Semestre : 1

Unité d’enseignement : UEM 1.1

M1 AUTOMATIQUES ET SYSTEMES

Techniques d’Identification

Crédits: 3 **Coefficient: 2**

Pr. O. ASSAS
Département d’éléctronique
Faculté de technologie
Université Batna 2

Chapitre 2:

Méthode des moindres carrés.

Plan du cours

- 1 Principe .
- 2 Algorithme.
- 3 Exemple 1.
- 4 Homework 1

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

PRINCIPE

Le principe général de cette méthode est de choisir le jeu de paramètres d'un modèle que l'on définira, de telle sorte qu'il minimise la somme des carrés de la différence entre les valeurs prédites par le modèle et les valeurs observées

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Pour l'identification des paramètres, on dispose d'un vecteur de mesures :

$$\underline{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_N]^T$$

Et on veut construire un vecteur estimé, via le modèle et ses paramètres :

$$\underline{\widehat{y}} = [\widehat{y_1} \ \widehat{y_2} \ \cdots \ \widehat{y_N}]^T$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

On suppose qu'une séquence (u(1); u(2); ; u(N)) a été appliquée en entrée, et que la séquence des sorties correspondantes a été observée (y(1); y(2); ; y(N)). Notons d'ores et déjà que la prédiction par le modèle de by(k+1) est réalisée à partir des mesures antérieures, et non des prédictions antérieures.

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Comme les échantillons u(k−d), . . . , u(k−d−m) sont données et les ´échantillons y(k), . . . , y(k − n) sont mesurés, l'erreur d'équation ee(k) est linéaire par rapport aux paramètres θ, c'est-`a-dire ai et bj (i = 1, 2, ...n; j = 0, 1, . . . ,m).On peut ´également écrire l'équation (3.22) sous la forme:

$$e_e(k) = y(k) - [-a_1 y(k-1) - \ldots - a_n y(k-n) + b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \ldots + b_m u(k-d-m)]$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Il convient donc d'établir le modèle à partir de l'´équation précédentes on a:

$$\varepsilon(k) = y(k) - \varphi^T(k)\theta$$

avec

$$\varphi^T(k) = [-y(k-1), \ldots, -y(k-n), u(k-d), \ldots, u(k-d-m)]$$
$$\theta^T = [a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m]$$

où φ(k) représente le vecteur des variables explicatives (ou régresseur), θ le vecteur des paramètres à identifier et ε(k) l'erreur d'´équation écrite sous la forme générique d'erreur de prédiction.

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Le modèle Précèdent est linéaire par rapport aux paramètres à identifier θ. L'algorithme des moindres carrés présenté ci-dessous sera valable pour tout modèle qui peut s'écrire sous la forme précédente. En accumulant N mesures, par exemple aux instants discrets k = 1, 2, ...N, l'équation précédente donne sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} \theta$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

que l'on note:

$$\mathcal{E} = Y - \Phi\theta$$

avec les dimensions suivantes:

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{E} & : & (N \times 1) & \text{vecteur d'erreurs} \\
Y & : & (N \times 1) & \text{vecteur de mesures} \\
\Phi & : & (N \times p) & \text{matrice d'observations} \\
\theta & : & (p \times 1) & \text{vecteur de paramètres}
\end{array}$$

où p = n + m + 1 représente le nombre de paramètres à identifier. Remarquons que

$$\varphi^T(1) = [-y(0), \ldots, -y(1-n), u(1-d), \ldots, u(1-d-m)]$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

contient des éléments avec des indices de temps négatifs. Ces éléments sont inconnus et seront choisis nuls en supposant que le système dynamique soit initialement au repos. Si cela n'est pas le cas, on mettra l'entrée à zéro et attendra que le système atteigne l'état stationnaire (environ 3-5 constantes de temps) avant d'accumuler les N mesures. Si les mesures ont déjà été prises et ne proviennent pas d'un système initialement au repos, il convient alors d'identifier en plus les conditions initiales du système $y(0), y(-1), \ldots, y(1-n), u(1-d), \ldots, u(1-d-m)$, ce qui a pour effet de doubler le nombre de grandeurs à identifier!

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

La minimisation de l'erreur de prédiction quadratique s'´ecrit ainsi:

$$\begin{aligned}\min_{\theta} J(\theta) &= \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^2(k) = \mathcal{E}^T \mathcal{E} \\ &= [Y - \Phi\theta]^T [Y - \Phi\theta] = Y^T Y - 2Y^T \Phi\theta + \theta^T \Phi^T \Phi\theta\end{aligned}$$

Le vecteur de paramètres ˆθ qui minimise l'équation précédente annule le gradient de J par rapport à θ:

$$\left.\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2\Phi^T Y + 2\Phi^T \Phi\hat{\theta} = 0$$

équation normale

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

d'où l'on tire:

$$\hat{\theta} = \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T Y$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Exemple 1

Enoncé: La réponse indicielle d'un système lscr (linéaires, stationnaires, causals et initialement au repos) a donné pour les 3 premiers points d'échantillonnage (T = 0.2) les valeurs suivantes: y1 = 0.18; y2 = 0.33 et y3 = 0.45. Le système peut être modélisé par la fonction de transfert du premier ordre:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés refaire

A. Trouver l'équation aux différences du système

B. Identifier le système dynamique, c'est-`a-dire déterminer les valeurs numériques de a1 et b1.

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Solution: Sortie du modèle sur la base des entrées passées uniquement (erreur de sortie):

$$y_m(k) = -a_1 y_m(k-1) + b_1 u(k-1) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Prédiction du modèle sur la base des entrées et sorties passées (erreur d'équation):

$$\hat{y}(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Données numériques pour un saut indiciel:

$$\begin{array}{llr} u(0)=1, & y(0)=0 & \text{condition initiale} \\ u(1)=1, & y(1)=0.18 & \\ u(2)=1, & y(2)=0.33 & \\ u(3)=1, & y(3)=0.45 & \end{array}$$

En les substituant dans l'équation du modèle et le modèle estimé

$$\hat{y}(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(1) &= -a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 = b_1 \\ \hat{y}(2) &= -a_1 \cdot 0.18 + b_1 \cdot 1 = -0.18 a_1 + b_1 \\ \hat{y}(3) &= -a_1 \cdot 0.33 + b_1 \cdot 1 = -0.33 a_1 + b_1 \end{aligned}$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Critère quadratique pour minimiser l'erreur d'équation :

$$\min_{\theta} J(\theta) = \sum_{k=1}^{N} e_e^2(k) = \sum_{k=1}^{N} [y(k) - \hat{y}(k,\theta)]^2$$

Celà donne pour N = 3 et $\theta = [a_1\ b_1]_T$:

$$\min_{\theta}\{[0.18 - b_1]^2 + [0.33 + 0.18a_1 - b_1]^2 + [0.45 + 0.33a_1 - b_1]^2\}$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

Minimisation de l'erreur d'équation $\sum_{k=1}^{3} e_e^2(k)$
A partir de (4):

$$\min_{\theta}\{[0.18 - b_1]^2 + [0.33 + 0.18a_1 - b_1]^2 + [0.45 + 0.33a_1 - b_1]^2\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a_1} &= 2(0.33 + 0.18a_1 - b_1)0.18 + 2(0.45 + 0.33a_1 - b_1)0.33 \\
&= 0.4158 - 1.02b_1 + 0.2826a_1 = 0 \\
\frac{\partial J}{\partial b_1} &= 2(0.18 - b_1)(-1) + 2(0.33 + 0.18a_1 - b_1)(-1) \\
&\quad +2(0.45 + 0.33a_1 - b_1)(-1) = -1.92 - 1.02a_1 + 6b_1 = 0
\end{aligned}$$

Ce système de deux équations algébriques à deux inconnues possède une solution unique qui est aisément calculable:

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

$$a_1 = -0.819 \qquad b_1 = 0.181$$

On obtient ainsi la fonction de transfert:

$$\overline{\hat{G}}(z) = \frac{0.181 z^{-1}}{1 - 0.819 z^{-1}}$$

Chapitre 2: Méthode des moindres carrés

DEVOIR A DOMICILE

Prenant un model polynomial d'un système non linéaire continu :

$$y(t) = \theta_o + \theta_1 u(t) + \theta_2 u(t)^2$$

SOLUTION

$$\theta = [1\ 2\ 3]$$

Les donnes de test sont

$$u(1) = 1,\ \ u(2) = 2,\ \ u(3) = 3,\ \ u(4) = 4$$
$$y(1) = 6,\ \ y(2) = 17,\ \ y(3) = 34,\ \ y(4) = 57$$

Solution

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & u(1) & u(1)^2 \\ 1 & u(2) & u(2)^2 \\ 1 & u(3) & u(3)^2 \\ 1 & u(4) & u(4)^2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 34 \\ 57 \end{pmatrix} \qquad \hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

Merci pour
votre attention

Questions ????