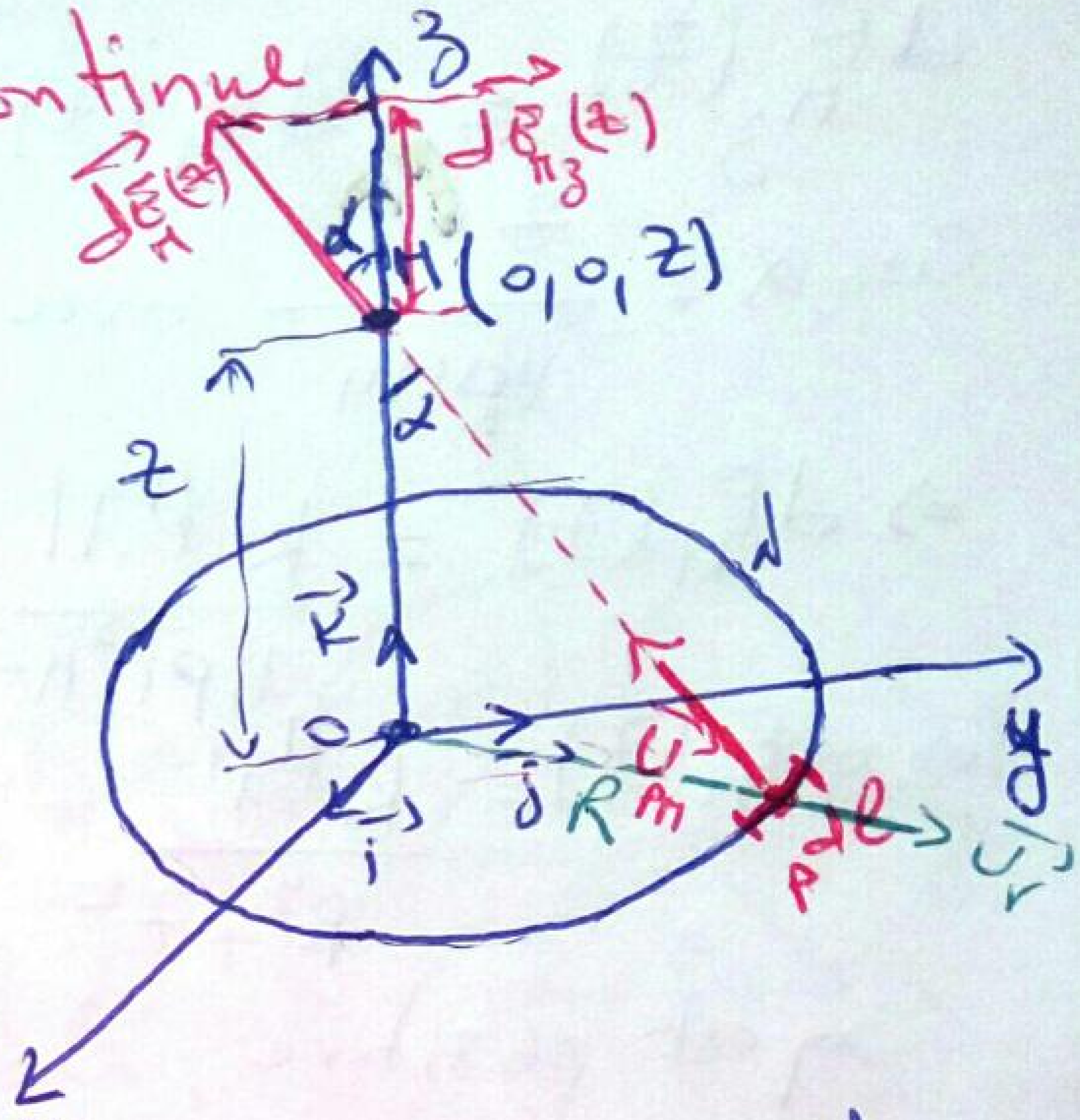
Distribution continue

Exo 1



1) Calcul du champ élementaire $d\vec{E}_{M}(z)$

Pour calculer $d\vec{E}_{M}(z)$, on doit choisir un élement de longueur $d\ell$ qui porte une charge élementaire dq. et tellement $d\ell$ est très petit (infinitésimal), on peut le considérer comme un point ponctuel (P).

$$d\vec{E}_{M}(z) = K\frac{q}{\|\vec{PM}\|^2}\vec{U}_{PM} = d\vec{E}_{M_x}(z) + d\vec{E}_{M_y}(z) + d\vec{E}_{M_3}(z)$$

Pour résoudre ce prolème, il y a plusieurs méthodes.

. En utilisant la méthode de projection

$$d\vec{E}_{M}(z) = d\vec{E}_{M_x}(z) + d\vec{E}_{M_y}(z) + d\vec{E}_{M_3}(z)$$

- Le plan $(M, \vec{j}, \vec{k})$ est un plan de symétrie (on choit le plan qui passe par le point M et qui est symétrie de la répartition des charges)
- Le plan $(M, \vec{i}, \vec{k})$ est un plan de symétrie

alors le champ $\vec{E}(M)$ appartient aux plans de symétrie passant par M

l'axe $(O\vec{z})$ est commun entre les deux plans de symétrie

donc le champ $\vec{E}_{M}(z)$ est porté sur l'axe (Oz)

$$\boxed{\vec{E}_{M}(z) = \vec{E}_{M_3}(z)}$$

$\Rightarrow \vec{dE}_M(z) = \vec{dE}_{M_z}(z)$

$\vec{dE}_{M_z}(z) = dE_M(z)\cos\alpha\,\vec{k}$

$\cos\alpha = \frac{z}{\|\vec{PM}\|}$ avec $\|\vec{PM}\| = r = \sqrt{R^2+z^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}}$

$dE_M(z) = K\frac{|dq|}{\|\vec{PM}\|^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\|\vec{PM}\|^2}$ avec $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ C

$\Rightarrow dE_M(z) = K\frac{|dq|}{R^2+z^2}$ $\Rightarrow$ $\vec{dE}_M(z) = \frac{K|dq|}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\vec{k}$

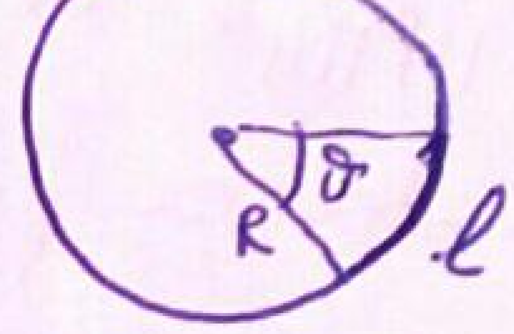
q est positive, alors $|dq| = dq$

$dq = \lambda\, dl$ (car la densité est linéique)

alors $\vec{dE}_M(z) = K\frac{\lambda\, dl\, z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$

$dl = ?$ on a $l = R\theta$

$\frac{dl}{d\theta} = R\cancel{\frac{d\theta}{d\theta}}^{\to 1} = R \Rightarrow \boxed{dl = R\,d\theta}$



donc $\vec{dE}_M(z)$ devient :

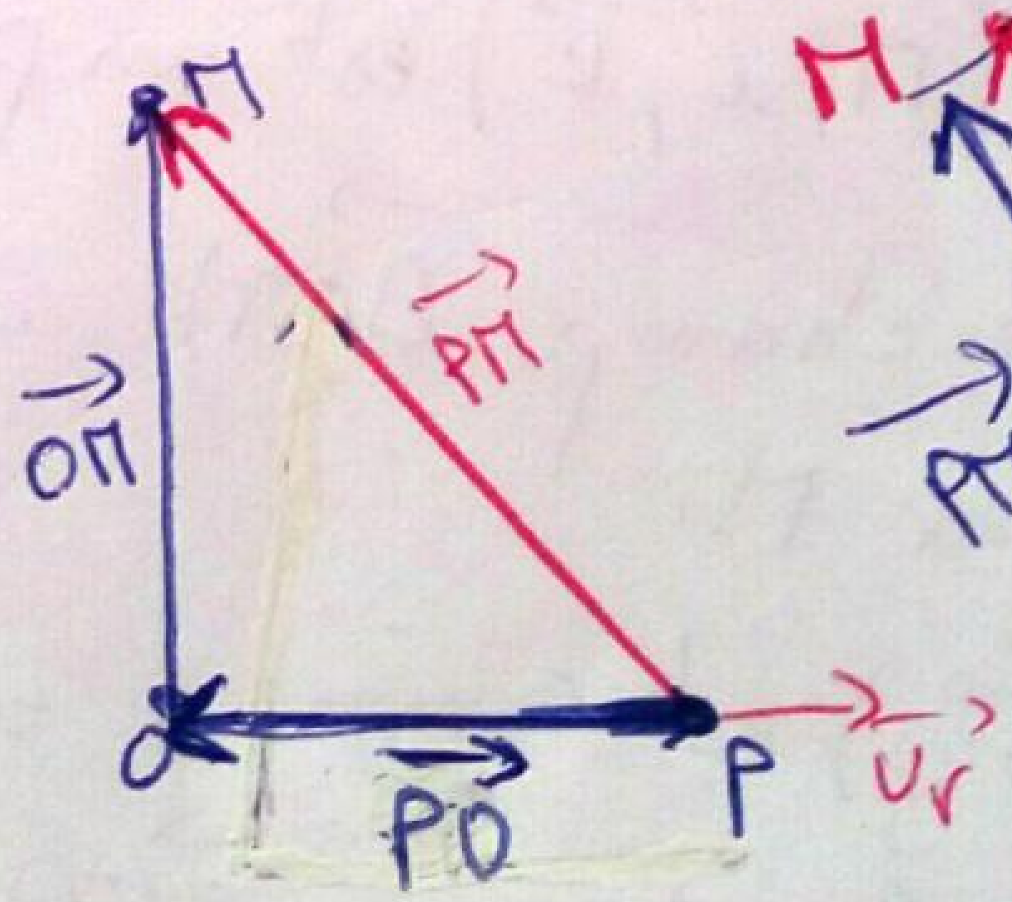
$$\boxed{\vec{dE}_M(z) = K\frac{\lambda R z\, d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}}$$

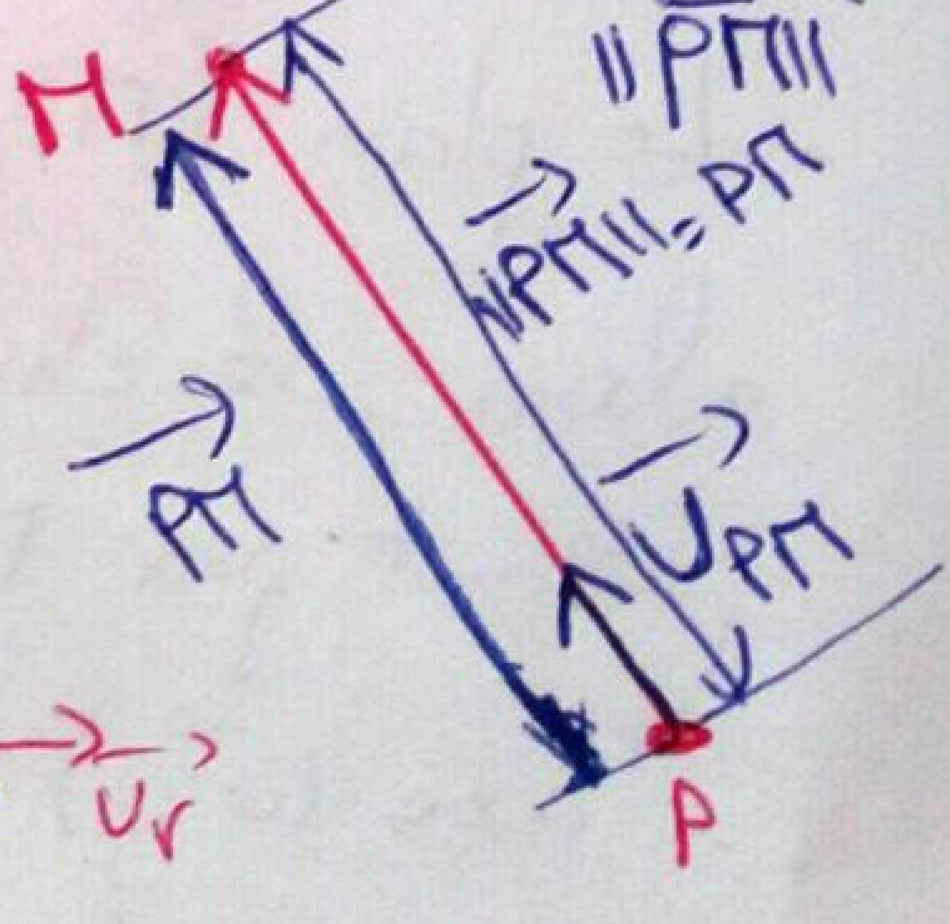
2) 2ième méthode pour résoudre le problème de $\vec{dE}_M(z)$

$\vec{dE}_M(z) = K\frac{|dq|}{\|\vec{PM}\|^2}\vec{U}_{PM} = K\frac{|dq|}{\|\vec{PM}\|^3}\vec{PM}$ avec $\vec{U}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$.

$\|\vec{PM}\| = \sqrt{R^2+z^2}$

$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{U}_r + z\vec{k}$





d'autre part, par raison de symétrie le champ $dE_M(z)$ est porté sur l'axe (Oz),

alors $\vec{U}_r$ ne nous intéresse pas, ce que nous permez d'écrire

$\boxed{\vec{dE}_M(z) = K\frac{dq}{(R^2+z^2)^{3/2}}z\vec{k}}$; $q>0$ et $dq = \lambda R\, d\theta$

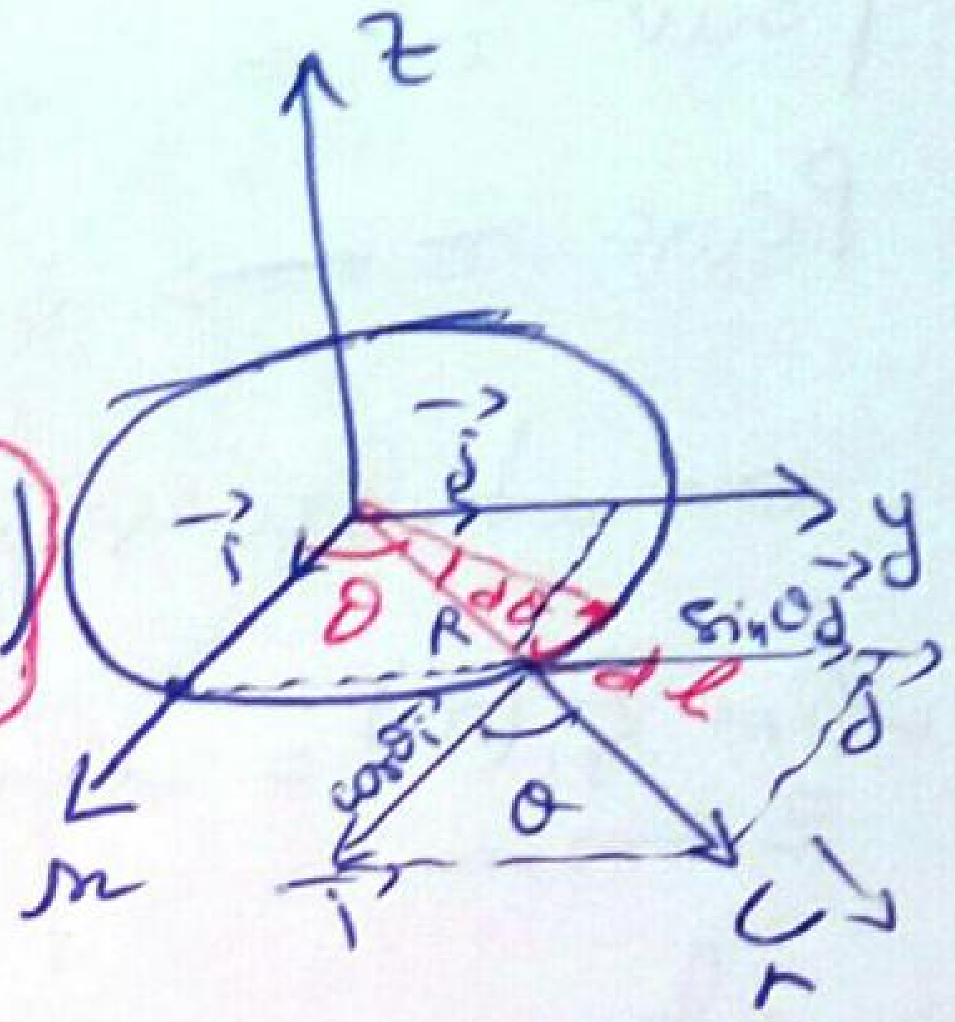
• soit sans tenir compte de la symétrie

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = R\vec{U}_r + z\vec{k}$$

$$\vec{U}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{PM} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{dE}_M(z) = K\,\frac{dq}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}\right)}$$



avec $dq = R\lambda\,d\theta$

2) Calcul $\overrightarrow{E}_M(z)$

$$\overrightarrow{E}_M(z) = \int \overrightarrow{dE}_{M_z}(z) = \int \overrightarrow{dE}_M(z) = \int_0^{2\pi} K\,\frac{\lambda R z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,d\theta\,\vec{k}$$

$$= \frac{K\lambda R z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[2\pi - 0\right]\vec{k} = K\,\frac{\lambda R z\,2\pi}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E}_M = \frac{1(2\pi)}{4\pi\varepsilon_0}\lambda R z\left(\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{E}_M = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\,\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{k}}$$

• Cas sans tenir compte de la symétrie

$$\overrightarrow{E}_M(z) = \int_0^{2\pi} \frac{K R\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}\right)d\theta$$

$$= \frac{K R\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[R\sin\theta\,\vec{i} - R\cos\theta\,\vec{j} + z\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(-R(\cos 2\pi - \cos(0))\vec{j} - R(\sin 2\pi - \sin 0)\vec{i} + z(2\pi - 0)\vec{k}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,z\left(\frac{R\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right)(2\pi)\vec{k} = \boxed{\frac{R\lambda}{2\varepsilon_0}\,\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{k}}$$

3) Traçons $E_M(z)$, pour $z \geq 0$

$$E_M(z) = \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Pour $z = 0 \Rightarrow E_M(0) = 0$

Pour $z \to \infty \Rightarrow \lim_{z\to\infty} E_M(z) = \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\infty}{\infty}$ CND

on utilise règle de l'Hospital $z \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty} E_M(z) = \lim \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\frac{3}{2}(2z)(z^2+R^2)^{1/2}} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

alors pour $z \to \infty \Rightarrow E_M(z)_{z\to\infty} = 0$

pour trouver la valeur max de $E_M(z)$, on pose

$$\frac{dE_M(z)}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{dE_M(z)}{dz} = \frac{R\lambda}{2\varepsilon} \left(\frac{(z^2+R^2)^{3/2} - \frac{3}{2}z(2z)(z^2+R^2)^{1/2}}{(z^2+R^2)^{3/2}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_M(z)}{dz} = \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0} \left(\frac{(z^2+R^2)^{1/2}(z^2+R^2-3z^2)}{(z^2+R^2)^{3/2}} \right)$$

$$= \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{(R^2-2z^2)}{(z^2+R^2)^{5/2}} = 0 \Rightarrow R^2 - 2z^2 = 0$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ avec } z \geq 0$$

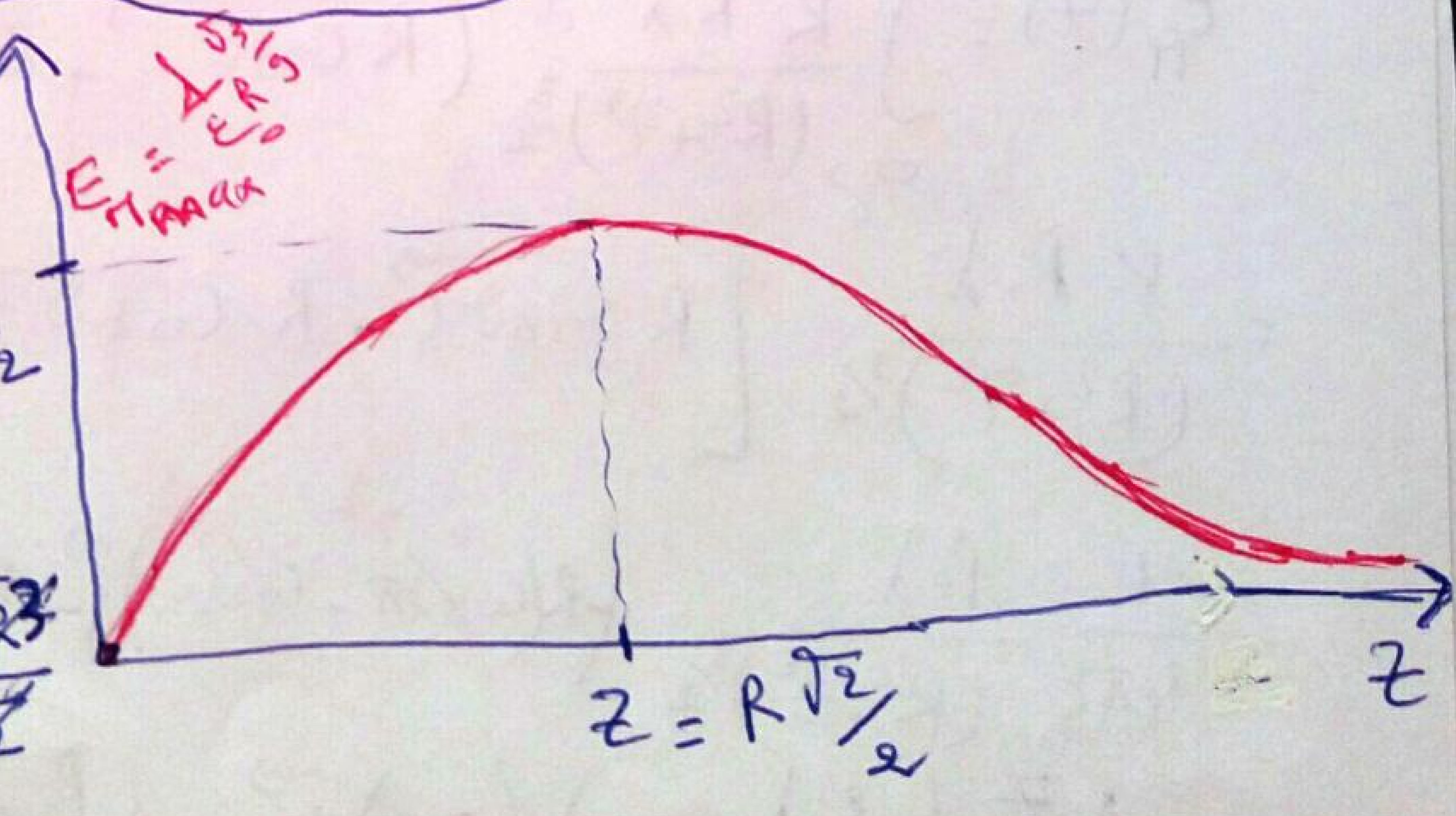
on prend $z = +\frac{R}{\sqrt{2}} = R\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$E_{M_{max}}\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R\sqrt{2}/2}{(R^2+\frac{2R^2}{4})^{3/2}}$$

$$= \frac{R^2\lambda}{4\varepsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{(R^2+\frac{R^2}{2})^{3/2}} = \frac{R^2\lambda\sqrt{2}}{4\varepsilon_0\left(\frac{3R^2}{2}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{R^2\lambda}{4\varepsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\frac{3R^2}{2}}\right)^3} = \frac{R^2\lambda}{4\varepsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{3}R^3}{2\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{E_{M_{max}}\left(z = R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 R} \frac{\sqrt{3}}{9}}$$



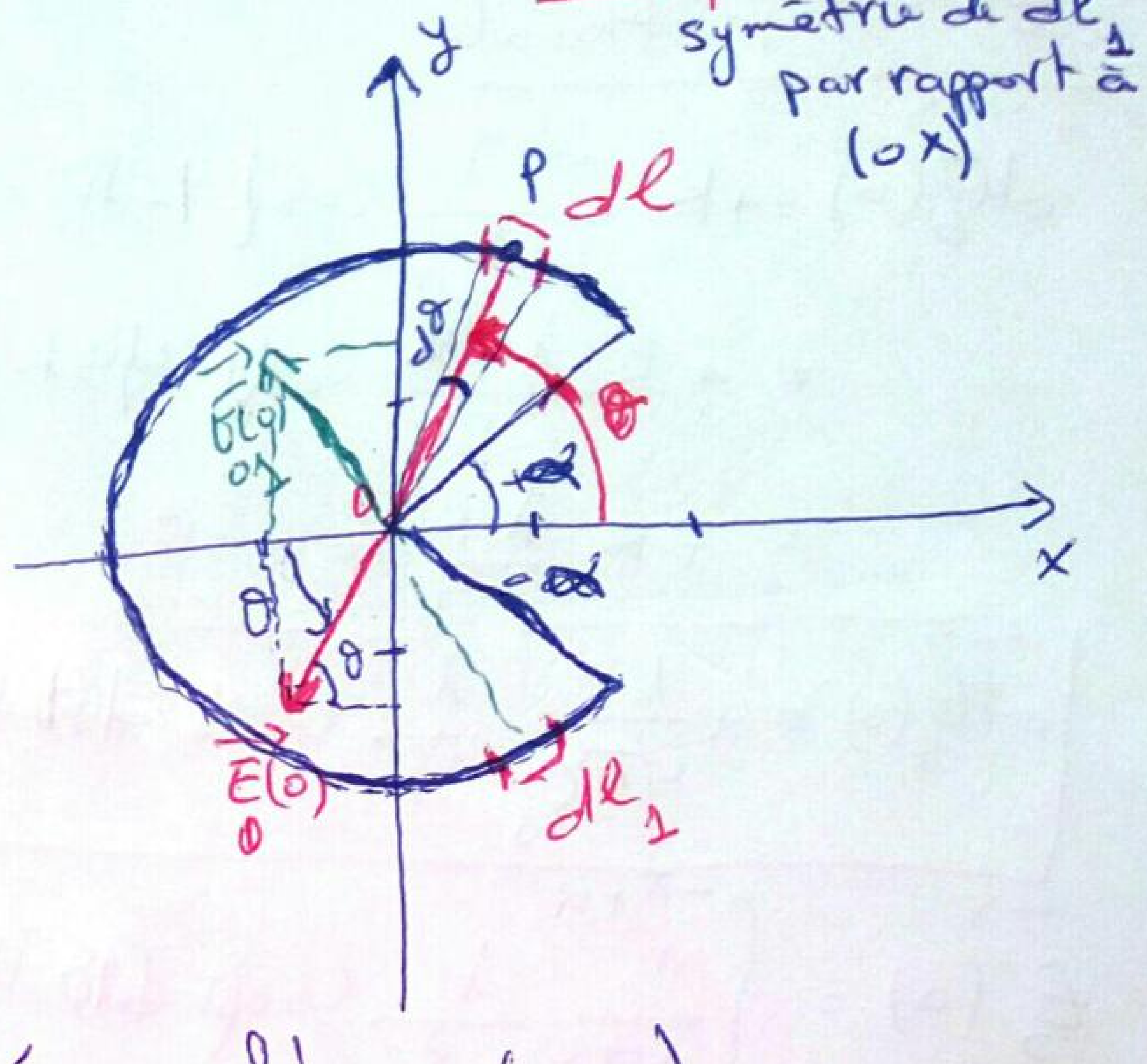
Scanned by TapScanner

EXO 2

Trouvons $\vec{E}_0(0)$

Le plan (o, x, y) est un plan de symétrie

l'axe (ox) est un axe de symétrie de la répartition de charges



alors le champ $\vec{E}_0(0)$ est porté sur l'axe (ox)

$$\vec{E}_0(0) = \vec{E}_{0x}(0)$$

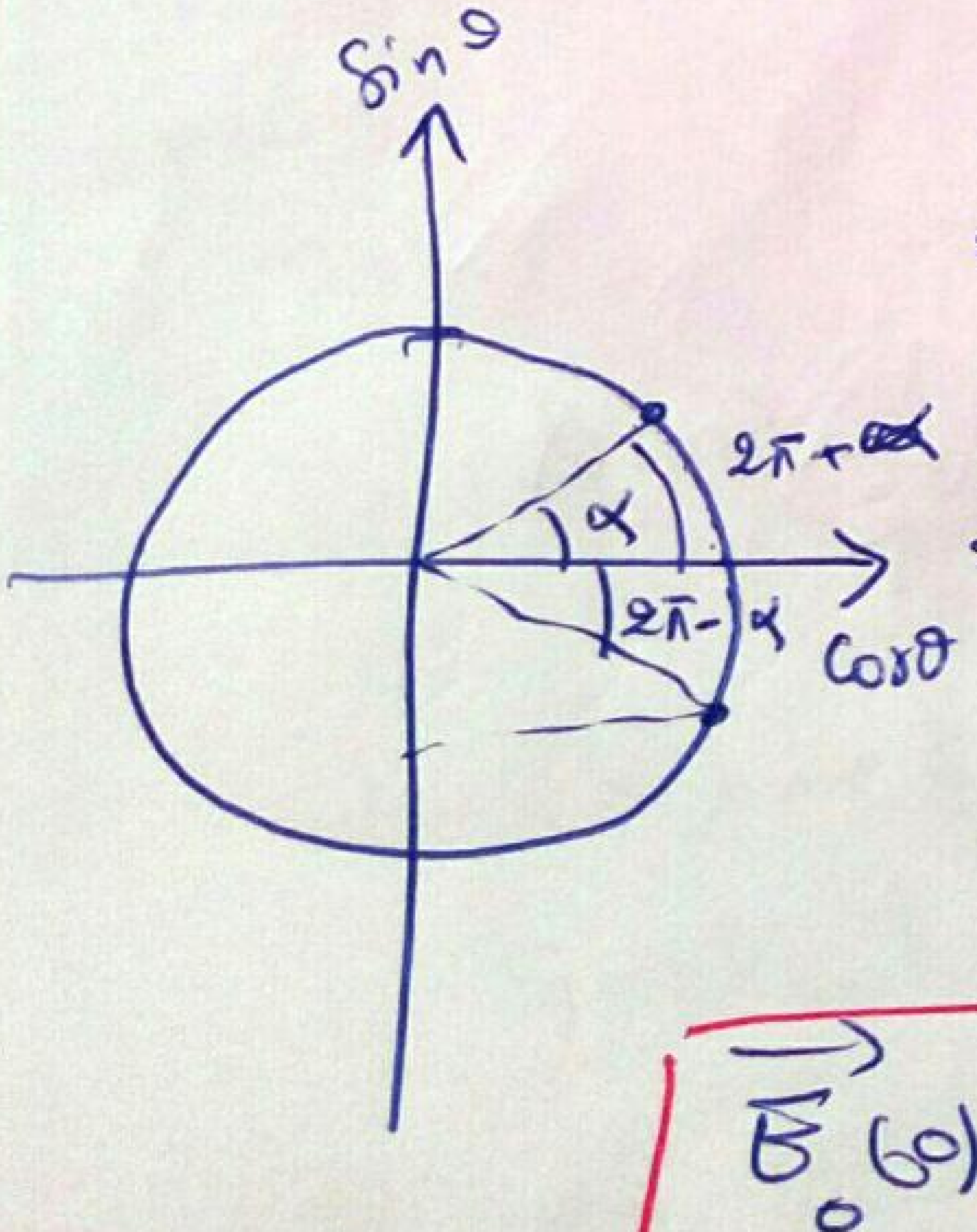
$$\Rightarrow d\vec{E}_0(0) = d\vec{E}_{0x}(0) = -E_{0x}(0)\,\vec{i} = -E_0(0)\cos\theta\,\vec{i}$$

$$= -k\frac{|dq|}{\|\vec{OP}\|^2}\cos\theta\,\vec{i} \quad \text{avec } \|\vec{OP}\| = R \text{ et } q>0$$

$$\Rightarrow d\vec{E}_0(0) = -k\frac{dq}{R^2}\cos\theta\,\vec{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{R^2}\cos\theta\,\vec{i}$$

$$d\vec{E}_0(0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \cancel{R}\,d\theta}{\cancel{R^2}}\cos\theta\,\vec{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\cos\theta\,d\theta\,\vec{i}$$

$$\vec{E}_0(0) = \int d\vec{E}_0(0) = \int_{+\alpha}^{2\pi-\alpha} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\theta}{R^2}\cos\theta\,\vec{i}$$



$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_{+\alpha}^{2\pi-\alpha}\cos\theta\,d\theta\,\vec{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\Big[\sin\theta\Big]_{+\alpha}^{2\pi-\alpha}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left(\sin(2\pi-\alpha) - \sin(\alpha)\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left(-\sin\alpha - \sin\alpha\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}(-2\sin\alpha)$$

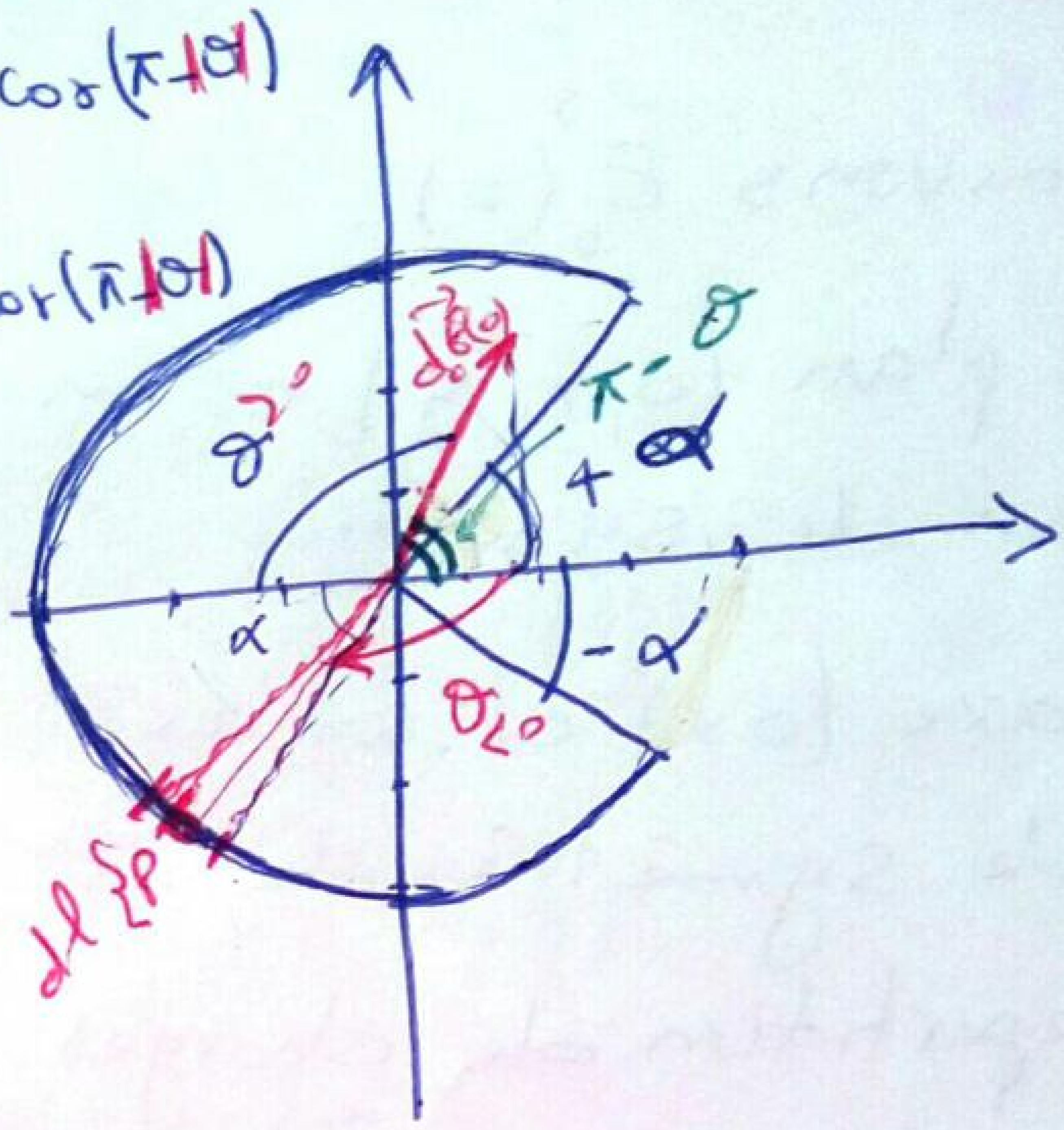
$$\boxed{\vec{E}_0(0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\sin\alpha}$$

2ième méthode

$$\vec{dE_0}(O) = +K\,\frac{dq}{R^2}\cos(|\theta|-\pi) = K\,\frac{dq}{R^2}\cos(\pi-|\theta|)$$

$$= +K\,\frac{\lambda\, dl}{R^2}\cos(|\theta|-\pi) = K\,\frac{\lambda\, dl}{R^2}\cos(\pi-|\theta|)$$

$$= +K\,\frac{\lambda R\, d\theta}{R^2}\cos\theta$$



$$\boxed{\vec{dE_0}(O) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{R}\cos(\pi-|\theta|)\,d\theta}$$

$$\vec{E_0}(O) = \int_{-2\pi+\alpha}^{-\pi+\alpha} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{R}\cos(\pi-|\theta|)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{R}\Big[\sin(\pi-|\theta|)\,d\theta\Big]_{-2\pi+\alpha}^{-\pi+\alpha}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{R}\Big[\sin(\pi-|-\pi+\alpha|) - \sin(\pi-|-2\pi+\alpha|)\Big]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\Big[\sin(\pi-(\pi-\alpha)) - \sin(\pi-(2\pi-\alpha))\Big]$$

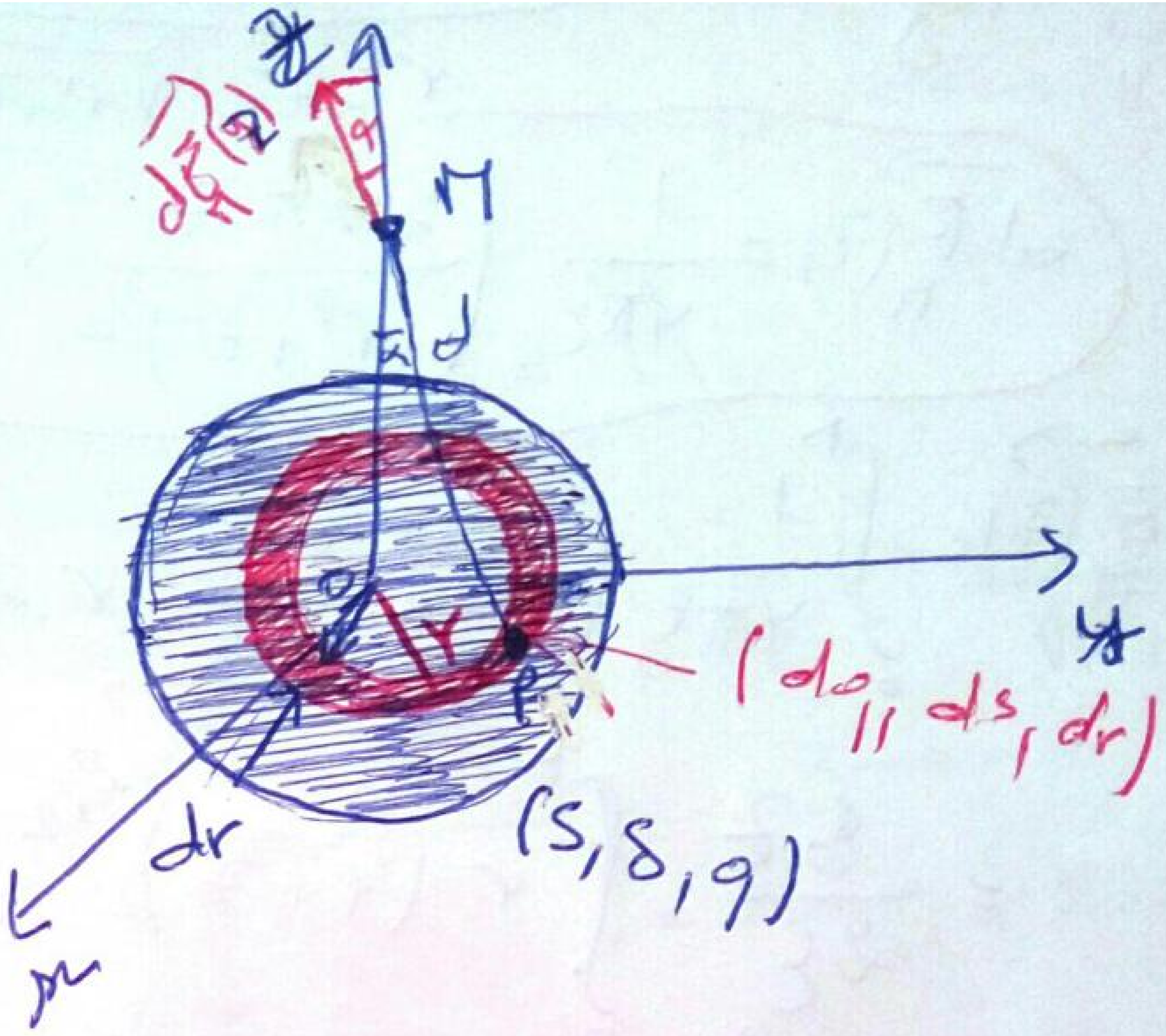
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\big(\sin(\alpha) - \sin(-\pi+\alpha)\big)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\big(\sin\alpha - \sin(-\alpha)\big)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\big(\sin\alpha - (-\sin\alpha)\big)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\big(2\sin\alpha\big) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R}\sin\alpha$$

Pour calculer le champ électrique E en un point M on doit choisir tout d'abord une surface élementaire ds pour calculer dE



$\vec{E} = \int \vec{dE}$

$\vec{dE} = K \frac{dq}{\|\vec{PM}\|^2} \vec{U}_M = d\vec{E}_{M_x}(x) + d\vec{E}(z)$

Le plan (x, y, z) est un plan de symétrie de la répartition de charge et qui passe par le point M

Le plan (M, x, z) est un plan de symétrie

L'axe (oz) est axe commun, alors le champ est porté sur l'axe (oz)

$\vec{dE}_M(z) = d\vec{E}_{M_z}(z) = dE_M(z) \cos\alpha \, \vec{k}$

avec

$\cos\alpha = \frac{z}{d} = \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$

$dE_M(z) = K \frac{|dq|}{\|\vec{PM}\|^2}$; $\|\vec{PM}\|^2 = d^2 = r^2+z^2$; $dq = \delta dS$ (une densité surfacique) alors $dq = \delta$

Sachant que: $S = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 2\pi \frac{dr}{dr} = \pi$

$\Rightarrow dS = 2\pi r dr$

$$\overrightarrow{dE_M}(z) = K \frac{\delta\, 2\pi r\, dr}{r^2+z^2} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \vec{k}$$ avec r est variable

$$\boxed{\overrightarrow{dE_M}(z) = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\left(\frac{\delta \cancel{2\pi} z}{(r^2+z^2)^{3/2}} r\,dr\right)\vec{k}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\delta z}{(r^2+z^2)^{3/2}} r\,dr\right)$$

$$\overrightarrow{E_M}(z) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\delta 2\pi z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right) r\,dr\,\vec{k} = \int_0^R \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\delta z\right)\left(\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr\right)\vec{k}$$

$$= \frac{\delta z}{2\varepsilon_0}\int_0^R r\,(r^2+z^2)^{-3/2}\,dr\,\vec{k} = \frac{\delta z}{2\varepsilon_0}(-)\frac{1}{2}\int_0^R(-2r)(r^2+z^2)^{-3/2}\,dr\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{E_M}(z) = -\frac{\delta z}{2\varepsilon_0}\left[(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R\vec{k} = -\frac{\delta z}{2\varepsilon_0}\left[(R^2+z^2)^{-1/2} - (z^2)^{-1/2}\right]\vec{k}$$

$$= -\frac{\delta z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{|z|}\right)\vec{k} = -\frac{\delta \cancel{z}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{|z| - \sqrt{R^2+z^2}}{\cancel{|z|}\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_M}(z) = -\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{|z| - \sqrt{R^2+z^2}}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k}} = -\frac{\delta z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{|z|}\right)\vec{k}$$

$$= -\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z}{|z|}\right)\vec{k}$$

2) Traçons $E(z)$

Pour $z = 0 \Rightarrow E_M(0) = \mp \frac{\delta}{2\varepsilon_0}$

$$E_M(0) = -\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{0}{R} - 1\right) \text{ pour } z > 0$$

$$= +\frac{\delta}{2\varepsilon_0}$$

$$E_M(0) = -\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(0 - (-1)\right) \text{ pour } z < 0$$

$$= -\frac{\delta}{2\varepsilon_0}$$

$$\lim_{z\to+\infty} E_M(0) = \lim_{z\to+\infty}\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \lim_{z\to+\infty}\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\overset{\nearrow 1}{\frac{z}{z}} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

$$= \lim \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{R^2+z^2}}\right) =$$

$$\lim_{z\to+\infty} E_\Pi(0) = \lim_{z\to+\infty} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(1-\sqrt{\frac{Z^2}{R^2+Z^2}}\right) = \lim_{z\to+\infty} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(1-\sqrt{\frac{1}{\underbrace{\frac{R^2}{Z^2}}_{0}+\underbrace{\frac{Z^2}{Z^2}}_{1}}}\right)$$

$$= \lim \frac{\delta}{2\varepsilon_0}(1-1)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to+\infty} E_\Pi(0) = 0$$

$$\lim_{z\to-\infty} E_\Pi(0) = \lim_{z\to-\infty} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(-1-\frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}\right) = \lim_{z\to-\infty} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(-1-\frac{-\sqrt{Z^2}}{\sqrt{R^2+Z^2}}\right)$$

$$= \lim_{z\to-\infty} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(-1+\sqrt{\frac{1}{\underbrace{\frac{R^2}{Z^2}}_{0}+\underbrace{\frac{Z^2}{Z^2}}_{1}}}\right) = \lim_{z\to-\infty}\frac{\delta}{2\varepsilon_0}(-1+1)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to-\infty} E_\Pi(0) = 0$$

- Rq :

$$\lim_{z\to-\infty} E_\Pi(0) = \lim_{z\to-\infty} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(-1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right) = \lim_{z\to-\infty} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(-1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2}}\right)$$

$$= \lim_{z\to-\infty} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(-1-\frac{Z}{-Z}\right) = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}(-1+1) = 0$$

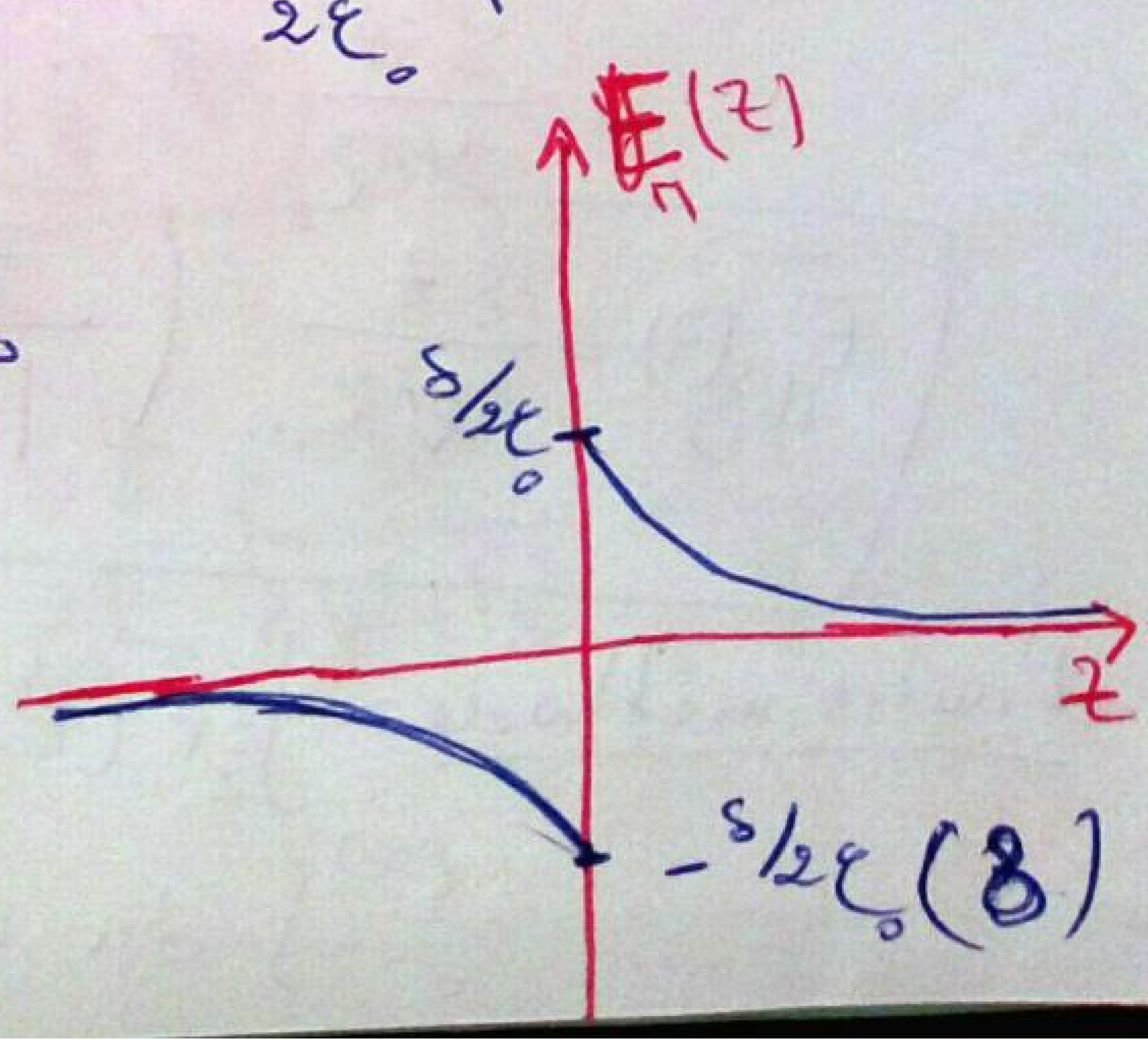
Rq : $\sqrt{Z^2} = |Z| = -Z$ pour $Z<0$

sachant : $\sqrt{Z^2} > 0 \Rightarrow \sqrt{Z^2} = -Z$ pour $Z \in]-\infty, 0[$

En résumé : pour $Z=0 \rightarrow \begin{cases} E_\Pi(0) = +\dfrac{\delta}{2\varepsilon_0} & \text{pour } Z>0 \\ E_\Pi(0) = -\dfrac{\delta}{2\varepsilon_0} & \text{pour } Z<0 \end{cases}$

pour $Z \to +\infty \Rightarrow \lim_{Z\to+\infty} E_\Pi(Z) = 0$

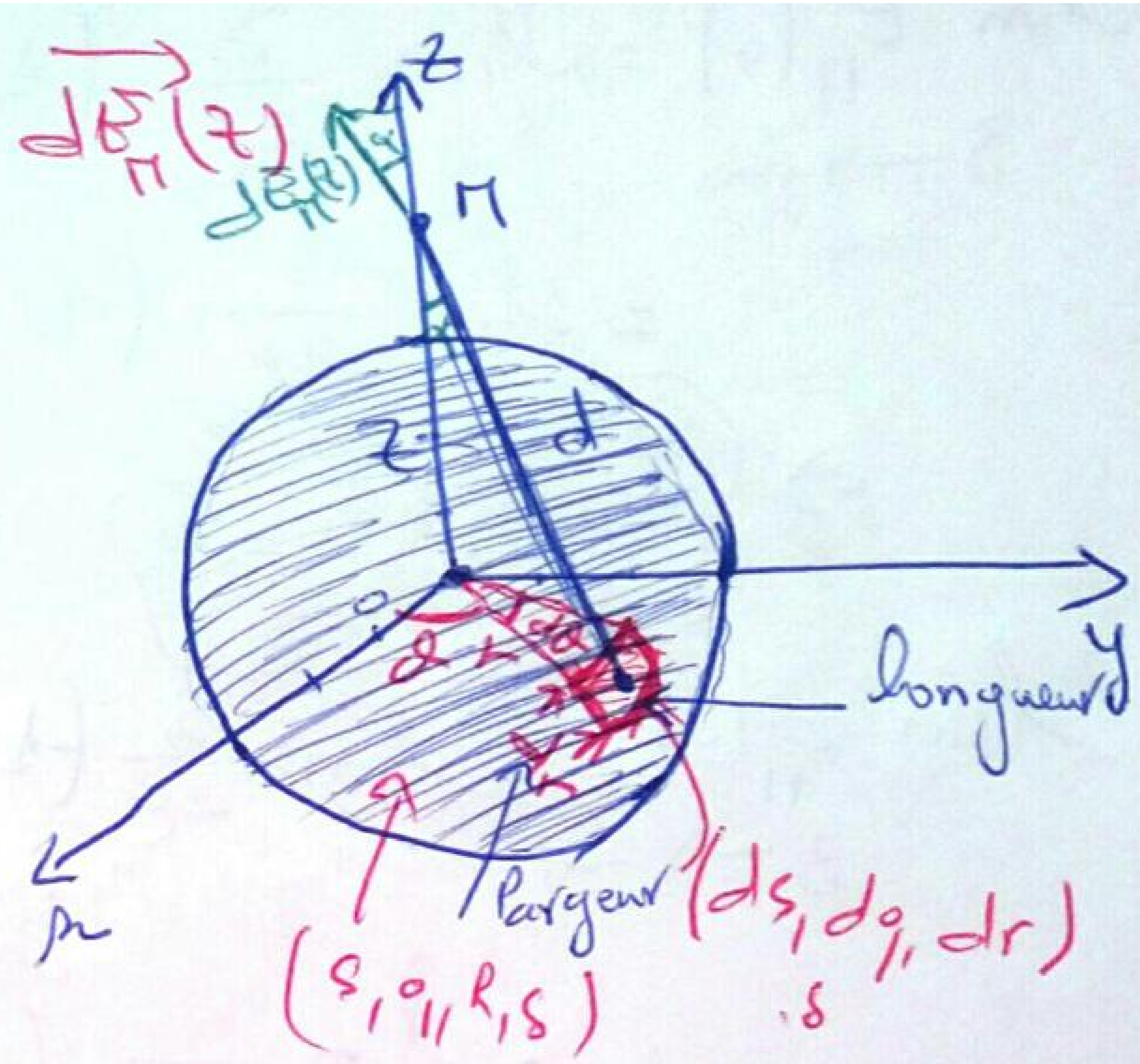
pour $Z \to -\infty \Rightarrow \lim_{Z\to-\infty} E_\Pi(Z) = 0$



(8)

Scanned by TapScanner

• 2ième méthode pour calculer $d\vec{E}_M(z)$



Par raison de symétrie

$$d\vec{E}_M(z) = d\vec{E}_{M_z}(z) = dE_{M_z}(z)\,\vec{k}$$

$$dE_{M_z} = dE_M(z)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow d\vec{E}_M(z) = dE_M(z)\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$dE_M(z) = K\dfrac{dq}{\|\vec{PM}\|^2}$, $\|\vec{PM}\|^2 = d^2 = z^2+r^2$; $dq = \delta\,dS$ (densité surfacique) dS = largeur x longueur $= (dr)\cdot(r\,d\theta)$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{E}_{M_z} = K\frac{\delta\,dr\,r\,d\theta}{z^2+r^2}\,\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\,\vec{k} = \frac{\delta z}{4\pi\varepsilon_0}\,d\theta\,\frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\,\vec{k}}$$

• Calculons $E_{M_z}(z)$

$$\vec{E}_{M_z}(z) = \int dE_{M_z}\vec{k} = \iint \frac{\delta z}{4\pi\varepsilon_0}\,d\theta\,\frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\delta z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_{M_z}(z) = \frac{\delta z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\theta\right]_0^{2\pi}\int_0^R(-\cancel{2})\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)2r\,(z^2+r^2)^{-3/2}\,dr\,\vec{k}$$

$$= \frac{\delta z}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\int_0^R(-)\left(-\tfrac{1}{2}\right)(2r)(z^2+r^2)^{-3/2}\,dr = \frac{\delta z}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\left[(z^2+r^2)^{-1/2}\right]_0^R\vec{k}$$

$$= \frac{\delta z}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cancel{2\pi}\cdot\left((z^2)^{-1/2} - (z^2+R^2)^{-1/2}\right)\vec{k}$$

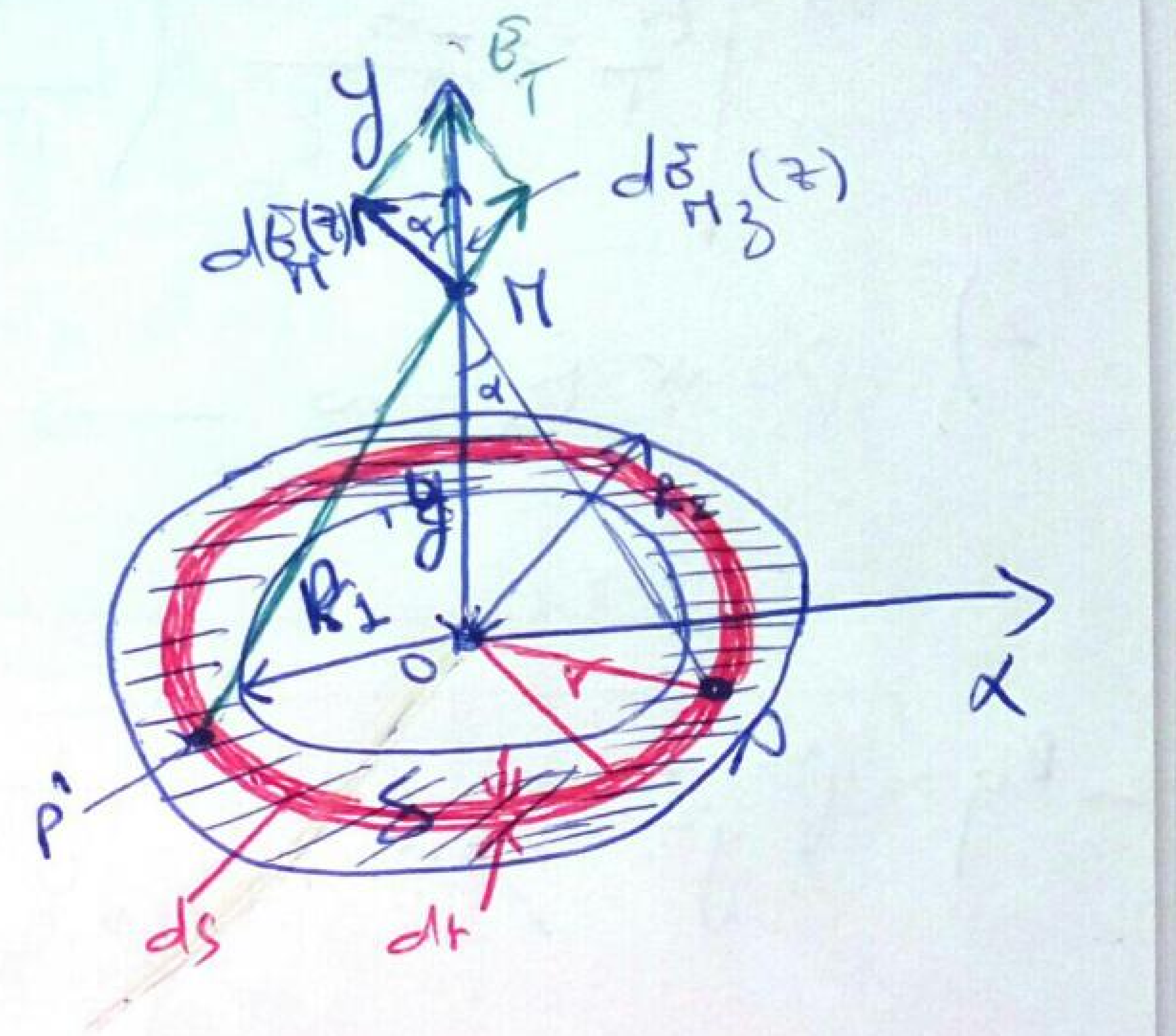
$$\boxed{\vec{E}_{M_z}(z) = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}}$$

d'autre méthode: $\int \frac{2}{2}r\,(z^2+r^2)^{-3/2}\,dr = \frac{1}{2}(z^2+r^2)^{-3/2+1} \Big/ {-3/2+1} = \frac{1}{2}\,\dfrac{(z^2+r^2)^{-1/2}}{-1/\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow \int du\,u^n = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ avec $u^n = (z^2+r^2)^{-3/2}$ et $du = 2r$

Scanned by TapScanner

EXO4



Par raison de symétrie,
$\vec{E}_T$ est porté sur l'axe (oy)

$\Rightarrow \vec{E}_T = \vec{E}_{My}(y)$

$d\vec{E}_{M_T}(y) = d\vec{E}_{My}(y) = dE_{My}\,\vec{j}$

$= dE_{M_T}\cos\alpha\,\vec{j}$

$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{z^2+r^2}}$; $dE_{M_T} = K\frac{dq}{\|\vec{PM}\|^2} = K\frac{\sigma\, ds}{z^2+r^2}$

$ds = ?$ $S = \pi r^2 \Rightarrow \frac{ds}{dr} = \pi\, 2r\,\frac{dr}{dr} = 2\pi r \Rightarrow \boxed{ds = 2\pi r\, dr}$

alors $dE_{M_T} = K\frac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{y^2+r^2} = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cancel{2\pi}\,\sigma\,\frac{r}{y^2+r^2}\,dr$

$dE_{M_T} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r}{y^2+r^2}\,dr$

$\Rightarrow d\vec{E}_{My} = d\vec{E}_{M_T} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r}{y^2+r^2}\,dr\,\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\,\vec{k}$

$= \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\frac{r\,dr}{(y^2+r^2)^{3/2}}\,\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{E}_{M_T} = \int d\vec{E}_{M_T} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\frac{r\,dr}{(y^2+r^2)^{3/2}}\,\vec{k} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\underbrace{\int_{R_1}^{R_2}\frac{2}{2}r\,(y^2+r^2)^{-3/2}\,dr}_{\int u^n\,du}\,\vec{k}$

$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\cancel{\frac{1}{2}}\left[\frac{(y^2+r^2)^{-1/2}}{-1/\cancel{2}}\right]_{R_1}^{R_2}$

$= -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}(y^2+r^2)^{-1/2}\Big|_{R_1}^{R_2} = -\frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{y^2+R_2^2} - \frac{1}{y^2+R_1^2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_T = -\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+R_2^2}} - \frac{y}{\sqrt{y^2+R_1^2}}\right)}$

2) pour $R_1 = 0 \longrightarrow \vec{E}_T(R_1=0) = \frac{-\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+R_2^2}} - \frac{y}{\sqrt{y^2}}\right)\vec{k}$

$$= \frac{-\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+R_2^2}} - \frac{y}{|y|}\right)\vec{k}$$

Rq : $\sqrt{y^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2} = +y & \text{pour } z \geq 0 \\ \sqrt{y^2} = -y & \text{pour } z \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{y^2} = |y|$

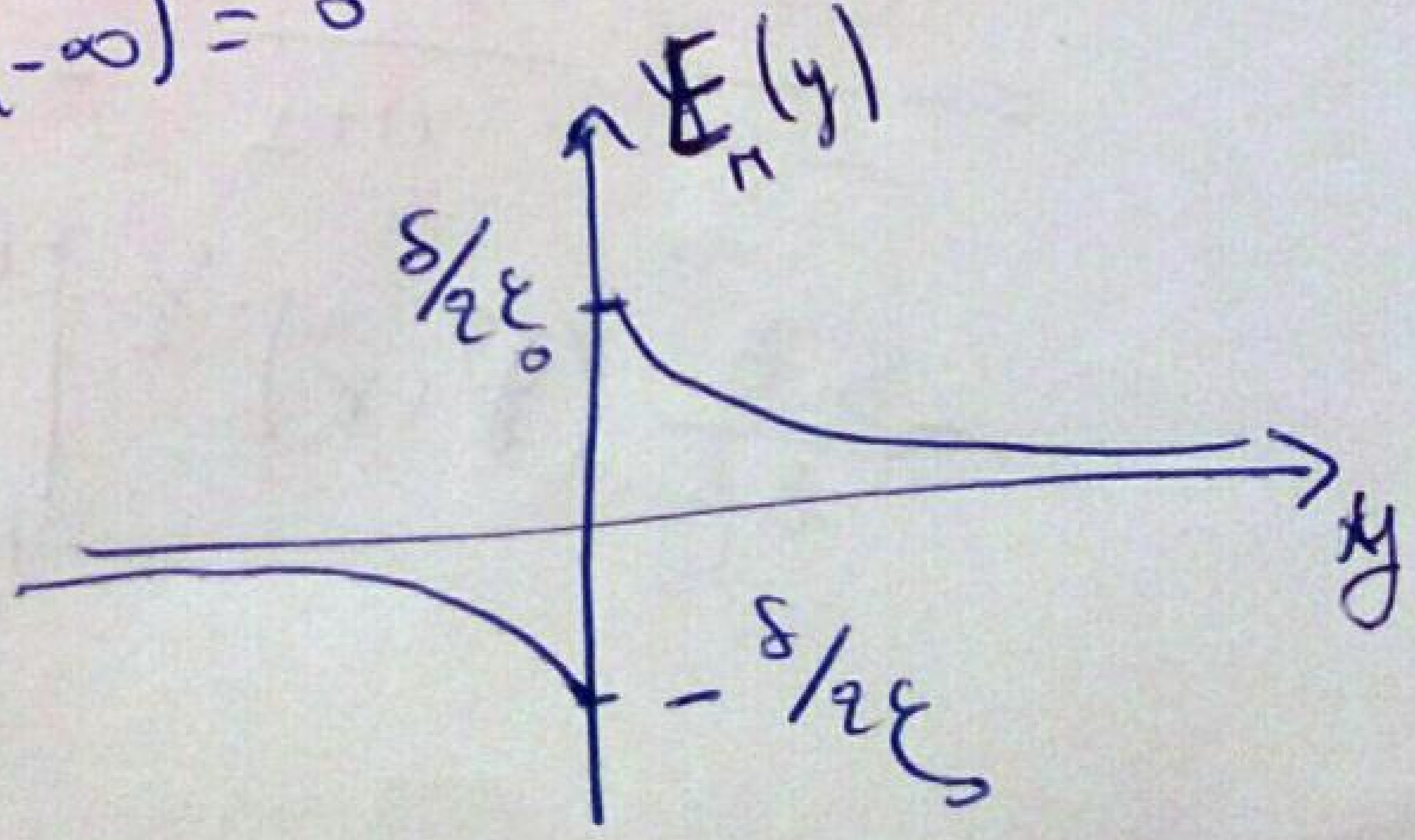
$\Rightarrow \vec{E}_T(R_1=0) = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{y^2+R_2^2}}\right)\vec{k} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\underset{\text{pour } y<0}{\overset{\text{Pour } y>0}{\pm}} 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+R^2}}\right)\vec{k}$

Traçons le graphe : le graphe est le même que celui de l'exo 3

Pour $y = 0 \longrightarrow \begin{cases} E_T(0) = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(+1 - \frac{0}{R}\right) = +\frac{\delta}{2\varepsilon_0} & \text{pour } y > 0 \\ E_T(0) = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(-1 - \frac{0}{R}\right) = -\frac{\delta}{2\varepsilon_0} & \text{pour } y < 0 \end{cases}$

pour $y \longrightarrow +\infty \longrightarrow dE_{M_T}(\infty) = 0$

$y \longrightarrow -\infty \longrightarrow dE_{M_T}(-\infty) = 0$



suite d'Ex04 . Lorsque $R_1 \longrightarrow 0$ et $R_2 \longrightarrow \infty$

$$\vec{E}_T(y) = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+R_1^2}} - \frac{y}{\sqrt{y^2+R_2^2}}\right) \underset{\substack{R_1 \to 0 \\ R_2 \to \infty}}{=} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{|y|}\right) = \begin{cases} \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\frac{y}{y} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0} & \text{pour } y > 0 \\ +\frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{-y}\right) = -\frac{\delta}{2\varepsilon_0} & \text{pour } y < 0 \end{cases}$$

Rq :

$$\sqrt{y^2+R_1^2} \underset{R_1 \to 0}{=} \sqrt{y^2} > 0 \Rightarrow \sqrt{y^2} = |y| > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2} = |y| = \begin{cases} y & \text{si } y > 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{y^2+R_2^2} \underset{R_2 \to \infty}{=} \sqrt{y^2+\infty^2} = \infty \Rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$