et un référentiel $\{R_0\}$ attaché à la base du robot ou du bras manipulateur. L'étude des mouvements des corps revient alors à l'étude des mouvements des repères.

Etant donnés 1+ n repères $\{R_0\}$, $\{R_1\}$,............$\{R_n\}$ et un point P défini relativement au repère $\{R_n\}$ par :

$$\overrightarrow{O_n P} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

De la relation ${}^0\boldsymbol{P}_P = {}^0\tilde{\boldsymbol{T}}_n . {}^n\boldsymbol{P}_P$, la connaissance de la position de P relativement à $\{R_0\}$ revient à connaître la matrice de transformation :

$${}^0\tilde{\boldsymbol{T}}_n = {}^0\tilde{\boldsymbol{T}}_1 . {}^1\tilde{\boldsymbol{T}}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots {}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{T}}_{n-1} . {}^{n-1}\tilde{\boldsymbol{T}}_n \tag{3.38}$$

Qui renvoie elle-même sur la connaissances de la position et de l'orientation de chaque repère $\{R_i\}$ $i=1\ldots n$ par rapport au repère $\{R_{i-1}\}$. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées : la notation de *Denavit- Hartenberg*, la notation de *Paul*, la notation de *Khalil-Kleifinger*, La méthode *C-B* proposée par *Livitin* et la méthode de *Megahed*. La plus répandue est celle de *Denavit- Hartenberg*.

.2 NOTATIONS DE DENAVIT-HARTENBERG (D&H)

Ce paragraphe introduit les notations de *Denavit- Hartenberg*, qui sont utilisées pour décrire la structure géométrique des robots et qui, par conséquent, sont à la base de la mise en équations de tous les modèles de robots.

a) Les règles générales de la méthode

La méthode est basée sur les règles et les conventions suivantes:

- La variable de l'articulation A_j notée q_j.
- Le corps j est noté C_j.
- Les corps sont supposés parfaitement rigides, ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales (pas de jeu mécanique, pas d'élasticité), rotoïdes ou prismatiques.
- Le repère $\{R_j\}$ est lié au corps C_j.
- L'axe $\mathbf{z}_j$ du repère $\{R_j\}$ est porté par l'axe de l'articulation A_j.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des robots à chaîne cinématique ouverte simple de n corps, le premier corps est en liaison avec le bâti et avec le deuxième corps ; le $k^{\text{ième}}$ corps est en liaison avec le $(k-1)^{\text{ième}}$ corps et avec le $(k+1)^{\text{ième}}$ corps ; le $n^{\text{ième}}$ corps est en liaison avec le $(n-1)^{\text{ième}}$ corps. Il comporte généralement un organe de préhension qui lui permet d'effectuer une tâche déterminée. Les liaisons entre les différents corps sont à un degré de liberté, liaison pivot (rotoïde) ou liaison glissière (prismatique).

Le repère $\{R_j\}$ lié au corps C_j est défini selon les règles et les notations de Denavit- Hartenberg par :

- L'axe $\mathbf{z}_j$ est porté par l'axe de l'articulation A_j.
- L'axe $\boldsymbol{x}_j$ est porté par la perpendiculaire commune aux axes $\mathbf{z}_j$ est $\mathbf{z}_{j+1}$. Si les axes $\mathbf{z}_j$ et $\mathbf{z}_{j+1}$ sont parallèles ou colinéaires, le choix n'est pas unique : des considérations de symétrie ou de simplicité permettent alors un choix rationnel.

Le passage de $\{R_{j-1}\}$ à $\{R_j\}$ s'exprime en fonction des quatre paramètres suivants (figure 1.2) :

α_{j-1} : angle entre les axes $\mathbf{z}_{j-1}$ et $\mathbf{z}_j$ correspondant à une rotation autour de $\boldsymbol{x}_{j-1}$.

L_{j-1} : distance entre les deux axes $\mathbf{z}_{j-1}$ et $\mathbf{z}_j$ le long de $\boldsymbol{x}_{j-1}$.

θ_j : angle entre les axes $\boldsymbol{x}_{j-1}$ et $\boldsymbol{x}_j$ correspondant à une rotation autour de $\mathbf{z}_j$.

r_j : distance entre les deux axes $\boldsymbol{x}_{j-1}$ et $\boldsymbol{x}_j$ le long de $\mathbf{z}_j$.

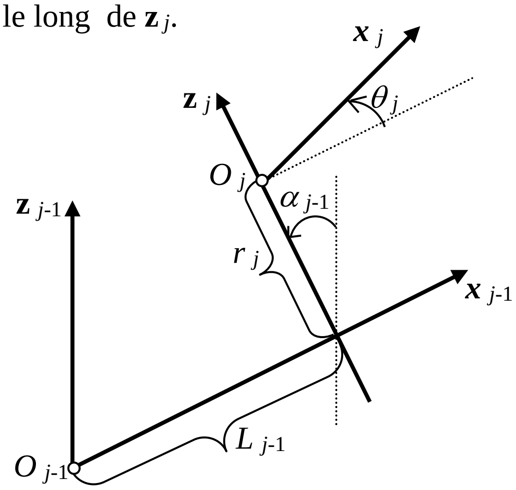

Figure 3.2

Paramètres de Denavit- Hartenberg

La variable articulaire q_j associée à la j[ième] articulation est soit θ_j ou r_j , selon que l'articulation est de type rotoïde ou prismatique. Ceci se traduit par la relation :

$$q_j = \bar{\sigma}_j * \theta_j + \sigma_j * r_j \tag{3.39}$$

Avec

$\sigma_j = 0$ si l'articulation A_j est rotoïde,

$\sigma_j = 1$ si l'articulation A_j est prismatique,

$\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$

La matrice de transformation définissant le repère $\{R_j\}$ dans le repère $\{R_{j-1}\}$ est donnée par :

$${}^{j-1}\tilde{\boldsymbol{T}}_j = Rot(\boldsymbol{x}_{j-1}, \alpha_{j-1}) * Trans(\boldsymbol{x}_{j-1}, L_{j-1}) * Rot(\mathbf{z}_j, \theta_j) * Trans(\mathbf{z}_j, r_j). \quad \Rightarrow$$

$${}^{j-1}\tilde{\boldsymbol{T}}_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & L_{j-1} \\ C\alpha_{j-1}S\theta_j & C\alpha_{j-1}C\theta_j & -S\alpha_{j-1} & -r_j * S\alpha_{j-1} \\ S\alpha_{j-1}S\theta_j & S\alpha_{j-1}C\theta_j & C\alpha_{j-1} & r_j * C\alpha_{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

On remarque que la matrice d'orientation $^{j-1}\tilde{\boldsymbol{R}}_j$ peut être obtenue par :

$$^{j-1}\tilde{\boldsymbol{R}}_j = Rot(\boldsymbol{x}_{j\text{-}1}, \alpha_{j-1}).Rot(\mathbf{z}_j, \theta_j)$$

La matrice de transformation définissant $\{R_{j-1}\}$ dans $\{R_j\}$est donnée par :

$$^{j}\tilde{\boldsymbol{T}}_{j-1} = \begin{bmatrix} {}^{j}\boldsymbol{R}_{j-1} = \left({}^{j-1}\boldsymbol{R}_j\right)^t & \vdots & -\left({}^{j-1}\boldsymbol{R}_j\right)^t . {}^{j-1}\boldsymbol{P}_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Ce paramétrage est largement répandu, pour ne pas dire qu'il est systématiquement adopté dans les modèles géométrique, cinématique et dynamique des bras manipulateurs.

Remarque

- Pour la définition du repère de référence $\{R_0\}$, le choix le plus simple consiste à prendre $\{R_0\}$ confondu avec le repère $\{R_1\}$ quand $q_1 = 0$.
- De même, en définissant l'axe $\boldsymbol{x}_n$ du repère $\{R_n\}$comme étant colinéaire à $\boldsymbol{x}_{n\text{-}1}$ lorsque $q_n = 0$.
- Pour une articulation A_j prismatique, l'axe $\mathbf{z}_j$ est parallèle à l'axe de l'articulation mais la position de cet axe dans l'espace peut être quelconque.
- Cette méthode de description fixe la configuration zéro du robot telle que $[\boldsymbol{q}] = [\mathbf{0}]$. On peut cependant choisir une autre configuration zéro quelconque en procédant au changement de variable suivant :

$$[\boldsymbol{q}_c] = [\boldsymbol{q}] - [\boldsymbol{q}_0] \tag{3.42}$$

Où $[\boldsymbol{q}_0]$ représente le décalage introduit sur les variables articulaires $[\boldsymbol{q}]$ par la nouvelle configuration zéro, et $[\boldsymbol{q}_c]$désigne le nouveau vecteur des variables articulaires.

<u>EXEMPLE 1</u> Concédèrent le robot à trois degrés de libertés RRR suivant :

<u>Les paramètres de D&H du robot RRR</u> :

j	σ_j	$L_{j\text{-}1}$	$\alpha_{j\text{-}1}$	r_j	θ_j
1	0	0	0	0	θ_1
2	0	0	90°	0	θ_2
3	0	L_2	0	0	θ_3

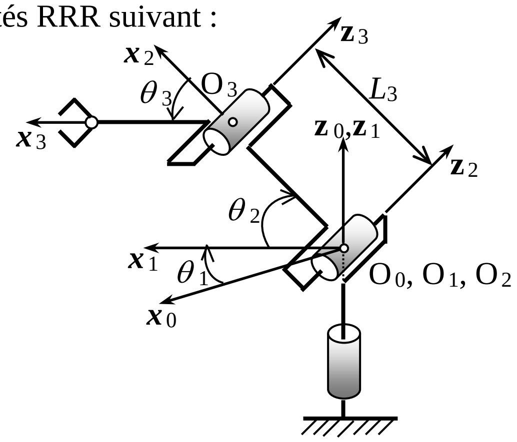

Figure 3.3
Description géométrique du robot RRR

<u>Les matrices de passage:</u>

$$^{0}\tilde{\boldsymbol{T}}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{1}\tilde{\boldsymbol{T}}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{2}\tilde{\boldsymbol{T}}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ {}^{0}\tilde{\boldsymbol{T}}_3 = {}^{0}\tilde{\boldsymbol{T}}_1 . {}^{1}\tilde{\boldsymbol{T}}_2 . {}^{2}\tilde{\boldsymbol{T}}_3 = \begin{bmatrix} C_1.C_{23} & -C_1.S_{23} & S_2 & L_2.C_1.C_2 \\ S_1.C_{23} & -S_1.S_{23} & -C_2 & L_2.S_1.C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_2.S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Soit un point P de l'organe terminal défini par $\overrightarrow{O_3P} = \begin{pmatrix} {}^{3}x \\ {}^{3}y \\ {}^{3}z \end{pmatrix}$ relativement à {R3 }.

La position de P relativement à {R0} est déterminée par la relation : ${}^{0}\boldsymbol{P}_P = {}^{0}\tilde{\boldsymbol{T}}_3 . {}^{0}\boldsymbol{P}_P$

Avec ${}^{3}\boldsymbol{P}_P = \begin{bmatrix} {}^{3}x \\ {}^{3}y \\ {}^{3}z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} {}^{0}x = {}^{3}x.\ C_1.C_{23} - {}^{3}y.C_1.S_{23} + {}^{3}z.S_2 + L_2.C_1.C_2 \\ {}^{0}y = {}^{3}x.\ S_1.C_{23} - {}^{3}y.S_1.S_{23} - {}^{3}z.C_2 + L_2.S_1.C_2 \\ {}^{0}z = {}^{3}x.\ S_{23} + {}^{3}y.C_{23} + L_2.S_2 \end{cases}$

Remarque : Le paramétrage de *Denavit- Hartenberg* n'est pas toujours unique.

EXEMPLE Description du robot RRP

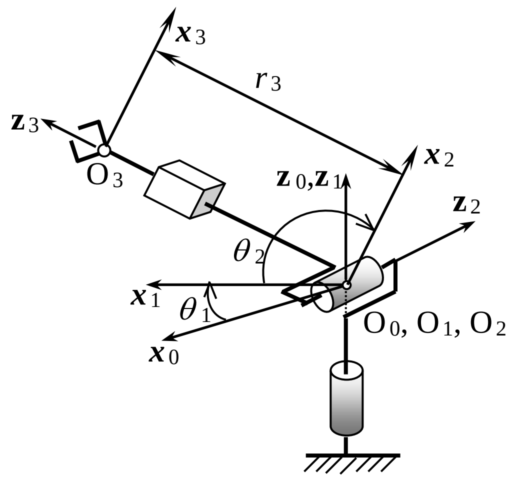

Figure 3.4
1ière *Description géométrique du robot RRP*

1er Paramétrage de D.H

j	σ_j	L_{j-1}	α_{j-1}	r_j	θ_j
1	0	0	0	0	θ_1
2	0	0	90°	0	θ_2
3	1	L_2	90°	r_3	0

2ième Paramétrage de D.H

j	σ_j	L_{j-1}	α_{j-1}	r_j	θ_j
1	0	0	0	0	θ_1
2	0	0	-90°	0	θ_2
3	1	L_2	-90°	r_3	0

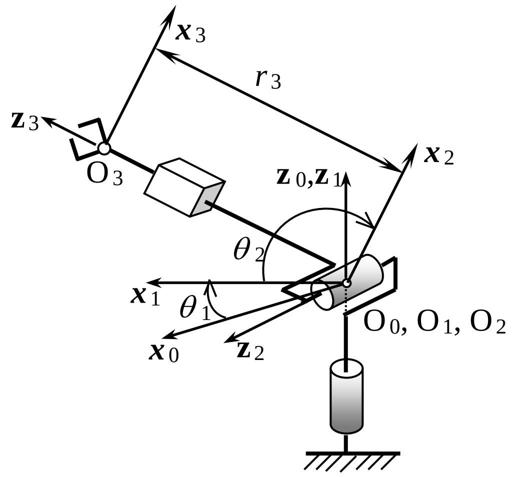

Figure 3.5
2ième *Description géométrique du robot RRP*

.3 AUTRE FORME DE DEFINITION DES PARAMETRES DE D&H

(Les paramètres de D&H modifies)

a) Convention de Khalil-Kleifinger

Les notions de cette nouvelle convention, conviennent aussi bien pour les chaînes continues ouvertes simples que pour les chaînes complexes arborescentes ou fermées.

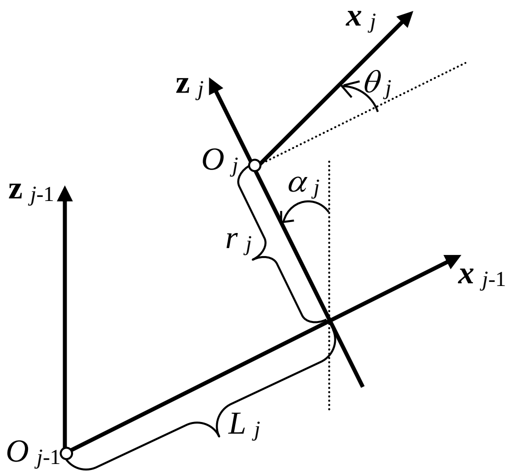

Figure 3.6
Les paramètres de Khalil-Kleifinger

La matrice de transformation définissant le repère $\{R_j\}$ dans le repère $\{R_{j-1}\}$ est donnée par :

$$^{j-1}\tilde{\boldsymbol{T}}_j = Rot(\mathbf{x}_{j-1}, \alpha_j) * Trans(\mathbf{x}_{j-1}, L_j) * Rot(\mathbf{z}_j, \theta_j) * Trans(\mathbf{z}_j, r_j). \quad \Rightarrow$$

$$^{j-1}\tilde{\boldsymbol{T}}_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & L_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j * S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j * C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

b) Convention de Paul

La convention proposée par Paul est aussi basée sur la notation de Denavit et Hartenberg. Dans cette convention la description d'un repère par rapport à un autre est définie par les quatre transformations élémentaires suivantes :

1. une rotation autour de $\mathbf{z}_{j-1}$ par un angle θ_j.
2. une translation le long de $\mathbf{z}_{j-1}$ par une distance r_j.
3. une translation le long de $\boldsymbol{x}_j$ par une distance L_j.
4. une rotation autour de $\boldsymbol{x}_j$ par un angle α_j.

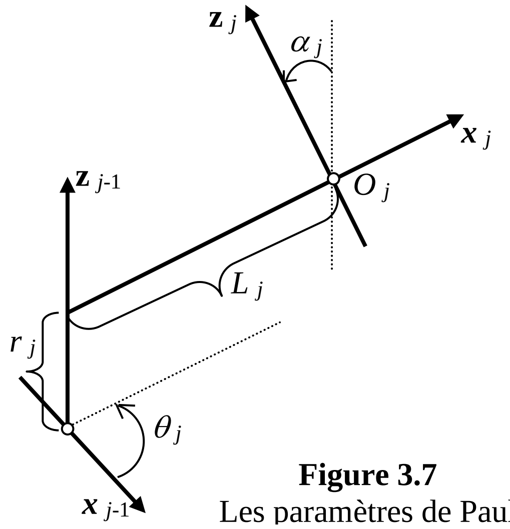

Figure 3.7
Les paramètres de Paul

La matrice de transformation définissant le repère $\{R_j\}$ dans le repère $\{R_{j-1}\}$ est donnée par :

$${}^{j\text{-}1}\tilde{\boldsymbol{T}}_j = Rot\,(\mathbf{z}_{j-1}\,,\,\theta_j) * Trans(\mathbf{z}_{j-1}\,,\,r_j) * Trans(\boldsymbol{x}_j\,,L_j)*Rot(\boldsymbol{x}_j\,,\alpha_j). \qquad \Rightarrow$$

$${}^{j-1}\tilde{\boldsymbol{T}}_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -C\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j S\theta_j & L_j * C\theta_j \\ S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j C\theta_j & L_j * S\theta_j \\ 0 & S\alpha_j & C\alpha_j & r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$