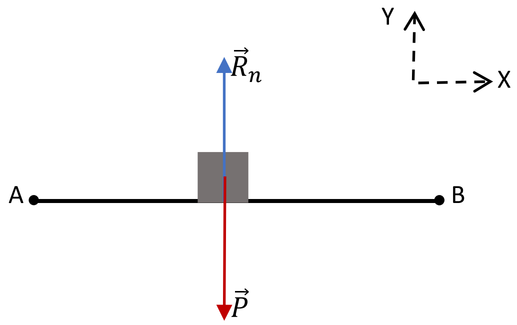
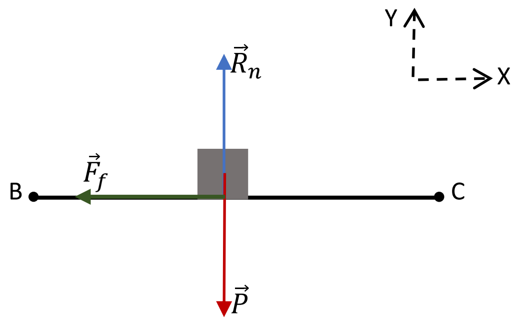
Université Batna 2 **Année Universitaire**

Socle commun sciences et technologie **2021/2022**

TD 4 P1 (F211) (DYNAMIQUE)

Exercice 1 :

1/faire le bilan des forces sur la partie AB puis sur la partie BC.

Partie AB $t \in [0-5s]$	**Partie BC $t \in [5-t_C]$**
 $\vec{P} = \vec{F}_{terre/corps}$: force à distance / $\vec{P} = m\vec{g}$ $\vec{R}_n = \vec{F}_{surface/corps}$: force de contact $PFD: \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_N} = m\vec{a}$ D'après le diagramme de l'accélération pour $t \in [0-5s]$, on a : $a = 0\ m/s^2$, donc : $\vec{P} + \overrightarrow{R_N} = \vec{0}$	 $\vec{P} = \vec{F}_{corps/terre}$: force à distance / $\vec{P} = m\vec{g}$ $\vec{F}_f = \vec{F}_{surface/corps}$: force de contact $\vec{R}_n = \vec{F}_{surface/corps}$: force de contact $PFD: \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F}_f + \overrightarrow{R_N} = m\vec{a}$

2/ donner la nature et les équations du mouvement pour les deux parties AB et BC.

Partie AB $t \in [0-5s]$	**Partie BC $t \in [5-t_C]$**
à $t = 0s$: $\begin{cases} x_0 = x_A = 0m \\ v_0 = v_A = 10\,m/s \end{cases}$ on a : $a = 0\ m/s^2 \rightarrow MRU$ $\begin{cases} a = 0\ m/s^2 \\ v = v_0 = cte \\ x = v_0 t + \underbrace{x_0}_{=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0\ m/s^2 \\ v = 10\ m/s \\ x = 10t \end{cases}$	D'après le diagramme de l'accélération : $a = -2\,m/s^2 = cte \rightarrow$ MRUV Décéléré $\begin{cases} a = cte \\ v = at + v_B \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_B t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2\ m/s^2 \\ v = -2t + 10 \\ x = -t^2 + 10t \end{cases}$

3/ en déduire les distances AB et BC.

Partie $AB\ t \in [0-5s]$	**Partie $BC\ t \in [5-t_C]$**
$MRU \Rightarrow AB = x(5s)$ $\Rightarrow AB = 10.5$ $\Rightarrow AB = 50\ m$	MRUV $\Rightarrow 2a\underbrace{(x_f - x_i)}_{BC} = v_f^2 - v_i^2$ $\Rightarrow BC = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$ / $v_f = 0\ m/s$ (arrêt) $\Rightarrow BC = \frac{(0)^2 - (10)^2}{2(-2)}$ $\Rightarrow BC = 25\ m$

4/calculer le coefficient de frottement dynamique μ sur la partie BC.

Sur la partie BC : $\vec{P} + \vec{F_f} + \overrightarrow{R_N} = m\vec{a}$

Par projection :

$$\begin{cases}(OX): 0 - F_f + 0 = ma \\ (OY): -P + 0 + R_N = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_f = -ma \\ R_N = P = mg\end{cases}$$

$$\mu = \frac{F_f}{R_N} = \frac{-ma}{mg} = -\frac{a}{g} = -\frac{(-2)}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow \mu = 0.2$$

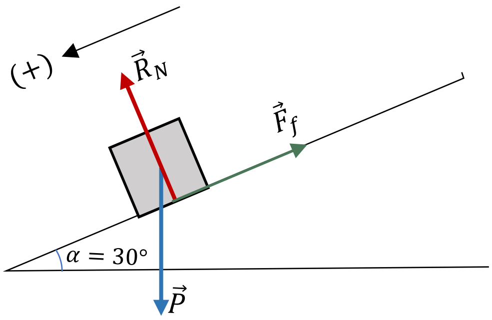
Université Batna 2 **Année Universitaire**

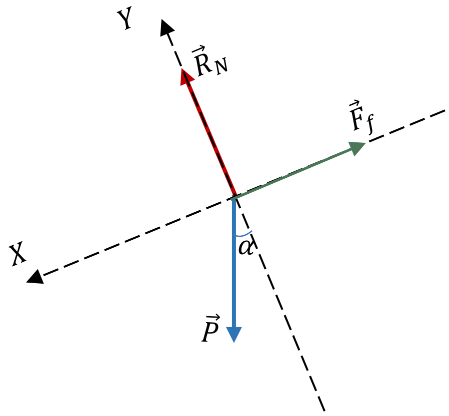
Socle commun sciences et technologie **2021/2022**

Exercice 2 :

1. **Calculer l’accélération du mobile M sur le trajet AB ($\vec{a}$ = ?) :**

En appliquant le PFD :





$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \overrightarrow{F_f} + \overrightarrow{R_N} = m\vec{a}$$

Par projection :

$$\begin{cases} (OX): P\sin\alpha - F_f = ma \longrightarrow (1) \\ (OY): -P\cos\alpha + R_N = 0 \longrightarrow (2) \end{cases} \quad \text{Avec} \quad P = mg$$

$$(1) \Rightarrow a = g\sin\alpha - \frac{F_f}{m}$$

On sait que :

$$\mu_c = \frac{F_f}{R_N} \Rightarrow F_f = \mu R_N$$

$$(2) \Longrightarrow R_N = mg\cos\alpha$$

D’où :

$$F_f = \mu_c mg\cos\alpha$$

Alors :

$$a = g\sin\alpha - \frac{\mu_c mg\cos\alpha}{m} \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)$$

AN : $a = 10(0{,}5 + 0{,}2.0{,}87) \Rightarrow a = 3{,}27\ m/s^2$ et $\vec{a} = 3{,}27\vec{\imath}$

Si sa vitesse au point B est V_B = 2 m/s, en déduire la valeur de la vitesse au point A (V_A = ?)

$$a = 3{,}27\ m/s^2 = cte \rightarrow MRUV$$

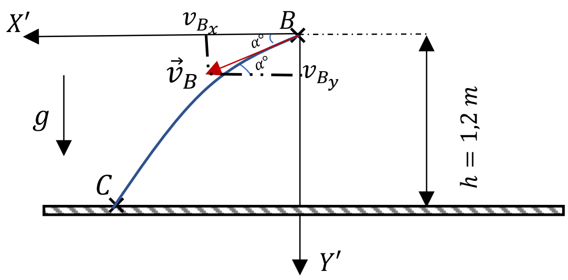
On peut utiliser l’indépendante du temps :

$$2a(x_f - x_i) = v_f^2 - v_i^2 \Rightarrow 2a(AB) = v_B^2 - v_A^2$$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{v_A^2 - 2a(AB)} \Rightarrow v_B = \sqrt{(2)^2 - 2.3{,}27.30.10^{-2}} \Rightarrow v_B = 1{,}43\ m/s$$

2/ au point B le mobile M tombe, il atteint le sol au point C. La hauteur h du point C est h = 1,2 m. En utilisant les équations du mouvement du projectile :

a. Donner les coordonnées du point C (x'_C, y'_C) dans le repère(BX', BY')



$$B\begin{cases}x_B = 0\\ y_B = -1{,}2\end{cases}(m)$$

$$\vec{v}_B\begin{cases}v_{B_x} = v_B\cos\alpha = 1{,}73\\ v_{B_y} = v_B\sin\alpha = 1\end{cases}(m/s)$$

Par projection sur le nouveau repère (BX', BY') :

$$(BX'): MRU \Rightarrow \begin{cases}a_x = 0\ m/s^2\\ v_x = v_{B_x} = cte\\ x = v_{B_x}t + x_B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_x = 0\ m/s^2\\ v_x = 1{,}73\ m/s\\ x = 1{,}73t\end{cases}$$

$$(BY'): MRUV \Rightarrow \begin{cases}a_y = g = cte\\ v_y = gt + v_{B_y}\\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_{B_y}t + y_B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_y = 10\ m/s^2\\ v_y = 10t + 1\\ y = 5t^2 + t - 1{,}2\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases}x = 1{,}73t\\ y = 5t^2 + t - 1{,}2\end{cases}$$

La hauteur maximale est définie par :

$$y = 0 \Rightarrow 5t^2 + t - 1{,}2 = 0$$

C'est une équation du 2$^{\text{ème}}$ ordre, alors :

$$\Delta = (1)^2 - 4(5)(-1{,}2) = 25 \Rightarrow \begin{cases}t_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2(5)} = -0.6s\\ t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2(5)} = 0{,}4s\end{cases}$$

D'où $t = 0{,}4s$

En remplaçant dans les équations du mouvement déjà obtenues, on obtient :

$$\begin{cases} x = 1{,}73(0{,}4) = 0{,}69\ m \\ y = 5(0{,}4)^2 + 0{,}4 - 1{,}2 = 1{,}2m \end{cases}$$

Alors, la position de chute du mobile (point C) est :

$$C\colon \begin{cases} x_c' = 0{,}69 \\ y_c' = 1{,}2 \end{cases} \quad (m)$$

b. Déduire la vitesse du mobile au point C (v_C = ?)

On a trouvé :

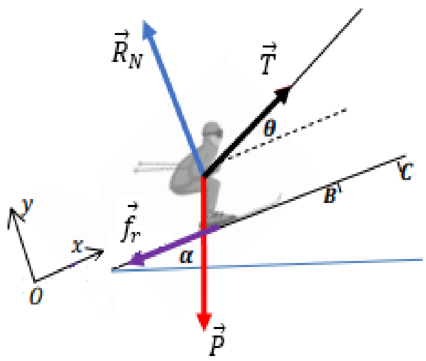
$$\begin{cases} v_x = 1{,}73 \\ v_y = 10t + 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_C\colon \begin{cases} v_x = 1{,}73 \\ v_y = 10(0{,}4) + 1 = 5 \end{cases} (m/s)$$

$$v_C = \sqrt{(1{,}73)^2 + (5)^2} \Rightarrow \quad v_C = 5{,}29\ m/s$$

Exercice 3 :

1. Le bilan des forces qui s'applique sur le skieur (voir figure)

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- La tension de corde $\vec{T}$
- La réaction normale $\vec{R}_N$
- Force de frottement $\vec{f}_r$



2. Le coefficient de frottement cinétique μ entre la neige et les skis :

Comme le skieur monte à vitesse constante $\vec{v} = 45\,\vec{\imath}\,(m/s) \;\Rightarrow\; \vec{a} = \vec{0}$

donc le mouvement est rectiligne uniforme

En utilisant la 1[ere] loi de Newton (principe d'inertie) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{p} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{f}_r = \vec{0}$$

En projetant selon les axes (ox, oy) :

$$\begin{cases} -p\sin\alpha + T\cos\theta - f_r = 0 \\ -p\cos\alpha + T\sin\theta - R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg\sin\alpha + T\cos\theta = \mu R_N & (1) \\ mg\cos\alpha - T\sin\theta = R_N & (2) \end{cases}$$

et : $f_r = \mu R_N$

En substituant l'expression de la réaction R_N dans l'équation (1), on obtient :

$$-mg\sin\alpha + T\cos\theta = \mu\,(mg\cos\alpha - T\sin\theta) \;\Rightarrow\; \mu = \frac{-mg\sin\alpha + T\cos\theta}{mg\cos\alpha - T\sin\theta}$$

$$\mathbf{A.N:}\quad \mu = \frac{-40.10\ \sin 15 + 250\cos 30}{40.10\cos 15 - 250\sin 30} \;\Rightarrow\; \mu = 0.43$$

3. La quantité de mouvement de skieur :

$$\vec{P} = m\vec{v} = 40 \times 45\,\vec{\imath} = 1800\,\vec{\imath}$$

4. L'accélération que subirait le skieur s'il lâche le câble du tire au point B :

Donc la force de traction du câble est nulle $\vec{T} = \vec{0}$ entre le point B et C, $a \neq 0$

D'après le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{p} + \vec{R}_N + \vec{f}_r = m\,\vec{a}$$

Projection selon (ox, oy) :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha - f_r = m\,a \\ \\ -mg\cos\alpha + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg\sin\alpha - \mu R_N = ma & (3) \\ \\ mg\cos\alpha = R_N & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow -mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha = ma \quad \Rightarrow \quad a = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$a = -10(\sin 15 - 0.43\cos 15) \Rightarrow \begin{cases} a = -6.74\ (m/s^2) \\ \vec{a} = -6.74\,\vec{\imath}\ \ (m/s^2) \end{cases}$$

5. La vitesse du skieur en haut de la piste (point C) :

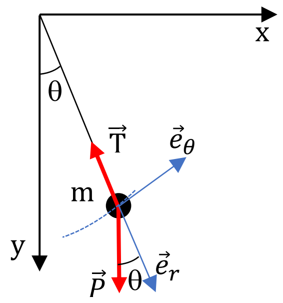
$$v_C^2 - v_B^2 = 2\,a\,(x_C - x_B) \ \Rightarrow\ v_C^2 = 2a\,BC + v_B^2$$

$v_B = 45\ m/s$, la distance $BC = 118\ m$

$$\Rightarrow\ v_C^2 = 2(-6.74)\,118 + 45^2 \quad \Rightarrow\ v_C = 20.84\,m/s$$

$\vec{v}.\vec{a} < 0$ donc le mouvement est rectiligne uniformément décéléré.

Exercice 4 :



1. La vitesse de M :

Dans la base polaire :

Le vecteur position: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ avec $r = l$

Le vecteur position: $\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$$r = l \Rightarrow \vec{V} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

2. Le bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$

3. L'équation horaire du mouvement $\theta(t)$:

Le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Par projection sur $((\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{cases} \vec{e}_r\text{: } P\cos\theta - T = ma_r \\ \vec{e}_\theta : -P\sin\theta = ma_\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_r = -l\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = l\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r\text{: } mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 & \rightarrow (1) \\ \vec{e}_\theta : -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} & \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$\text{de (2):} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Pour des faibles oscillations on a : $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Equation différentielle du 2ème ordre sans second membre.

$$\ddot{\theta} + w_0\theta = 0 \quad \text{avec } w_0 = \sqrt{g/l} \Rightarrow \mathrm{w}_0\text{: pulsation propre}$$

La solution de cette équation est :

$$\theta(t) = A\cos w_0 t + B\sin w_0 t$$

Condition initial : à t = 0 s : $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = A\cos w_0(0) + B\sin w_0(0) \\ 0 = -A\sin w_0(0) + B\cos w_0(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = A \\ 0 = B \end{cases}$

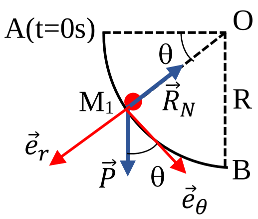
Donc l'équation horaire est :

$$\theta(t) = \theta_0\cos\sqrt{g/l}\,t$$

Exercice 5 :

1. La vitesse au point M_1 :

D'après le principe fondamental de la dynamique :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \implies \vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

En coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \Rightarrow \vec{V} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \underbrace{R\ddot{\theta}}_{a_\theta}\vec{e}_\theta \underbrace{-R\dot{\theta}^2}_{a_r}\vec{e}_r$$

Par projection sur les axes :

$$\begin{cases} \vec{e}_r:\ P\sin\theta - R_N = ma_r = -m\,R\dot{\theta}^2 & \rightarrow (1) \\ \vec{e}_\theta:\ P\cos\theta = ma_\theta = m\,R\ddot{\theta} & \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$\text{de (2)}:\quad mg\cos\theta = m\,R\ddot{\theta} \Rightarrow g\cos\theta = R\frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

En multipliant le deuxième terme par : $\dfrac{d\theta}{d\theta}$

$$\Rightarrow g\cos\theta = R\frac{d\dot{\theta}}{dt} = R\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \times \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}} = R\,\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta\ d\theta \Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{g}{R}\int_0^{\theta}\cos\theta\ d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}[\theta^2]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = \frac{g}{R}[\sin\theta]_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) = \frac{g}{R}\sin\theta$$

La relation entre la vitesse linière et la vitesse angulaire est donné par la formule :

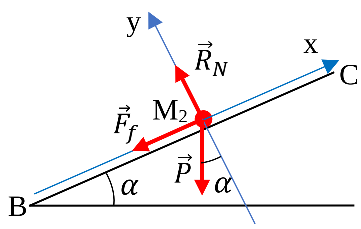
$$\dot{\theta} = \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{R^2} \quad \Rightarrow (V^2 - V_0^2) = 2\frac{gR^2}{R}\sin\theta \Rightarrow V^2 = 2\,gR\sin\theta + V_0^2$$

$$\Rightarrow V(M_1) = \sqrt{2\,gR\sin\theta + V_0^2}$$

2. La vitesse au point M_2 :

En appliquant du principe fondamental de la dynamique dans la partie BC :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \implies \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_f = m\vec{a}$$



$$\begin{cases} Ox:\ -P\sin\theta - F_f = ma \quad \rightarrow\ (1) \\ Oy:\ P\cos\theta - R_N = 0 \quad \rightarrow\ (2) \end{cases}$$

$$\text{de } (1):\ -mg\sin\theta - \mu R_N = ma \qquad \text{et} \qquad \text{de } (2):\ \mathrm{mg}\cos\theta = R_N$$

$$\Rightarrow\ -mg\sin\theta - \mu \mathrm{mg}\cos\theta = ma\ \Rightarrow\ -mg(\sin\theta + \mu\cos\theta) = ma$$

$$\Rightarrow\ a = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

Sachons que :

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dV}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{V} = V\frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow\ V\,dV = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,dx\ \Rightarrow\ \int_{V_B}^{V} V\ dV = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)\int_0^x dx$$

$$\Rightarrow\ \left.\frac{V^2}{2}\right|_{V_B}^{V} = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,x|_0^x\ \ \Rightarrow V^2 = -2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,x + V_B^2$$

$$\Rightarrow V\ (M_2) = \sqrt{-2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,x + V_B^2}$$

$$V_B\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2\ gR\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + V_0^2} = \sqrt{2\ gR + V_0^2}$$

$$\Rightarrow V\ (M_2) = \sqrt{-2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,x + 2\ gR + V_0^2}$$

3. La vitesse au point d'arrivée C :

Au point d'arrivée C : $x = l$

$$\Rightarrow V\ (C) = \sqrt{-2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)l + 2\ gR + V_0^2}$$

Exercice 6 :

Le vecteur position d'un corps M de masse m = 3 Kg est :

$$\overrightarrow{OM} = t(t-3)\,\vec{\imath} - 2t^2\,\vec{\jmath} + (2t-1)\,\vec{k}$$

1. La force $\vec{F}$ agissant sur ce corps :

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \\ \text{et} \\ \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{V} = (2t-3)\,\vec{\imath} - 4t\,\vec{\jmath} + 2\,\vec{k} \\ \\ \vec{a} = 2t\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 3(2t\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath}\,) = 6t\,\vec{\imath} - 12\,\vec{\jmath} \quad (N)$$

2. Le moment $\vec{M}(\vec{F})$ par rapport à l'origine :

$$\vec{M}(\vec{F})_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ (t^2-3t) & -2t^2 & (2t-1) \\ 6t & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}(\vec{F})_{/O} = \big((-2t^2)0 - (-12)(2t-1)\big)\vec{\imath} - \big((t^2-3t)(0) - 6t(2t-1)\big)\,\vec{\jmath}$$

$$+ \big((t^2-3t)(-12) - 6t(-2t^2)\big)\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}(\vec{F})_{/O} = (24t+12)\vec{\imath} + (12t-6)\,\vec{\jmath} + 36t\,\vec{k} \quad (N.m)$$

3. La quantité de mouvement :

$$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{V} = 3\big((2t-3)\,\vec{\imath} - 4t\,\vec{\jmath} + 2\,\vec{k}\,\big)$$

$$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{V} = (6t-9)\,\vec{\imath} - 12t\,\vec{\jmath} + 6\,\vec{k}$$

4. Le moment cinétique par rapport à l'origine :

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ (t^2-3t) & -2t^2 & (2t-1) \\ (6t-9) & -12t & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{/O} = \big((-2t^2)(6) - (-12t)(2t-1)\big)\vec{\imath} - \big((t^2-3t)(6) - (6t-9)(2t-1)\big)\,\vec{\jmath}$$

$$+ \big((t^2-3t)(-12t) - (6t-9)(-2t^2)\big)\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{/O} = (12t^2-12t)\vec{\imath} - (-6t^2+6t-9)\,\vec{\jmath} + 24t^2\vec{k} \quad (kg.m^2/s)$$