PHYSIQUE 2 / TD 01

(RAPPELS MATHEMATIQUES)

EXERCICE 1/ Soit T (x,y) = $x^2 + y^2$ et $\vec{V}$ = < 2xy ; x2 ; x3 + y3 >

1/ calculer $\overrightarrow{grad}$ T ; 2/ calculer div $\vec{V}$; 3/ calculer $\overrightarrow{Rot}\ \vec{V}$

EXERCICE 2/ Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :

a/ f(x,y) = x2(x+y)

c/ f(x,y) = xy

b/ f(x,y,z,t) = $\frac{1}{(x+y+z+t)^2}$

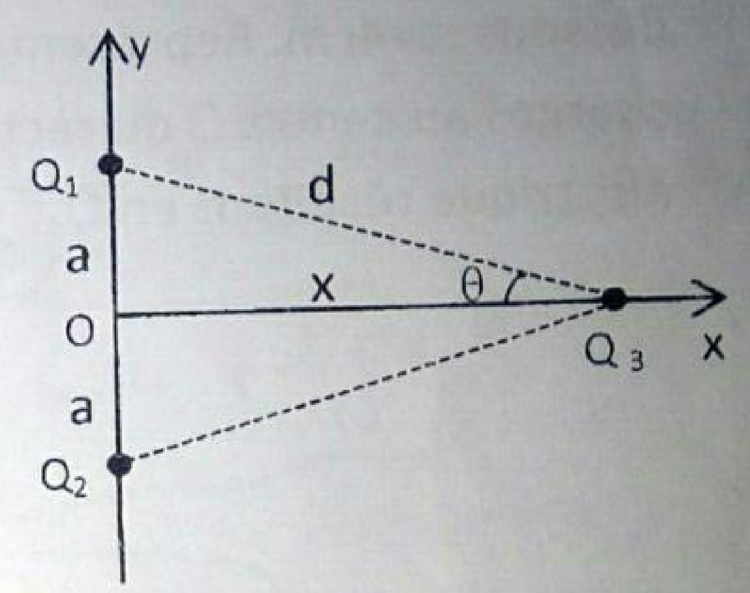
d/ f(x,y) = cos (xy)

(Champs et forces électrostatiques)

EXERCICE3/

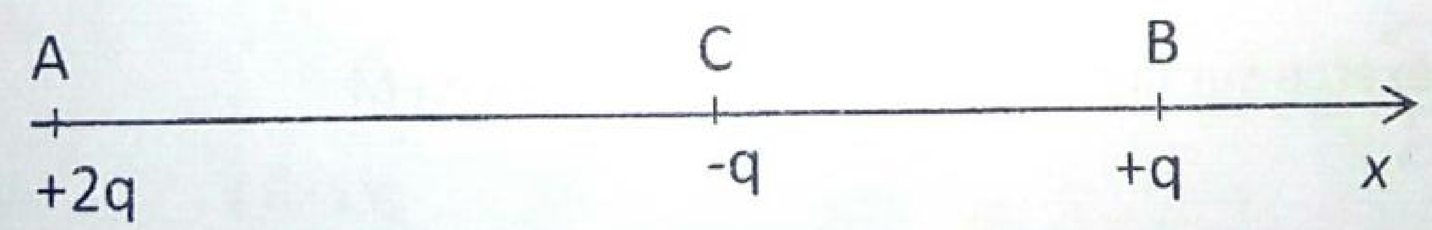
Dans l'assemblage de charges ci-dessous on demande de calculer la résultante des forces qui s'applique à la charge Q_3 avec $Q_1 = Q_2 = Q_3 = q > 0$.

AN: $q=2.10^{-8}$ C, a=3cm, x=4cm.



EXERCICE 4/ Soit la distribution de charges ci-dessous (figure 1), d = AB = 0,2 m. Les deux charges placées en A et B sont fixes, par contre la charge placée en C est mobile sur la droite AB.

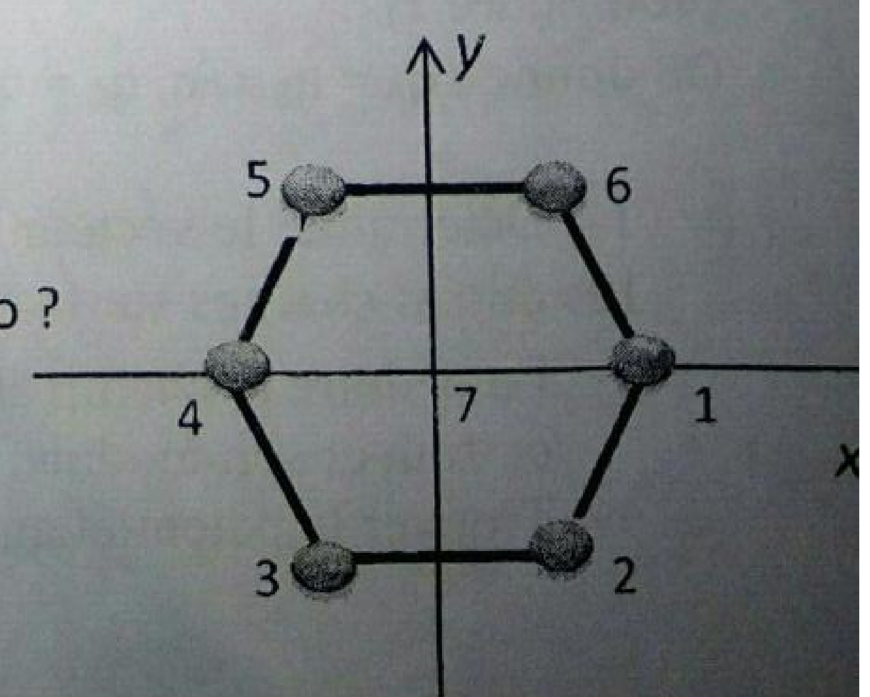
- Quelle est la position d'équilibre de la charge placée en C ?



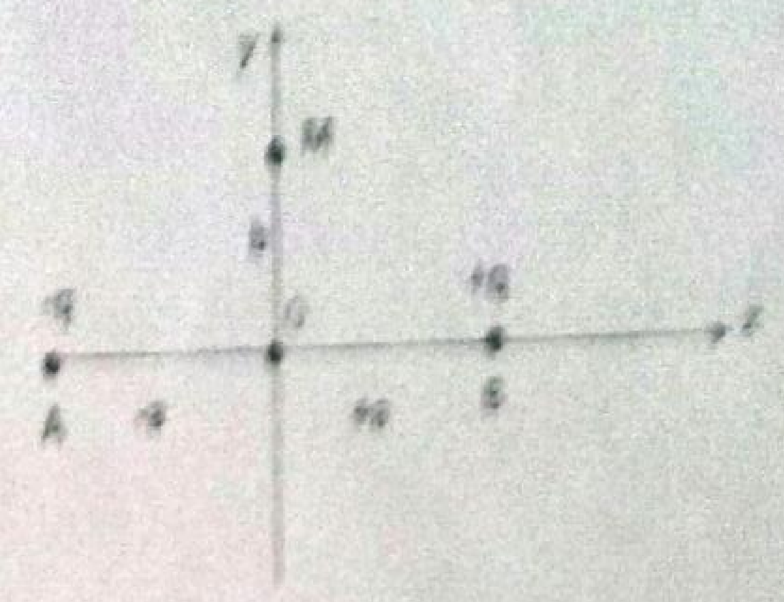
EXERCICE 5/

On dispose des charges ponctuelles q identiques en grandeur et en signe aux sommets d'un hexagone régulier, voir figure.

- Quelle charge ponctuelle Q de signe contraire faut-il placer au centre de l'hexagone pour que la résultante de toutes les forces qui agissent sur chacune de ces charges soit égale à zéro ?



EXERCICE 6/ Deux charges ponctuelles égales et de signe contraire $-q$ et $+q$ sont placées sur l'axe des abscisses OX respectivement aux points A $(-a, 0)$ et B $(+a, b)$ (Voir fig).



1/ Donner le champ électrostatique $\vec{E}$ au point M $(0, b)$ situé sur l'axe des ordonnées OY

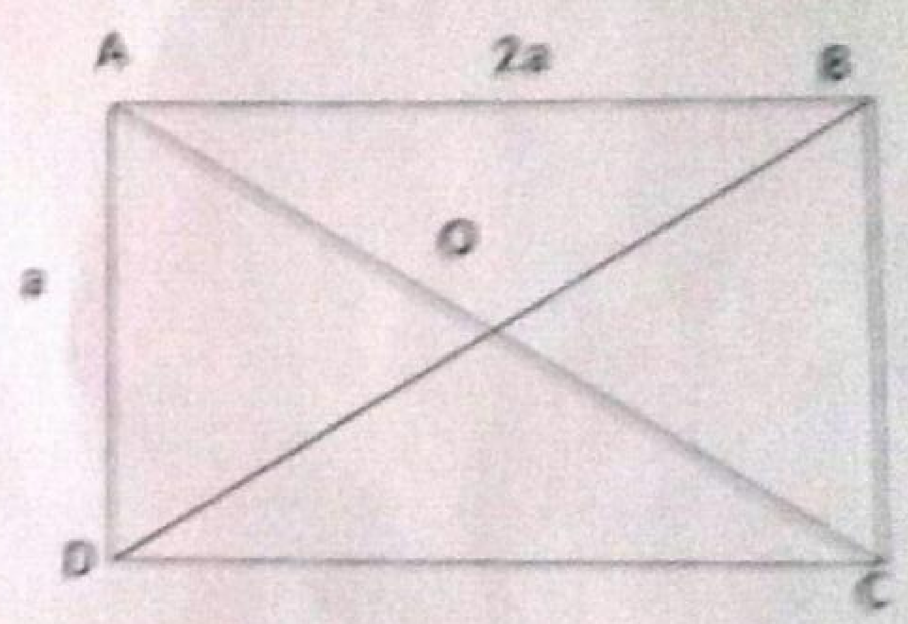
2/ Donner le potentiel crée par ces deux charges au point M.

3/ On place une troisième charge $+2q$ au point M,

Calculer la force électrostatique qui s'exerce au point M.

EXERCICE 7/

Quatre charges ponctuelles égales à $+q$, $-2q$, $+2q$ et $-q$ avec $q = 4.10^{[illegible]}$ C, sont placées respectivement aux quatre sommets A, B, C, D d'un rectangle ainsi qu'il est indiqué sur la figure ci-dessous ;a=4cm. Représenter sur le schéma les vecteurs champs électriques crées par les quatre charges au centre O du rectangle. Déterminer ensuite la direction, le sens l'intensité du champ électrique résultant en O.



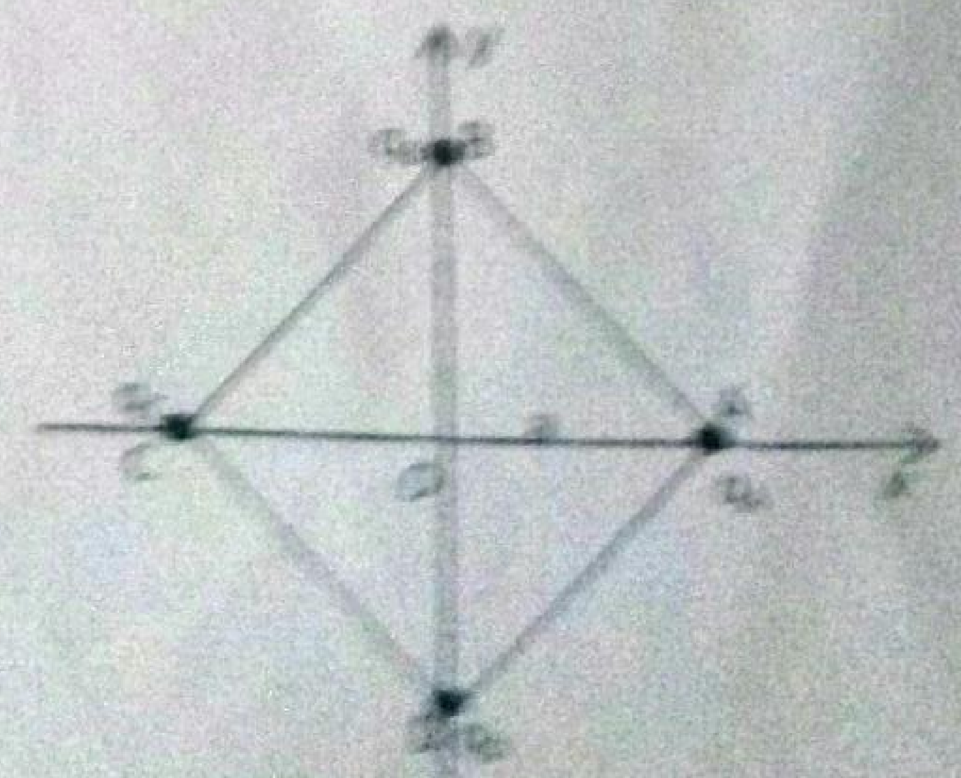
EXERCICE 8/

1/Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ crée en M(0,0,5)m par les charges $q_1 = 0{,}35\mu c$ placée au point M_1 (0,4,0)m et $q_2 = 0{,}55\mu c$ placée au point M_2 (3,0,0)m.

2/trouver la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur la charge $q_3 = 0{,}45$ µc placée en M

EXERCICE 9/

On considère quatre charges électriques ponctuelles q_A, q_B, q_C et q_D disposées aux sommets d'un losange ABCD dont les coordonnées dans le plan (o, x, y) sont : A(a, 0), B(0, a), C(-a, 0), D(0, -a).
(Voir figure 1)
On donne : $q_A = q_B = +q$, $q_C = q_D = -q$ ou $q>0$.



1- Déterminer le vecteur force électrostatique exercée par Les autres charges sur la charge q_C et son module.
2- En déduire le champ électrique $\vec{E_C}$ crée au sommet C et trouver son module.
3- Trouver le potentiel au centre O.

Scanned by TapScanner

EXO1

$T(x,y) = x^2 + y^2$

$\vec{V} = \langle 2xy \,;\, x^2 \,;\, x^3 + y^3 \rangle$

1) Calculons $\overrightarrow{\text{grad}}\, T$, $\text{div}\, \vec{V}$, $\overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{V}$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, T = \vec{\nabla} T = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta T}{\delta x} \\ \frac{\delta T}{\delta y} \\ \frac{\delta T}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\, \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\delta}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta}{\delta z}\vec{k} \right)$$

$$\left(2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + x^3 + y^3\,\vec{k} \right)$$

$$\text{div}\, \vec{V} = \frac{\delta(2xy)}{\delta x}\cancel{\vec{i}} + \frac{\delta x^2}{\delta y}\cancel{\vec{j}} + \frac{\delta(x^3+y^3)}{\delta z}\cancel{\vec{k}}$$

$$\text{div}\, \vec{V} = 2y\,\cancel{\vec{i}} + 0\,\cancel{\vec{j}} + 0\,\cancel{\vec{k}} = 2y\,\cancel{\vec{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div}\, \vec{V} = 2y}$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z \\ 2xy & x^2 & x^3+y^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta/\delta y & \delta/\delta z \\ x^2 & x^3+y^3 \end{vmatrix} \vec{i} - \vec{j} \begin{vmatrix} \delta/\delta x & \delta/\delta z \\ 2xy & x^3+y^3 \end{vmatrix}$$

$$+ \vec{k} \begin{vmatrix} \delta/\delta x & \delta/\delta y \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta y}(x^3+y^3) - \frac{\delta x^2}{\delta z} \right)\vec{i} - \vec{j}\left(\frac{\delta(x^3+y^3)}{\delta x} - \frac{\delta(2xy)}{\delta z} \right)$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\delta x^2}{\delta x} - \frac{\delta(2xy)}{\delta y} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{V} = (3y^2)\vec{i} - \vec{j}(3x^2) + \vec{k}(2x - 2x)$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{V} = 3y^2\,\vec{i} - \vec{j}\,3x^2}$$

EXO2 : Calculons les dérivées partielles d'ordre 2

a) $f = x^2(x+y)$; $f(x,y) = xy$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2x(x+y) + x^2 = 2x^2 + 2xy + x^2$$

$$\boxed{\frac{\delta f}{\delta x} = 3x^2 + 2xy}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = x^2 \;;\; \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}(3x^2 + 2xy)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 6x + 2y$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y}(x^2) = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta}{x}(x^2) = 2x$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta}{\delta y}(3x^2 + 2xy)$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = 2x$$

2) $f(x,y) = x \cdot y$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = ? \;;\; \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = ? \;;\; \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = y \;;\; \frac{\delta f}{\delta y} = x$$

(1) $\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = 1 \;;\; \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = 1$

3) $f(x,y) = \cos(xy)$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -y\sin(xy) \quad ; \quad \frac{\delta f}{\delta y} = -x\sin(xy)$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta}{\delta y}\left(-y\sin(xy)\right);$$

$$= -\sin(xy) - yx\cos(xy)$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta}{x}\left(-x\sin(xy)\right)$$

$$= -\sin(xy) - xy\cos(xy)$$

4) $f(x,y,z,t) = \frac{1}{(x+y+z+t)^2}$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{-2(x+y+z+t)}{(x+y+z+t)^4} = \frac{-2}{(x+y+z+t)^3}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{-2}{(x+y+z+t)^3}$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{-2}{(x+y+z+t)^3} \quad ; \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{-2}{(x+y+z+t)^3}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{-2}{(x+y+z+t)^3}\right)$$

$$= \frac{-6(x+y+z+t)^2}{(x+y+z+t)^6} = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4} \quad ; \quad \frac{\delta^2 f}{\delta z^2} = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{-2}{(x+y+z+t)^3}\right) = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{-2}{(x+y+z+t)^3}\right) = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta z}\right) = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{-2}{(x+y+z+t)^3}\right)$$

$$= \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

$$\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

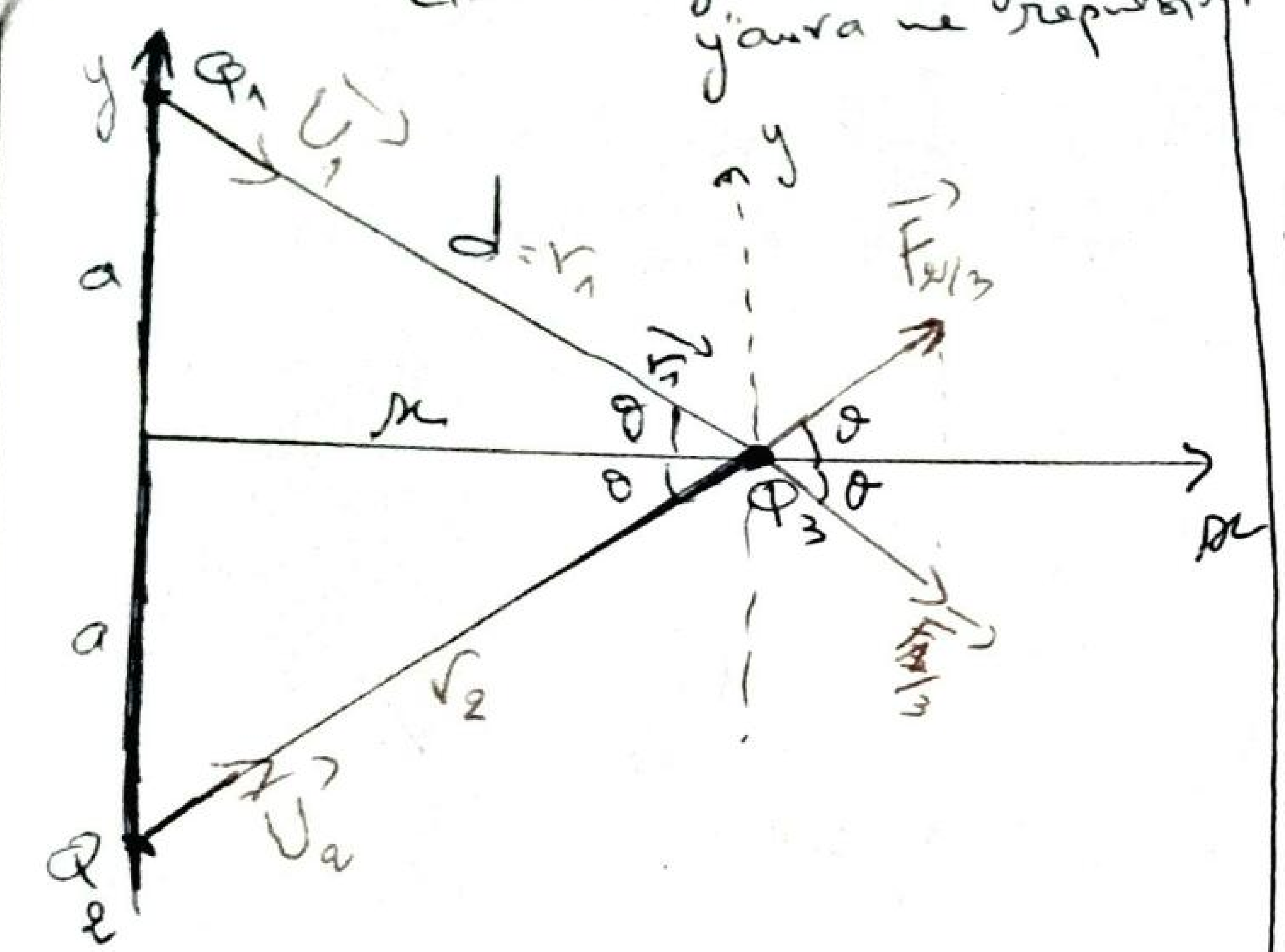
$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta z}\right) = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

$$\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{-6}{(x+y+z+t)^4}$$

« Champs et forces électrostatiques »

Exo 3

deux charge de même signe, il y aura une répulsion



$$\vec{F} = \sum \vec{F} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$$

Par projection on aura:

$$\vec{F}_{1/3}\begin{pmatrix} F_{1/3}\cos\theta \\ -F_{1/3}\sin\theta \end{pmatrix} \text{ et } \vec{F}_{2/3}\begin{pmatrix} F_{2/3}\cos\theta \\ F_{2/3}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = F_{1/3}\cos\theta + F_{2/3}\cos\theta \\ F_y = -F_{1/3}\sin\theta + F_{2/3}\sin\theta = 0 \text{ (par symétrie)} \end{cases}$$

$$F_{1/3} = K\frac{|q_1 q_2|}{r_{1/3}^2} = k\frac{q^2}{d^2}$$

$$F_{2/3} = \frac{k|q_2 q_3|}{r_{2/3}^2} \text{ avec } r_{2/3} = d$$

$$\boxed{F_{2/3} = \frac{kq^2}{d^2}} \text{ avec } d = \sqrt{x^2 + a^2} = 5\,cm$$

$\Rightarrow$ et $tg\theta = \frac{a}{x} = \frac{3\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-2}} = 0,75$

$\Rightarrow \theta = 36,7°$

$$\Rightarrow F = F_x = k\frac{q^2}{d^2}\cos\theta + k\frac{q^2}{d^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{2kq^2}{d^2}\cos\theta\,\vec{i}}$$

$$F = \frac{2kq^2}{d^2}\cos\theta\,\vec{i}$$

avec $\boxed{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \text{ où } \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}}$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{4\pi\frac{1}{36\pi 10^9}} = \frac{36\pi 10^9}{4\pi}$$

$$\boxed{K = 9\cdot 10^9}\ N\,m^2/C^2$$

$$\Rightarrow F = \frac{2(9\cdot 10^9)(2\cdot 10^{-8})^2(0,801)}{0,25\cdot 10^{-2}}$$

$$\boxed{F = 230,688\cdot 10^{-5}\,N = 2,307\cdot 10^{-3}\,N}$$

2ième méthode:

$$\vec{F} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$$

$$\vec{F}_{1/3} = \frac{K q_1 q_3}{r_{1/3}^2}\vec{U}_{1/3} = \frac{Kq^2}{r_{1/3}^2}\vec{U}_{1/3}$$

$r_{1/3} = ?$ $\boxed{r_{1/3} = d} = r_{2/3}$

$$\vec{F}_{2/3} = \frac{Kq^2}{r_{2/3}^2}\vec{U}_{2/3}$$

$\vec{U}_{1/3} = ?$ $\vec{U}_{2/3} = ?$

$$\vec{r}_{1/3} = r_{1/3}\vec{U}_{1/3} \Rightarrow \vec{U}_{1/3} = \frac{\vec{r}_{1/3}}{r_{1/3}}$$

$\vec{U}_{2/3} = \frac{\vec{r}_{2/3}}{r_{2/3}}$

$\vec{r}_{1/3} = ?$ $\quad \vec{r}_{2/3} = ?$

$\vec{r}_{1/3} = \overrightarrow{q_1 q_3} \begin{pmatrix} q_{x_3} - q_{x_1} \\ q_{y_3} - q_{y_1} \end{pmatrix}$

$q_1 \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$; $q_2 (0 \quad -a)$

$q_3 (x , 0)$

$\vec{r}_{1/3} \begin{pmatrix} x - 0 \\ 0 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} = x\vec{i} - a\vec{j}$

$\vec{r}_{2/3} \begin{pmatrix} x - 0 \\ 0 - (-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} = x\vec{i} + a\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{U}_{1/3} = \frac{\vec{r}_{1/3}}{r_{1/3}} = \frac{(x\vec{i} - a\vec{j})}{d}$

$\vec{U}_{2/3} = \frac{\vec{r}_{2/3}}{r_{2/3}} = \frac{x\vec{i} + a\vec{j}}{d}$

$\Rightarrow \vec{F}_{1/3} = \frac{Kq^2}{d^2} \left(\frac{x\vec{i} - a\vec{j}}{d} \right)$

$\vec{F}_{2/3} = \frac{Kq^2}{d^2} \left(\frac{x}{d} \right) \vec{i} + \frac{Kq^2}{d^2} \frac{a}{d} \vec{j}$

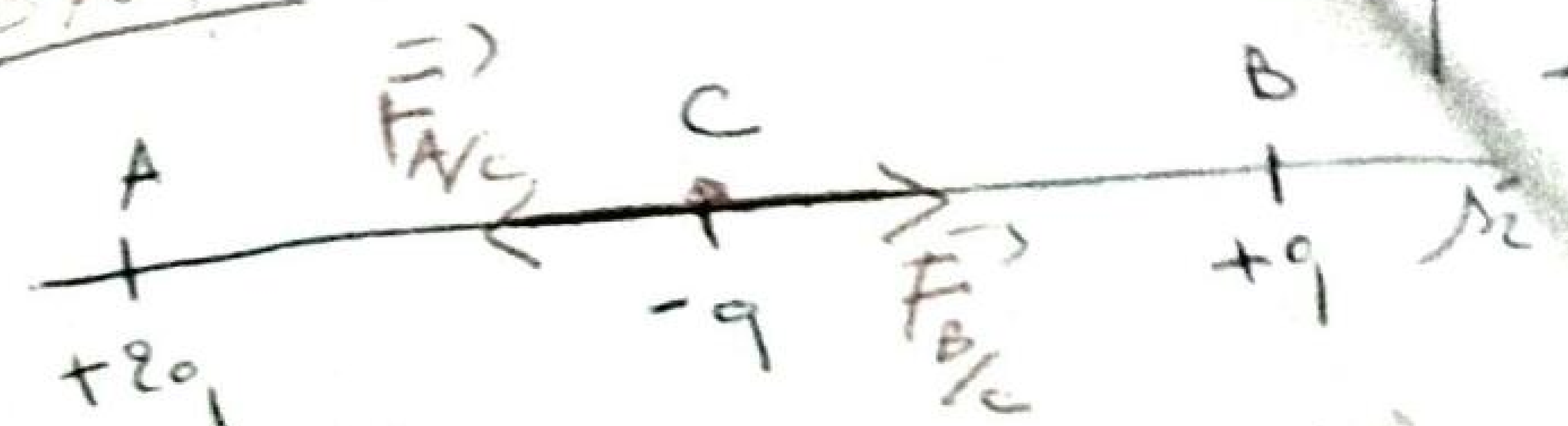
$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} = \frac{2Kq^2 x}{d^3} \vec{i}$

$F = \frac{2(9 \cdot 10^9)(2 \cdot 10^{-8})^2 (4) 10^{-2}}{\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)^3}$

$= \frac{2(9\, 10^9)(4\, 10^{-16})\, 4\, 10^{-2}}{(5\, 10^{-2})^3}$

$\boxed{F = 2{,}304\ 10^{-3}\ N}$

EX04 $\quad d = AB = 0{,}2\,m$



Trouvons la position d'équilibre de la charge placée en C

Pour que la charge c garde sa position d'équilibre il faut que : $\vec{F}_{A/C} = \vec{F}_{B/C}$ c.a.d $\sum \vec{F}_{/C} = \vec{0}$

$\Rightarrow F_{A/C} = F_{B/C}$

$\Rightarrow K \frac{|q_A q_C|}{(AC)^2} = K \frac{(q_C q_A)}{(BC)^2}$

$\Rightarrow \frac{K 2q^2}{(AC)^2} = \frac{Kq^2}{(BC)^2}$

on pose $x = AC$

$\Rightarrow AB = AC + CB = x + CB$

$\Rightarrow \boxed{CB = AB - x}$

alors $\frac{K 2q^2}{x^2} = \frac{Kq^2}{(AB - x)^2}$

$\Rightarrow (AB - x)^2 K 2q^2 = x^2 K q^2$

$\Rightarrow (AB^2 - 2ABx + x^2) \cancel{K} 2 \cancel{q^2} = x^2 \cancel{K} \cancel{q^2}$

$\Rightarrow 2x^2 + 2AB^2 - 4ABx - x^2 = 0$

$x^2 - 4(0{,}2)x + 2(0{,}2)^2 = 0$; $\Delta = ?$

(4) $\Rightarrow x_1 = ?$
$x_2 =$

Suite d'Ex 4

$\Delta = (0,8)^2 - 4(0,08) = 0,64 - 0,32$

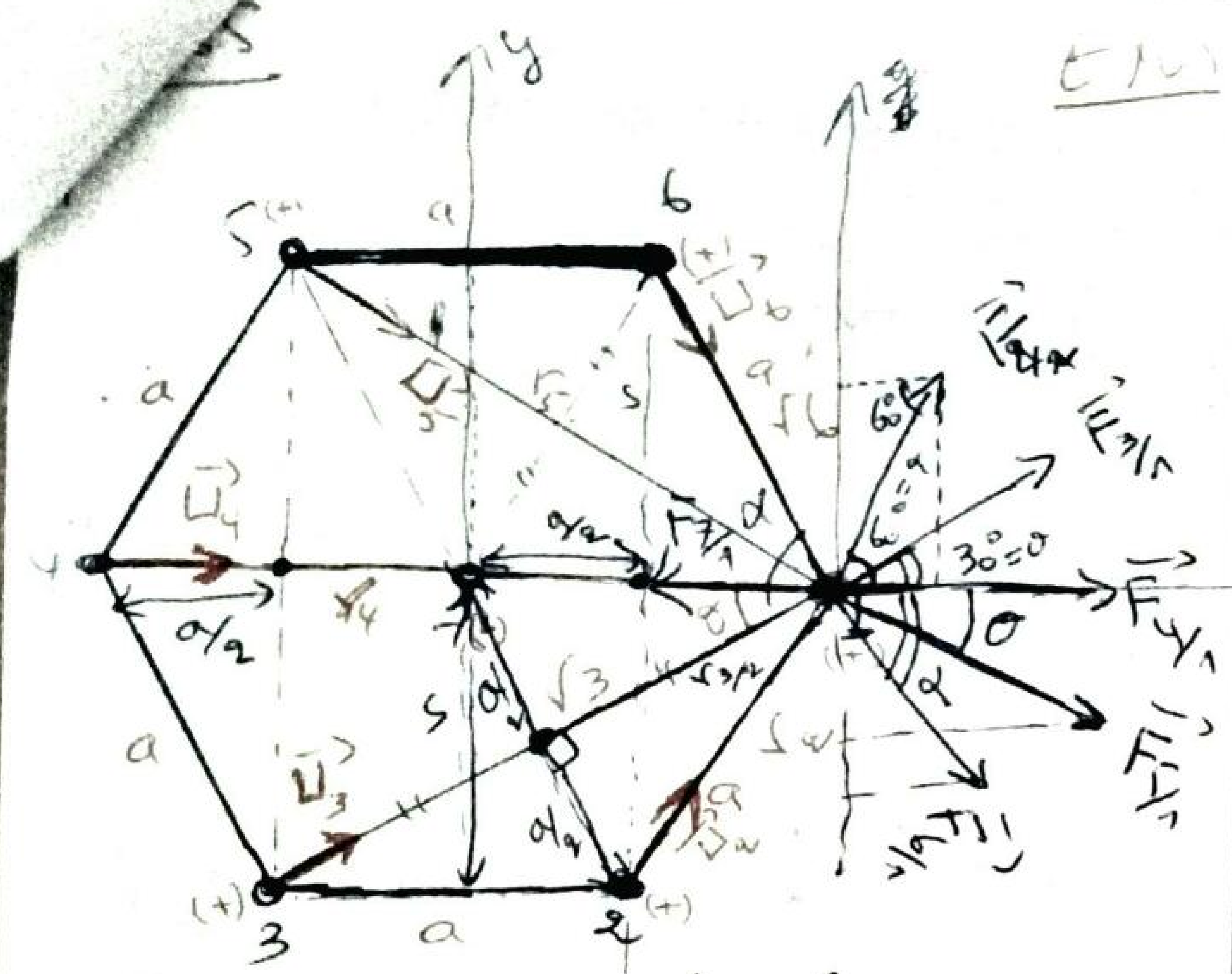
$\Delta = 0,32 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 0,565$

$x_1 = \frac{+0,8 + 0,565}{2} = 0,68 > AB$ refusée

$x_2 = \frac{+0,8 - 0,565}{2} = 0,1157 < AB$

=> La position d'équilibre de la charge c est à 0,1157 de la charge A et à $AB - 0,1157 = 0,2 - 0,1157 = 0,0843$ m de la charge B

Scanned by TapScanner



on suppose que toutes les charges ont même signe positive (+)

la charge q_7 prend une charge opposé (négative (−))

$$\sum \vec{F} = \vec{0} = \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{3/1} + \vec{F}_{4/1} + \vec{F}_{5/1} + \vec{F}_{6/1} + \vec{F}_{7/1}$$

1ière méthode : méthode analytique

$$\vec{F}_{2/1} = K \frac{|q_1 q_2|}{r_2^2} \vec{U}_2 = \frac{K q^2}{r_2^2} \vec{U}_2$$

$$\vec{F}_{3/1} = \frac{K q^2}{r_3^2} \vec{U}_3 \; ; \; \vec{F}_{4/1} = \frac{K q^2}{r_4^2} \vec{U}_4$$

$$\vec{F}_{5/1} = \frac{K q^2}{r_5^2} \vec{U}_5 \; ; \; \vec{F}_{6/1} = \frac{K q^2}{r_6^2} \vec{U}_6$$

$$\vec{F}_{7/1} = -K \frac{|q Q|}{r_7^2} \vec{U}_7$$

Maintenant on cherche $r_i = ?$

$r_2 = r_6 = r_7 = a$

$r_3 = ? = r_5$ alors $\left(\frac{r_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$$\Rightarrow \frac{r_3}{2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_3 = a\sqrt{3}} = r_5$$

$r_4 = ?$ $r_4 = 2a$

Calculons les vecteurs unitaires

$$\vec{U}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} \; ; \; \vec{U}_4 = \frac{\vec{r}_4}{r_4}$$

$$\vec{U}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3} \; ; \; \vec{U}_5 = \frac{\vec{r}_5}{r_5}$$

$$\vec{U}_6 = \frac{\vec{r}_6}{r_6} \; ; \; \vec{U}_7 = \frac{\vec{r}_7}{r_7}$$

$\vec{r}_2 = ?$ $\vec{r}_3 = ?$; $r_4 = ?$; $r_5 = ?$ $r_6 = ?$ $r_7 = ?$

$$q_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} ; \; q_2 = \begin{pmatrix} a/2 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 \\ -\frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

avec $s = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

$$\boxed{s = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$$

$$q_3 \begin{pmatrix} -a/2 \\ -\frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} ; \; q_4 \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_5 \begin{pmatrix} -a/2 \\ +\frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} ; \; q_6 = \begin{pmatrix} a/2 \\ +\frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$q_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{r}_{2 \to 1} \begin{pmatrix} a - a/2 \\ 0 + \frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 \\ \frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\vec{r}_{3 \to 1} \begin{pmatrix} a + a/2 \\ 0 + \frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a}{2} \\ \frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{3a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\vec{r}_{4 \to 1} \begin{pmatrix} a + a \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} = 2a\vec{i}$$

$$\vec{r}_{5 \to 1} \begin{pmatrix} a + \frac{a}{2} \\ 0 - \frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a}{2} \\ -\frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{3a}{2}\vec{i} - \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0-\frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\vec{r_7}\begin{pmatrix} a-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a\vec{i}$$

$$\vec{U_2} = \frac{\vec{r_2}}{r_2} = \frac{\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}}{a} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{U_3} = \frac{\vec{r_3}}{r_3} = \frac{\frac{3a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{U_4} = \frac{\vec{r_4}}{r_4} = \frac{2a\vec{i}}{2a} = \vec{i}$$

$$\vec{U_5} = \frac{\vec{r_5}}{r_5} = \frac{\frac{3a}{2}\vec{i} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\vec{j}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{U_6} = \frac{\vec{r_6}}{r_6} = \frac{\frac{a}{2}\vec{i} - \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}}{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{U_7} = \frac{\vec{r_7}}{r_7} = \frac{a\vec{i}}{a} = \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{2_1} = k\frac{q^2}{r_2^2}\vec{U_2} = kq^2\left(\frac{\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}}{a^2}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{2_1} = \frac{kq^2}{2a^2}\vec{i} + kq^2\frac{\sqrt{3}}{a^2}\vec{j}}$$

$$\vec{F}_{3_1} = k\frac{q^2}{r_3^2}\vec{U_3} = \frac{kq^2}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{3_1} = kq^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6a^2}\vec{i} + \frac{1}{6a^2}\vec{j}\right)}$$

$$\boxed{\vec{F}_{4_1} = k\frac{q^2}{r_4^2}\vec{U_4} = \frac{kq^2}{4a^2}\left(\vec{i}\right)}$$

$$\vec{F}_{5_1} = k\frac{q^2}{r_5^2}\vec{U_5} = kq^2\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{5_1} = kq^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6a^2}\vec{i} - \frac{1}{6a^2}\vec{j}\right)}$$

$$\vec{F}_{6_1} = \frac{kq^2}{r_6^2}\vec{U_6} = kq^2\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{6_1} = kq^2\left(\frac{1}{2a^2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2a^2}\vec{j}\right)}$$

$$\boxed{\vec{F}_{7_1} = \frac{kq\varphi}{r_{7_1}^2}\cdot\vec{U_7} = -kq\frac{\varphi}{a^2}\vec{i}}$$

avec

$$\Rightarrow \sum\vec{F} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{3/1} + \vec{F}_{4/1} + \vec{F}_{5/1} + \vec{F}_{6/1} + \vec{F}_{7/1} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow kq^2\left(\frac{1}{2a^2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{a^2}\vec{j}\right) +$$

$$kq^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6a^2}\vec{i} + \frac{1}{6a^2}\vec{j}\right) +$$

$$kq^2\left(\frac{1}{4a^2}\right)\vec{i} + kq^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6a^2}\vec{i} - \frac{1}{6a^2}\vec{j}\right)$$

$$+ kq^2\left(\frac{1}{2a^2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2a^2}\vec{j}\right) \pm$$

$$\frac{k}{a^2}q\varphi\,\vec{i} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{\sqrt{3}}{6a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{\sqrt{3}}{6a^2}\right)q \pm \frac{\varphi}{a^2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{a^2} + \frac{1}{6a^2} - \frac{1}{6a^2} - \frac{\sqrt{3}}{2a^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q\left(\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{6a^2} + \frac{1}{4a^2}\right) = \frac{\varphi}{a^2}$$

$$\Rightarrow \varphi = q\left(\frac{1}{4} + \frac{6+2\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\varphi = q\left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\varphi = q\left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = q\left(\frac{15+4\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = q\left(\frac{15+4\sqrt{3}}{12}\right)}$$

Scanned by TapScanner

méthode (Méthode de projection)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{3/1} + \vec{F}_{4/1} + \vec{F}_{5/1} + \vec{F}_{6/1} + \vec{F}_{7/1} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{x_{2/1}} + F_{x_{3/1}} + F_{x_{4/1}} + F_{x_{5/1}} + F_{x_{6/1}} - F_{x_{7/1}} = 0 \\ F_{y_{2/1}} + F_{y_{3/1}} + F_{y_{4/1}} + F_{y_{5/1}} + F_{y_{6/1}} + \cancel{F_{y_{7/1}}}^{0} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = F_{2/1}\cos\alpha + F_{3/1}\cos\theta + F_{4/1} + \\ F_{5/1}\cos\theta + F_{6/1}\cos\alpha - F_{7/1} = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_y = F_{2/1}\sin\alpha + F_{3/1}\sin\theta + 0 \\ - F_{5/1}\sin\theta - F_{6/1}\sin\alpha = 0 \quad (2) \end{cases}$$

de (1) on aura :

avec $F_{7/1} = K\frac{\varphi q}{r_7^2} = \frac{K\varphi q}{a^2}$

$$\Rightarrow \frac{Kq^2}{a^2}\cos\alpha + \frac{Kq^2}{3a^2}\cos\theta + \frac{Kq^2}{4a^2} + Kq^2\frac{1\cos\theta}{3a^2} + Kq^2\frac{1\cos\alpha}{a^2} - \frac{K\varphi q}{a^2} = 0$$

$\alpha = ?$ et $\theta = ?$

$$tg\alpha = \frac{S}{a/2} \text{ avec } S^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$\boxed{S = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a/2} = \sqrt{3}$$

alors, il en résult :

$$Kq^2\left(\frac{1}{a^2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{a^2}\frac{1}{2}\right) = \frac{\varphi Kq}{a^2}$$

$$\Rightarrow \varphi = q\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = q\left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \; C$$

Remarque :

$$tg\theta = \frac{S}{a + \frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{3\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad}}$$

Exo 6 2ième méthode pour Calculer $\vec{E}$

Par projection : $\vec{E} = \vec{E}_{AM} + \vec{E}_{BM}$

$\vec{E}_{AM} = E_{AM} \sin\alpha \, \vec{i} - E_{AB} \cos\alpha \, \vec{j}$ avec $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\vec{E}_{BM} = -E_{BM} \sin\theta \, \vec{i} + E_{BM} \cos\theta \, \vec{j}$ avec $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}$; $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow E_{AM} = \frac{k\,q}{\|\vec{AM}\|^2} = k\frac{q}{(\sqrt{a^2+b^2})^2}$; $E_{BM} = k\frac{q}{(\sqrt{a^2+b^2})^2} = k\frac{q}{a^2+b^2}$

$\Rightarrow \vec{E} = -k\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{a}{a^2+b^2}\vec{j} - k\frac{q}{\cancel{a^2+b^2}}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j} - k\frac{q}{a^2+b^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i}$

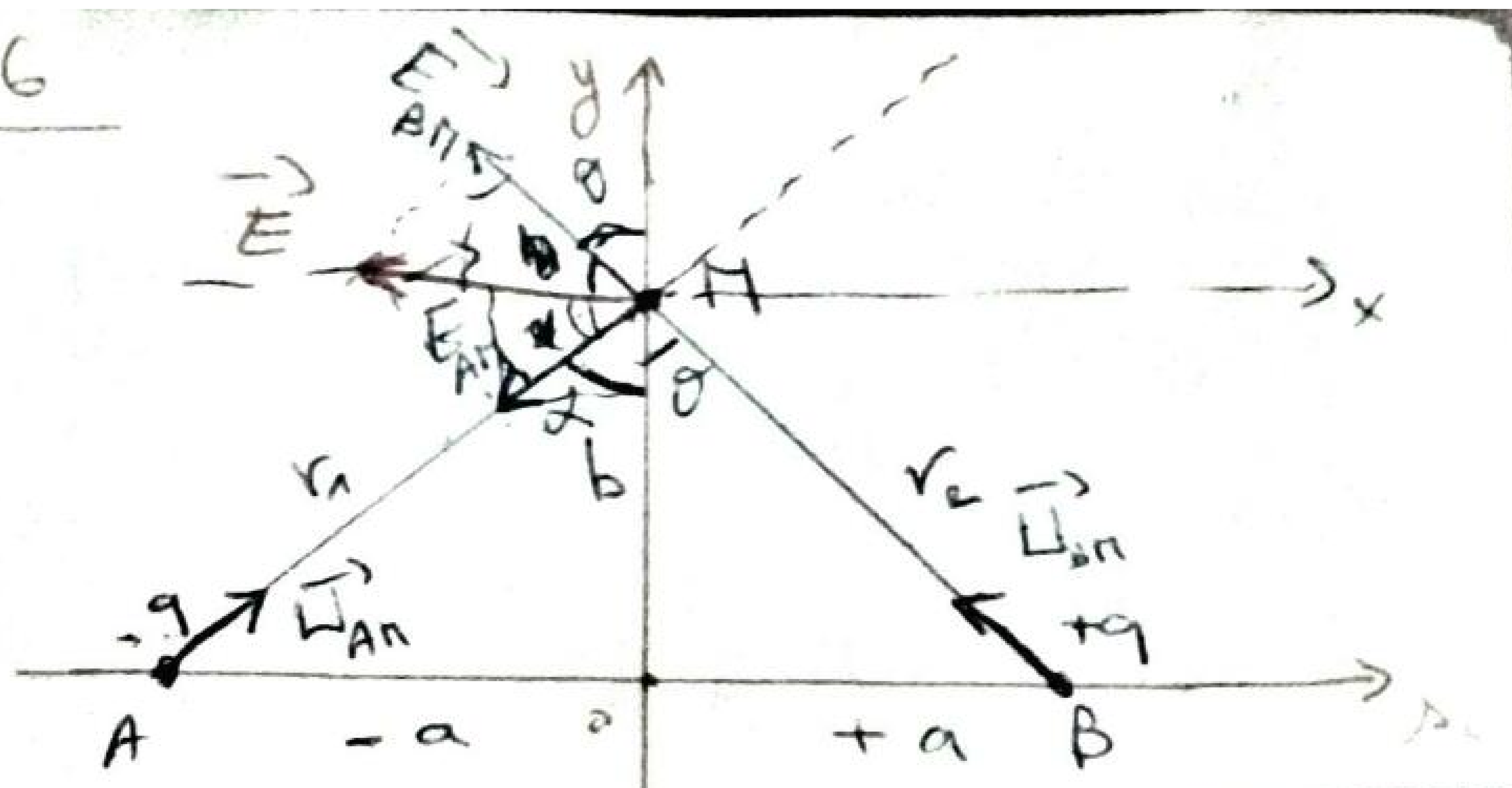
$+ k\frac{q}{(\cancel{\sqrt{a^2+b^2}})^2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j} = -2\frac{q}{a^2+b^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i}$

Remarque :

$tg\alpha = \frac{a}{b}$; $tg\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow tg\alpha = tg\theta \Rightarrow \boxed{\alpha = \theta}$

$\Rightarrow$

EXO6



$\vec{U}_{AM} = \dfrac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$; $\vec{AM} \begin{pmatrix} 0-(-a) \\ b-0 \end{pmatrix}$

$\vec{U}_{AM} = \dfrac{a\vec{i}+b\vec{j}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\vec{U}_{BM} = \dfrac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|}$. $\vec{BM} \begin{pmatrix} 0-a \\ b-0 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{-a\vec{i}+b\vec{j}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1) On donne le champ electrostatique $\vec{E}$ au point $M(0,b)$

$\vec{E} = K \dfrac{q}{r^2} \vec{U}$

$\vec{E} = \vec{E}_{BM} + \vec{E}_{AM}$

$\vec{E}_{AM} = -K \dfrac{|q_A|}{r_1^2} \vec{U}_{AM} = -K \dfrac{|-q|}{r_1^2} \vec{U}_{AM}$

$r_1^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{AM} = -K \dfrac{q}{a^2+b^2} \vec{U}_{AM}}$

$\boxed{\vec{E}_{BM} = K \dfrac{|q|}{r_2^2} \vec{U}_{BM} = K \dfrac{q}{a^2+b^2} \vec{U}_{BM}}$ avec $r_2^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -K \dfrac{q}{a^2+b^2} \vec{U}_{AM} + K \dfrac{q}{a^2+b^2} \vec{U}_{BM}} \Rightarrow$

$\vec{E} = -K2 \dfrac{q}{a^2+b^2} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \vec{i}$

2) Donnons le potentiel crée par ces deux charges au M.

$U_{AM} = K \dfrac{(-q)}{r_1} = K \dfrac{q}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $U_{BM} = K \dfrac{q}{r_2} = K \dfrac{q}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow \boxed{U = -K \dfrac{q}{\sqrt{a^2+b^2}} + K \dfrac{q}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0}$

3) $M = +2q$; Calculons $\vec{F}$ au point M

$\vec{E}_M = -K \dfrac{q}{a^2+b^2} \vec{U}_{AM} + K \dfrac{q}{a^2+b^2} \vec{U}_{BM}$

$\Rightarrow \vec{F} = M\vec{E} = 2q\vec{E} = -K \dfrac{2q^2}{a^2+b^2} \vec{U}_{AM} + K \dfrac{2q^2}{a^2+b^2} \vec{U}_{BM}$

$= 2q(-2 \dfrac{q}{a^2+b^2} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}) \vec{i} = -4 \dfrac{Kq^2}{a^2+b^2} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \vec{i} = \vec{F}$

2ième méthode:

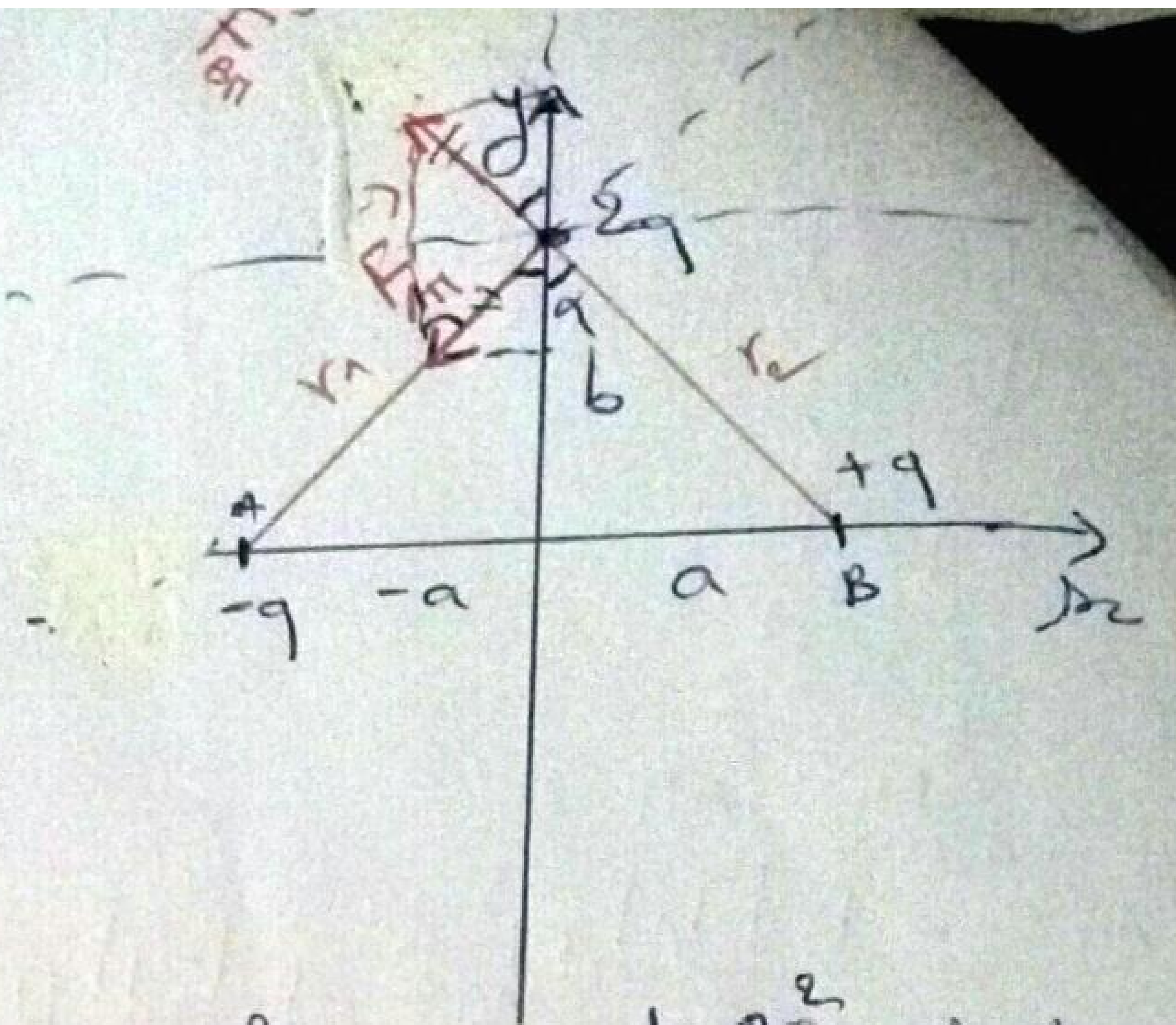
$\vec{F} = \vec{F}_{BM} + \vec{F}_{AM}$

par projection

le triangle AMq est Isocèle

$MA = MB$

$tg\alpha = \frac{a}{b}$



$F_x = -F_{BM}\sin\alpha - F_{AM}\sin\alpha = -K\frac{2q^2}{r_1^2}\sin\alpha - K\frac{2q^2}{r_2^2}\sin\alpha$

$F_y = F_{BM}\cos\alpha - F_{AM}\cos\alpha = K\frac{2q^2}{r_1^2}\cos\alpha - K\frac{2q^2}{r_2^2}\cos\alpha$

$= 0$

$r_1^2 = a^2 + b^2 = r_2^2$

$\Rightarrow F_x = -K\frac{2q^2}{a^2+b^2}\sin\alpha - K\frac{2q^2}{a^2+b^2}\sin\alpha = -K\frac{4q^2}{a^2+b^2}\sin\alpha$

$F_y = \cancel{K\frac{4q^2}{a^2+b^2}\cos\alpha} = 0$ avec $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3ième méthode:

$\vec{F} = \vec{F}_{A/M} + \vec{F}_{B/M} = K\frac{2q^2}{r_1^2}\vec{U}_{AM} + K\frac{2q^2}{r_2^2}\vec{U}_{BM}$

$\vec{F} = -K\frac{2q^2}{a^2+b^2}\vec{U}_{AM} + K\frac{2q^2}{a^2+b^2}\vec{U}_{BM}$

$\vec{U}_{AM} = \frac{\vec{r}_1}{r_1}$; $\vec{r}_1 \begin{pmatrix} 0+a \\ b-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$\vec{r}_2 \begin{pmatrix} 0-a \\ b-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{U}_{AM} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\vec{U}_{BM} = \frac{-a\vec{i} + b\vec{j}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\vec{F} = K\frac{2q^2}{a^2+b^2}\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\vec{i} + K\frac{2q^2}{a^2+b^2}\underbrace{\left(\frac{-b+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}_{0}\vec{j}$

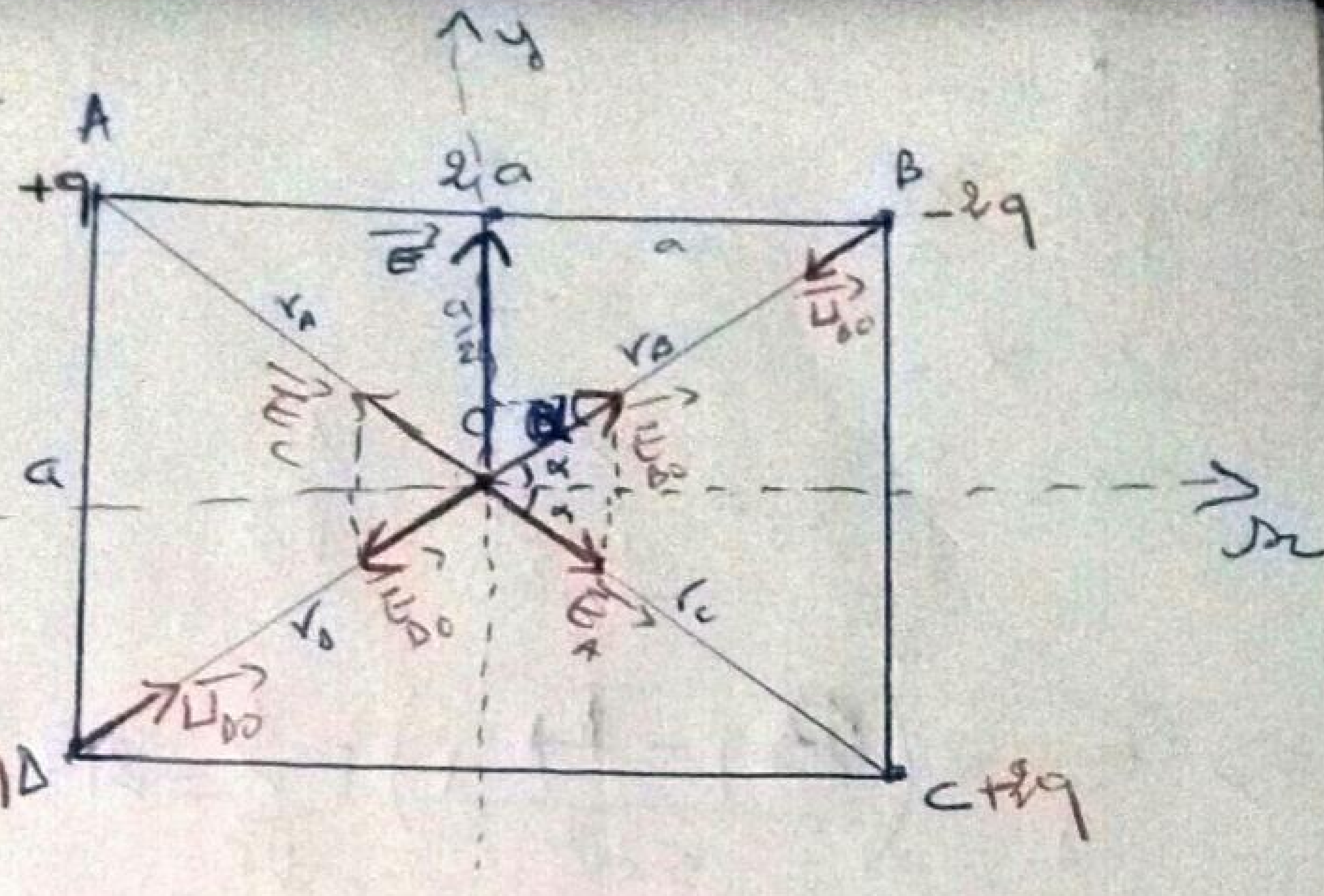
$$\boxed{\vec{F} = -K\frac{4q^2}{a^2+b^2}\frac{(a)}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i}}$$

EX07

$A = +q$; $B = -2q$

$C = +2q$ et $D = -q$

$a = 4cm = 4\,10^{-2} m.$



$\vec E_{BO} = -K\frac{|-2q|}{r_B^2}\vec U_{BO}$

$r_B^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{a^2+4a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

$\boxed{\vec E_{BO} = -K\frac{8q}{5a^2}\vec U_B}$

$\vec E_{AO} = K\frac{|+q|}{r_A^2}\vec U_{AO}$ avec $r_A^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4}$

$\boxed{\vec E_{AO} = \frac{K4q}{5a^2}\vec U_{AO}}$

$\boxed{\vec E_{CO} = K\frac{|2q|}{r_C^2}\vec U_{CO} = K\frac{8q}{5a^2}\vec U_{CO}}$ avec $r_C = r_A = r_B = r_D$

$\boxed{\vec E_{DO} = -K\frac{|-q|}{r_D^2}\vec U_{DO} = -\frac{K4q}{5a^2}\vec U_{DO}}$

$\Rightarrow \vec E = \vec E_{AO} + \vec E_{BO} + \vec E_{CO} + \vec E_{DO} = -K\frac{8q}{5a^2}\vec U_B + \frac{4Kq}{5a^2}\vec U_A + K\frac{8q}{5a^2}\vec U_C + - \frac{4Kq}{5a^2}\vec U_D$

2) Trouvons la direction, sens et intensité du $\vec E_T$

$\vec E_T = \vec E_{AO} + \vec E_{BO} + \vec E_{CO} + \vec E_{DO}$

Par projection : $(\perp Ox)$: $E_{BO}\cos\alpha - E_{AO}\cos\alpha + E_A\cos\alpha - E_D\cos\alpha = E_x$

$\Rightarrow E_x = (\cancel{E_{BO}} - \cancel{E_{CO}} + \cancel{E_{AO}} - \cancel{E_{DO}})\cos\alpha = 0$

$(\perp Oy)$: $E_{BO}\sin\alpha - E_{AO}\sin\alpha - E_{DO}\sin\alpha + E_{CO}\sin\alpha = E_y$

$E_y = (E_{BO} - E_{AO} - E_{DO} + E_{CO})\sin\alpha = 2(E_{BO} - E_{AO})\sin\alpha = 2\left(K\frac{8q}{5a^2} - K\frac{4q}{5a^2}\right)\sin\alpha$

Suite d'Exo 7

$\sin \alpha =$

$\tan \alpha = \frac{a/2}{a} = 1/2$

$\Rightarrow \alpha =$

$\sin\alpha = \frac{a/2}{\frac{\sqrt{5a^2}}{\sqrt{4}}} = \frac{a/2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow E_y = 2\left(\frac{8q - 4q}{5a^2}\right) K \frac{1}{\sqrt{5}} = 2K \frac{4q}{5a^2} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2.9.10^9.4.4.10^{-2}}{5.16.10^{-4}\sqrt{5}}$

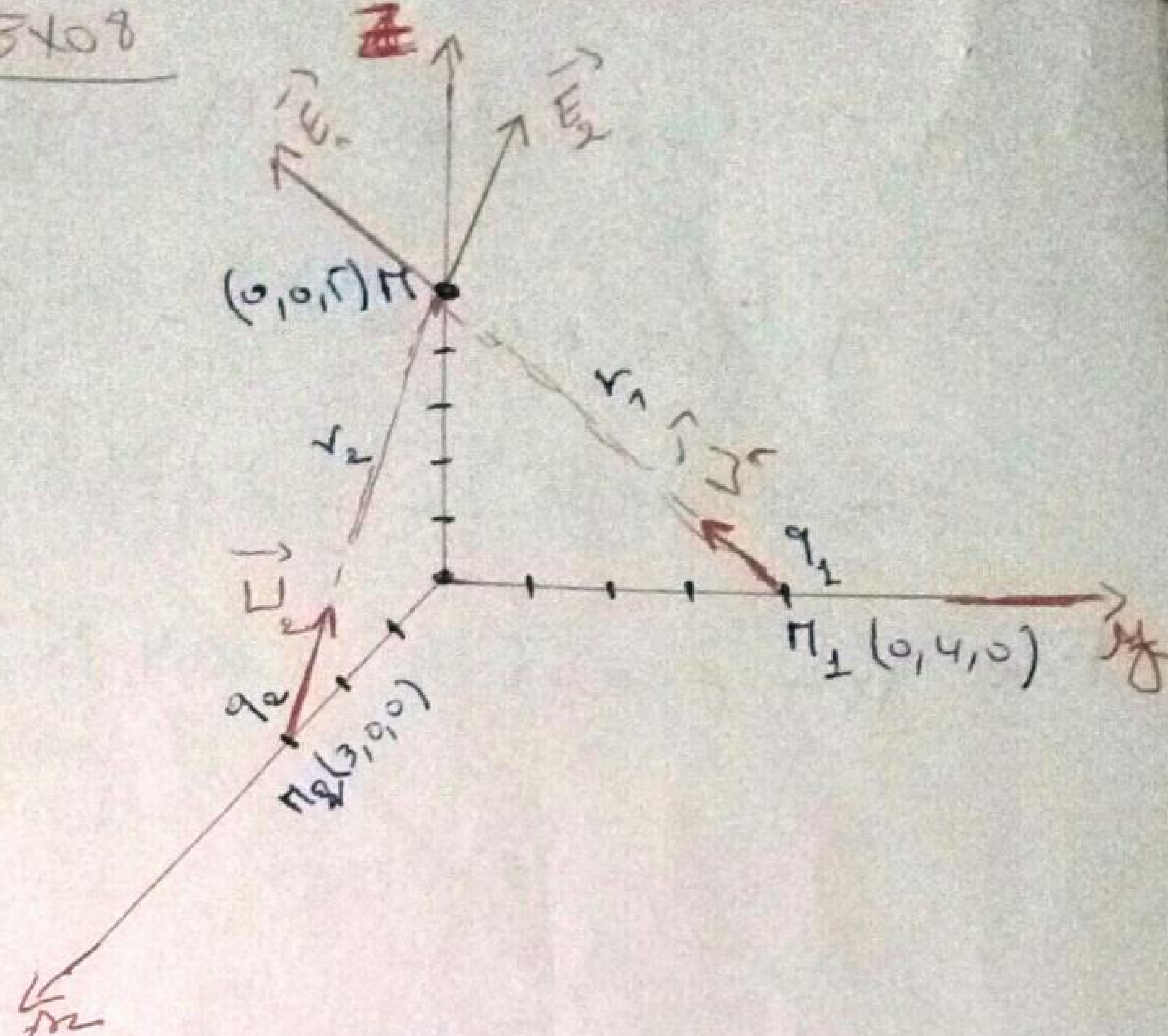
$\Rightarrow E_y = \frac{18\,10^8}{5\,10^{-4}(2{,}24)} = 1{,}6\,10^{12}\ N/C$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_T = E_y \vec{j} = 1{,}6\,10^{12}\,\vec{j}}$ $\boxed{E_T = 1{,}6\,10^{12}\ N/C}$

Pour le sens et la direction voir la figure

$q_1 = 0{,}35\,\mu C$ EX08

$q_2 = 0{,}55\,\mu C$



$\vec{E_1} = \dfrac{k|q_1|}{r_1^2}\vec{U_1}$

$\vec{E_2} = \dfrac{k|q_2|}{r_2^2}\vec{U_2}$

$r_1^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

$r_2^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

et $\vec{U_1} = \dfrac{\vec{r_1}}{r_1}$; $\vec{U_2} = \dfrac{\vec{r_2}}{r_2}$

$\vec{r_1}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-4 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -4\vec{j} + 5\vec{k} = \vec{r_1}$

$\vec{r_2}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r_2} = -3\vec{i} + 5\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{U_1} = \dfrac{-4\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{41}}$ et $\vec{U_2} = \dfrac{-3\vec{i} + 5\vec{k}}{\sqrt{34}} = -0{,}51\vec{i} + 0{,}857\vec{k}$

$= 0{,}625\vec{j} + 0{,}781\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{E_1} = \dfrac{k\,q_1}{r_1^2}\vec{U_1} = \dfrac{9 \cdot 10^9 (0{,}35)10^{-6}}{41}\left(\dfrac{-4\vec{j} + 5\vec{k}}{\underbrace{\sqrt{41}}_{6{,}4}}\right) = -0{,}048 \cdot 10^3\,\vec{j} + 0{,}06 \cdot 10^3\,\vec{k}$

$= -48{,}02\vec{j} + 60{,}02\vec{k}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E_1} = -48{,}02\vec{j} + 60{,}02\vec{k}}$ 76,82 $\boxed{E_1 = 76{,}82\ N/m}$

$\boxed{E_2 = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 0{,}55 \cdot 10^{-6}}{34} = 145{,}58\ N/m}$

$\vec{E_2} = E_2\vec{U_1} = \dfrac{k\,q_2}{r_2^2}\vec{U_1} =$

$= 145{,}58\left(-0{,}51\vec{i} + 0{,}857\vec{k}\right) = -74{,}25\vec{i} + 124{,}76\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{E_T} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = -74{,}25\vec{i} - 48{,}02\vec{j} + 184{,}78\vec{k}$

$\boxed{E_T = 204{,}85\ N/C}$

Scanned by TapScanner

2) $q_3 = 0{,}45 \mu C$ placé en M ; Calculons $\vec{F}/_M$

$\vec{F} = q_3 \vec{E}_T = 0{,}45\ 10^{-6} \left(-74{,}25 \vec{i} - 48{,}02 \vec{j} + 184{,}7 \right.$

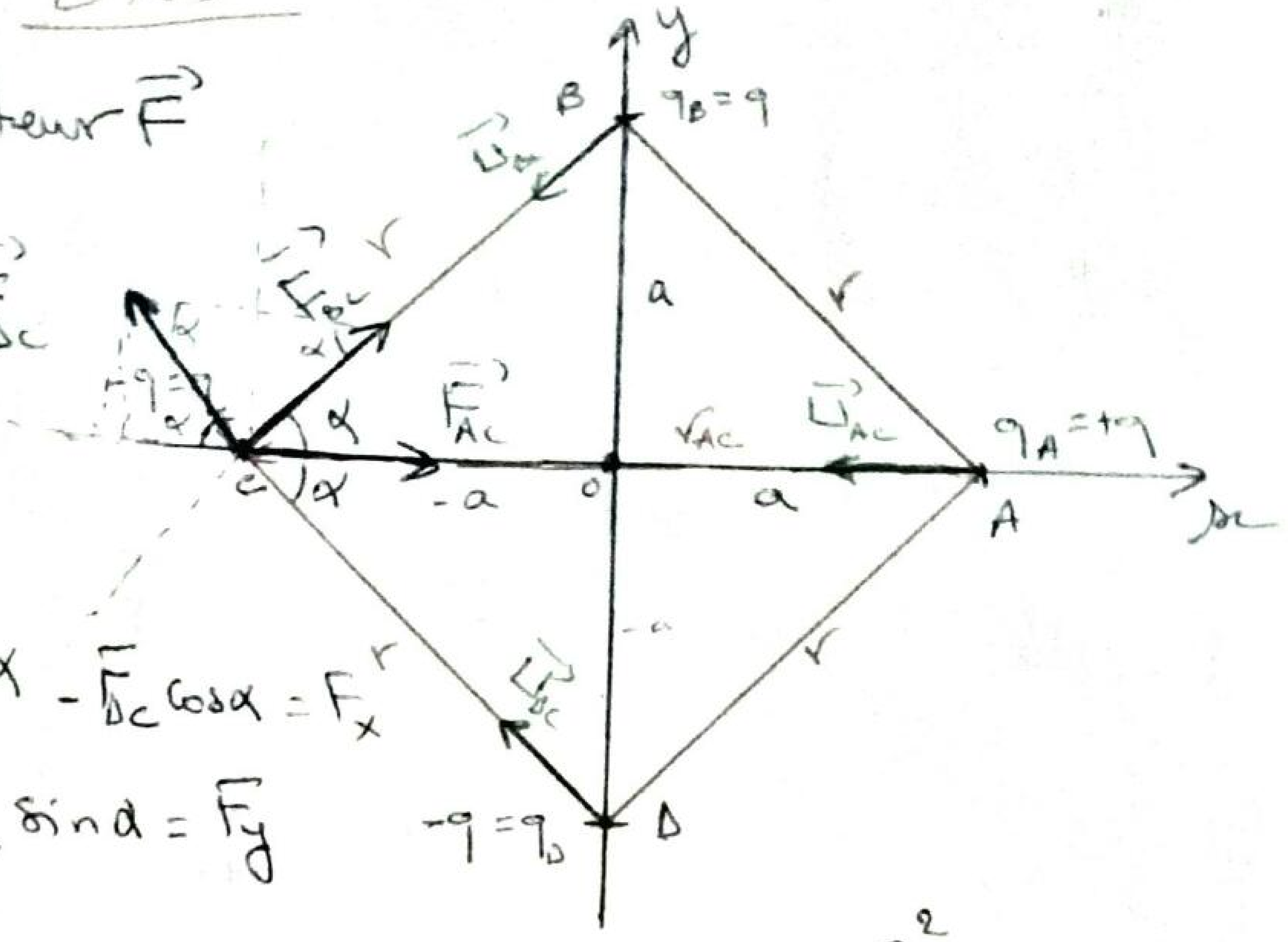
$= -33{,}41\ 10^{-6} \vec{i} - 21{,}61\ 10^{-6} \vec{j} + 83{,}15\ 10^{-6} \vec{k}$

$F = q_3 E_T = 0{,}45\ 10^{-6} \cdot 204{,}85 = \boxed{92{,}18\ 10^{-6}\ N}$

Scanned by TapScanner

Ex 09

Déterminons le vecteur $\vec{F}$ au point C



$\vec{F} = \vec{F}_{DC} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{AC}$

Par projection :

$\perp(ox)$: $F_{AC} + F_{BC}\cos\alpha - F_{DC}\cos\alpha = F_x$

$\perp(oy)$: $F_{BC}\sin\alpha + F_{DC}\sin\alpha = F_y$

avec $F_{AC} = +K\dfrac{q^2}{r_{AC}^2}$, $r_{AC} = 2a \Rightarrow F_{AC} = K\dfrac{q^2}{4a^2}$

$F_{BC} = K\dfrac{q^2}{r_{BC}^2}$; $r_{BC} = r = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow F_{BC} = K\dfrac{q^2}{2a^2}$

$F_{DC} = \dfrac{Kq^2}{r_{DC}^2}$, $r_{DC} = r = \sqrt{2}\,a \Rightarrow F_{DC} = \dfrac{Kq^2}{2a^2}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+a^2}} = \dfrac{\cancel{a}}{\sqrt{2}\,\cancel{a}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}\ \text{rad} = 45°$

$\Rightarrow K\dfrac{q^2}{4a^2} + \cancel{K\dfrac{q^2}{2a^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{\dfrac{Kq^2}{2a^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = F_x$

$\Rightarrow \boxed{F_x = \dfrac{Kq^2}{4a^2}}$

$F_y = K\dfrac{q^2}{2a^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{Kq^2}{2a^2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = K\dfrac{q^2}{2a^2}\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{F_y = \dfrac{Kq^2}{2a^2}\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = K\dfrac{q^2}{4a^2}\vec{i} + K\dfrac{q^2}{2a^2}\sqrt{2}\,\vec{j}}$

$\Rightarrow F = \sqrt{\left(K\dfrac{q^2}{4a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{Kq^2\sqrt{2}}{2a^2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{K^2q^4}{16a^4} + \dfrac{K^2q^4\,2}{4a^4}}$

$F = \sqrt{\dfrac{9K^2q^4}{16a^4}} = \dfrac{Kq^2}{4a^2}\sqrt{9} = \dfrac{3Kq^2}{4a^2}$

2ème méthode :

$$\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{DC} + \vec{F}_{BC}$$

$\vec{F}_{AC} = -K \frac{q^2}{r_{AC}^2} \vec{U}_{AC}$; $r_{AC}^2 = 4a^2$; $\vec{U}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}}$; $\vec{r}_{AC} \begin{pmatrix} -a-a \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{U}_{AC} = \frac{-2a\vec{i}}{2a} = -\vec{i}$

$$\boxed{\vec{F}_{AC} = +K \frac{q^2}{4a^2} \vec{i}}$$

$\vec{F}_{DC} = K \frac{q^2}{r_{DC}^2} \vec{U}_{DC}$; $r_{DC} = a\sqrt{2}$; $\vec{U}_{DC} = \frac{\vec{r}_{DC}}{r_{DC}}$; $\vec{r}_{DC} \begin{pmatrix} -a-0 \\ 0-(-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{U}_{DC} = \frac{-a\vec{i} + a\vec{j}}{a\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{DC} = K \frac{q^2}{2a^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)}$

$\vec{F}_{BC} = -\frac{K q^2}{r_{BC}^2} \vec{U}_{BC}$ avec $\vec{U}_{BC} = \frac{\vec{r}_{BC}}{r_{BC}}$ ~~avec~~ $\vec{r}_{BC} \begin{pmatrix} -a-0 \\ 0-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \end{pmatrix}$

$r_{BC} = a\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{-a\vec{i} - a\vec{j}}{a\sqrt{2}} = \vec{U}_{BC}$

$\Rightarrow \vec{F}_{BC} = -\frac{K q^2}{2a^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

$\Rightarrow \vec{F} = K \frac{q^2}{4a^2}\vec{i} + K \frac{q^2}{2a^2}\left(-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) + \frac{K q^2}{2a^2}\left(+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = K \frac{q^2}{4a^2}\vec{i} + K \frac{q^2}{2a^2}\sqrt{2}\,\vec{j}}$ $\Rightarrow F = \sqrt{\frac{K^2 q^4}{16a^4} + \frac{K^2 q^4 \, 2}{4a^4}}$

$\Rightarrow \boxed{F = \sqrt{\frac{9 K^2 q^4}{16 a^4}} = 3K \frac{q^2}{4a^2} \text{ N}}$

2) $\vec{E}_C$ et $|\vec{E}_C|$: $\vec{F}_C = q_C \vec{E}_C \Rightarrow E_C = \frac{F}{q_C} = \frac{3Kq^2}{4a^2 q} = \frac{3K}{4a^2}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_C = \frac{\vec{F}_C}{q_C} = -K \frac{q}{4a^2}\vec{i} - K \frac{q}{2a^2}\sqrt{2}\,\vec{j}}$ avec $\boxed{q_C = -q}$

$$\sum_{i=1}^{4} V_i = V_A + V_B + V_C + V_D$$

$$V_0 = K\frac{q_A}{a} + \frac{Kq_B}{a} + \frac{Kq_C}{a} + \frac{Kq_D}{a}$$

$$V_0 = \frac{Kq}{a} + \frac{Kq}{a} - \frac{Kq}{a} - \frac{Kq_D}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = 0V}$$