

CHAPITRE 2

THEORIE DES LIGNES D'INFLUENCE

I. INTRODUCTION :

Les ponts sont des ouvrages soumis à des surcharges mobiles dues à l'action de la circulation de véhicules ou de trains, ces charges mobiles ont une nature différente à celle des charges statiques des constructions courantes (les charges mobiles ont un point d'application variable contrairement à celui des charges statiques qui est constant). L'étude de ces ouvrages sous ce chargement mobile impose donc de trouver la position de la charge (chargement) qui provoque l'effet maximum et la section où il se produit (section la plus dangereuse), c'est le problème majeur des chargements mobiles. Il faut noter que la position du chargement qui provoque le plus grand effet pour une grandeur donnée (par exemple le moment fléchissant) ne l'est pas en général pour une autre grandeur (l'effort tranchant par exemple) et que ce qui intéresse l'ingénieur en définitive, c'est la position qui provoque les contraintes les plus importantes.

II. DEFINITION ET OBJECTIF DE LA METHODE:

La fonction d'influence d'un effet élastique dans une section fixe d'un élément de structure est celle qui donne la valeur de cet effet pour toute position d'une charge concentrée mobile égale à l'unité. Le graphe qui représente cette fonction est appelé ligne d'influence.

Connaissant la fonction d'influence d'un effet dans une section, on peut déterminer la valeur de cet effet dans cette section provoqué par un système de charge donné.

L'effet E dans une section quelconque produit par une charge concentrée P a pour valeur :

$$E = P \cdot y \quad (1)$$

Avec :

y : la valeur du coefficient d'influence d'un effet quelconque dans une section C .

Le calcul est supposé être dans le domaine élastique donc le principe de superposition des états d'équilibre permet de trouver la valeur de l'effet E pour un système de charges P_i placées au droit des ordonnées y_i (voir figure1) par l'équation suivante :

$$E = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n = \sum P_i y_i \quad (2)$$

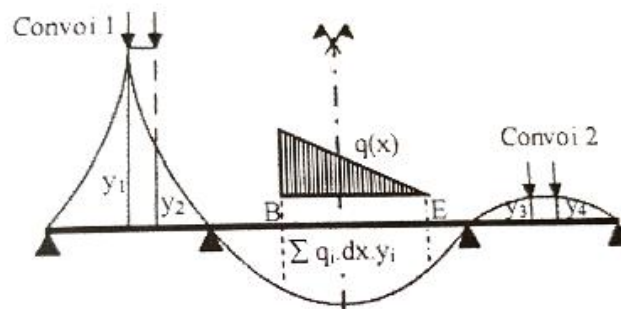


Figure.1 : Ligne d'influence du moment fléchissant dans une section de la travée de rive d'une poutre continue.

Pour une charge $q(x)$ répartie sur une longueur BE (figure1), l'effet vaut :

$$E = \int_B^E q(x) \cdot y \cdot dx \quad (3)$$

Pour une charge uniformément répartie, l'expression de E peut s'écrire sous la forme :

$$E = q \int_B^E y \cdot dx \quad (4)$$

III. LIGNES D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES :

III.1. Ligne d'influence du moment fléchissant (M):

Soit une poutre de longueur L sur deux appuis simples ou travée indépendante soumise à une charge mobile P égale à l'unité se déplaçant entre les deux appuis A et B.

Soient : (x) l'abscisse de cette charge ;

(a) l'abscisse d'une section quelconque de la poutre.

On peut calculer le moment fléchissant (M) sous la charge mobile $P=1$ comme suit :

1. Lorsque $P=1$ se déplaçant entre l'appui (A) et la section de calcul (C), le moment fléchissant en (C) a pour valeur :

$$M_c = R_B \cdot b = \frac{x}{L} \cdot b \quad (5)$$

2. Lorsque $P=1$ se déplaçant entre la section de calcul (C) et l'appui (B), le moment fléchissant en (C) a pour valeur :

$$M_c = R_A \cdot a = \frac{x-L}{L} \cdot b \quad (6)$$

La ligne d'influence du moment fléchissant dans une section quelconque (C) de la poutre a la forme de la figure 2(b) :

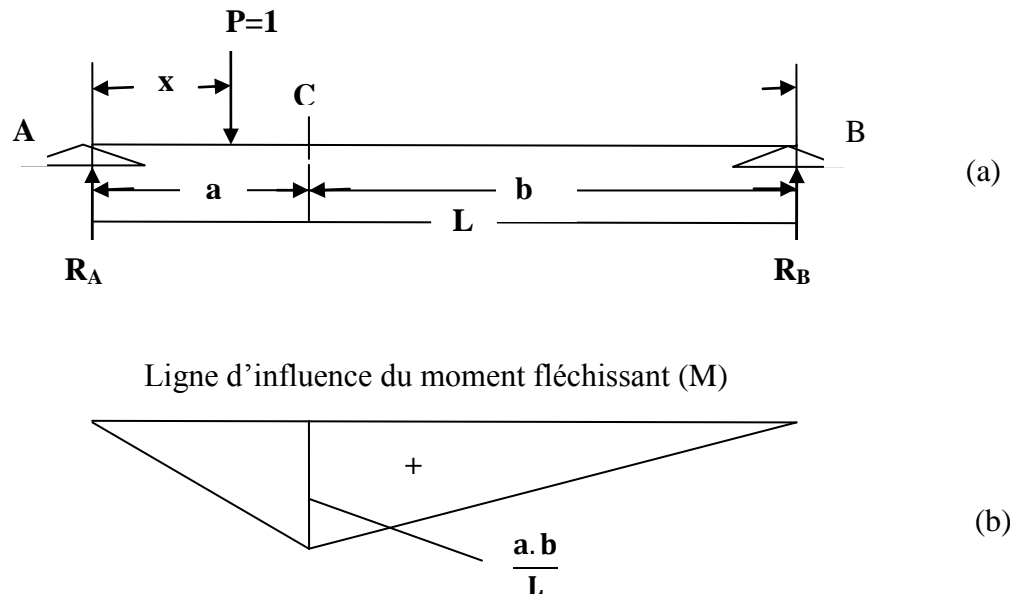


Figure. 2 : Ligne d'influence du moment fléchissant (M).

III.2. Ligne d'influence de l'effort tranchant (T) :

Soit la même poutre isostatique soumise à la même charge mobile P égale à l'unité, l'équation de la ligne d'influence de l'effort tranchant (T) au point (C) est comme suit :

1. Lorsque $P=1$ se déplaçant entre l'appui (A) et la section de calcul, l'effort tranchant a pour valeur :

$$T_c = R_A - 1 = - \frac{x}{L} \quad (7)$$

Les valeurs de T aux limites sont pour : $x = 0 : T_c = 0$

$$x = L : T_c = - \frac{a}{L}$$

2. Lorsque $P=1$ se déplaçant entre (C) et l'appui (B), l'effort tranchant aura l'expression suivante :

$$T_c = R_A = \frac{L-x}{L} \quad (8)$$

Les valeurs de T aux limites sont : pour : $x = a$, on a : $T_c = -\frac{L-a}{L} = \frac{b}{L}$
 $x = L$, on a : $T_c = 0$

On remarque d'après ces valeurs que (T) a deux valeurs différentes dans la section (C) donc la ligne d'influence de l'effort tranchant (T) est donnée par la figure 3(b)

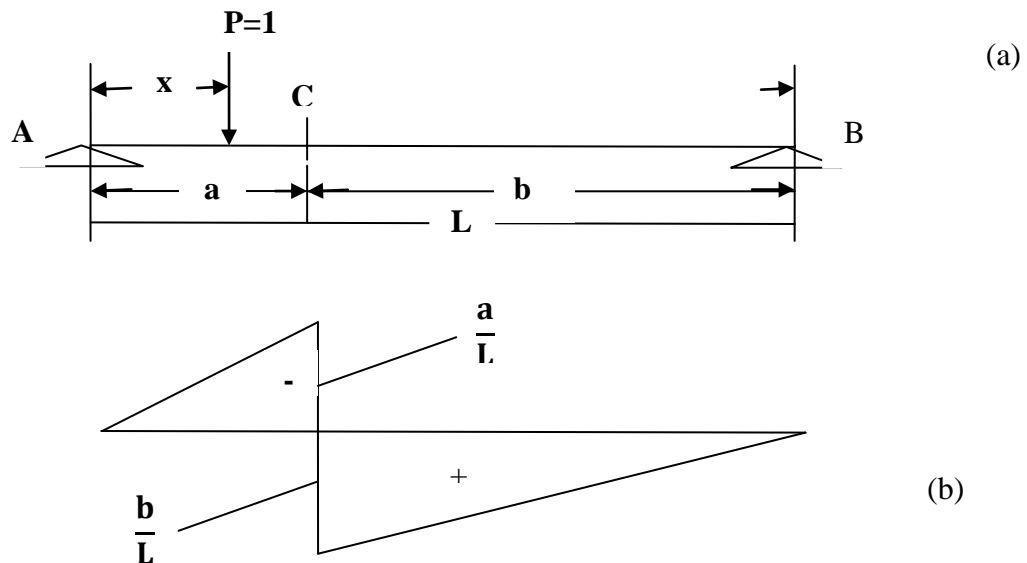


Figure. 3 : Ligne d'influence de l'effort tranchant (T)

III.3. Ligne d'influence des réactions d'appui :

Pour la même poutre précédente, les équations d'influences des réactions des appuis A et B sous la charge mobile $P=1$ sont données par les équations suivantes :

- Pour l'appui A :

$$R_A \cdot L - (L-x) = 0$$

D'où :

$$R_A = \frac{L-x}{L} \quad (9)$$

- Pour l'appui B :

$$R_B = \frac{x}{L} \quad (10)$$

Les tracés des lignes d'influence de R_A et R_B sont donnés par la figure 4 :

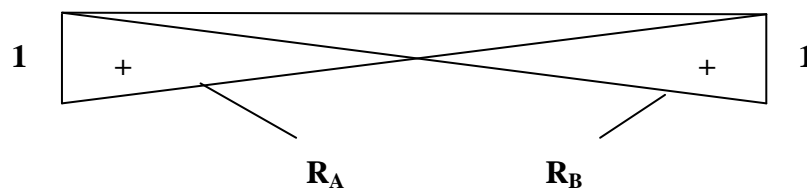


Figure. 4 : Lignes d'influence des réactions d'appui : R_A et R_B

III.4. Ligne d'influence des déplacements :

En plus des effets des sollicitations de flexion de poutres, les déplacements sont représentés par des diagrammes des lignes d'influence. La figure 5 représente une poutre isostatique de portée L sur laquelle se déplace une charge mobile $P=1$.

A partir de l'équation de la déformée suivante :

$$E.I. (y'') = -M(x) \quad (11)$$

En intégrant deux fois et appliquant les valeurs aux limites, on obtient :

$$y_c = \frac{x}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad (12)$$

Avec : x : représente l'abscisse de la charge P .

La valeur maximale de l'ordonnée de la déformée se trouve à la section médiane ($L/2$) est représentée par la figure 5(b) et a pour valeur :

$$y_{c=L/2} = \frac{L^3}{48EI} \quad (13)$$

L'équation de la ligne d'influence du déplacement dans la section médiane d'une poutre isostatique (figure 5(b)) est donc similaire à l'équation de la déformée de la poutre lorsqu'elle est soumise à une charge unité appliqué dans la section médiane (Figure 5(c)) :

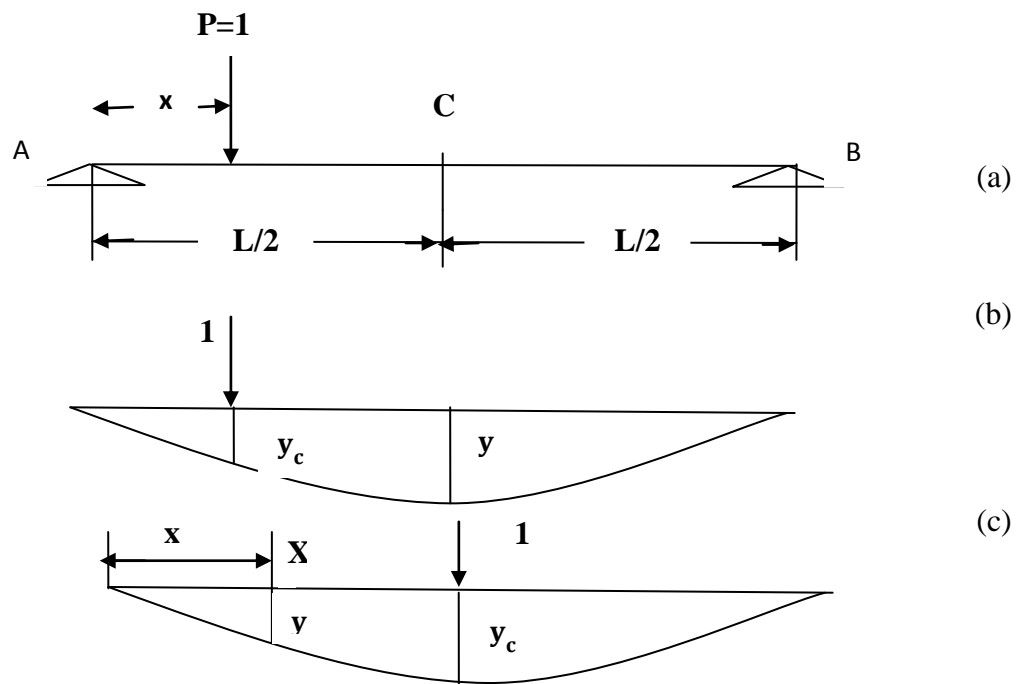


Figure. 5 : Lignes d'influence des déplacements.

III.5. Emploi des lignes d'influences :

Nous présentons trois cas de chargement :

➤ *1^{er} cas* : Une charge concentrée P (figure 6) : Dans ce cas :

$M_x = P \cdot y$; avec y : ordonnée correspondant à P sur la Li de M_x .

$T_x = P \cdot z$; avec z : ordonnée correspondant à P sur la Li de T_x .

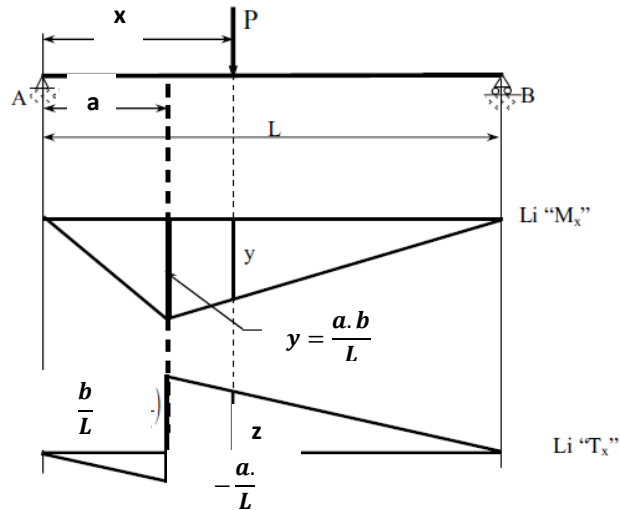


Figure.6 : Charge concentrée P appliquée à une distance x.

➤ 2^{ème} cas : Plusieurs charges concentrées P_i :

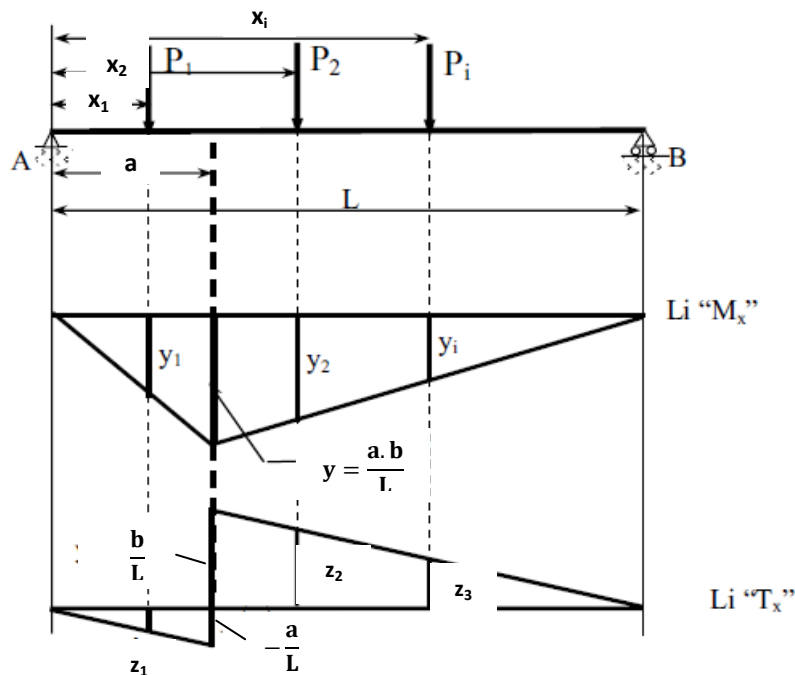


Figure.7 : Plusieurs charges concentrées P_i appliquée à une distance x_i .

Dans ce cas (figure 7), on somme :

$$M_x = \sum_{i=1}^n P_i y_i = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \dots + P_n \cdot y_n$$

Avec : y_i : ordonnée correspondant à P sur la L_i de M_x .

$$T_x = \sum_{i=1}^n P_i z_i = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + \dots + P_n \cdot z_n$$

Avec : z_i : ordonnée correspondant à P sur la L_i de T_x .

➤ **3ème cas :** Charge répartie q sur une longueur c (figure 8):

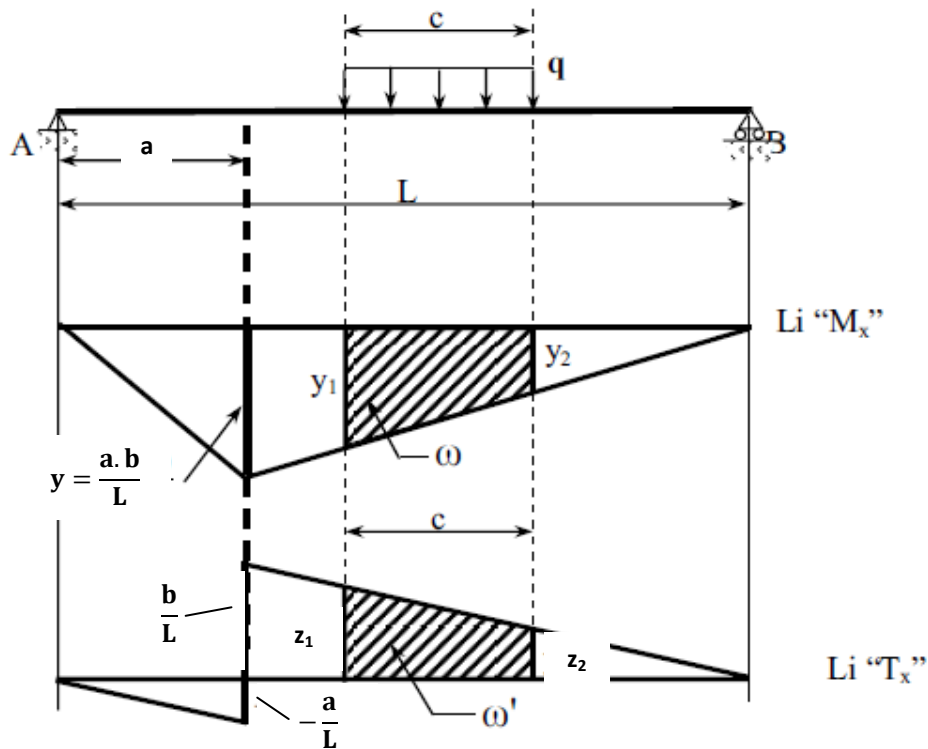


Figure.8 : Charge répartie appliquée à une distance c .

Dans ce cas :

$M_x = q \cdot \omega$; ω : aire de la ligne digne d'influence de M_x comprise entre y_1 et y_2 .

$T_x = q \cdot \omega'$; ω' : aire de la ligne digne d'influence de T_x comprise entre z_1 et z_2 .

avec : $\omega = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \cdot c$ et $\omega' = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \cdot c$

III.6. Lignes d'influences d'autres poutres isostatiques :

1. Poutre console :

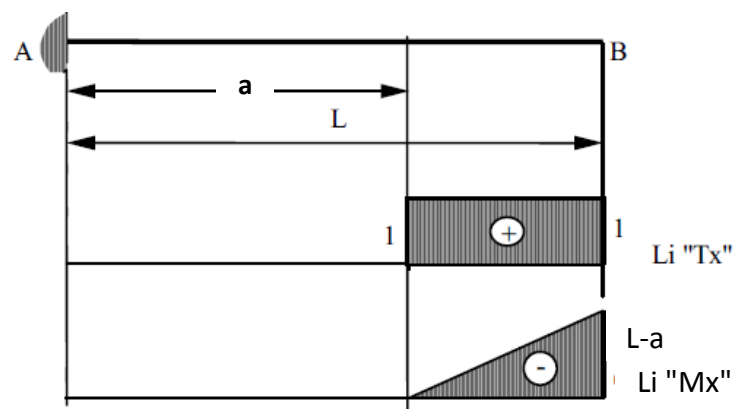


Figure. 9: Lignes d'influence des moments et des efforts tranchants pour une console.

2. Poutre avec consoles:

Pour une section entre les appuis, on la traite comme si c'était une poutre sur appui simple, puis on extrapole linéairement sur les consoles. Les ordonnées de rive sont retrouvés à partir de l'ordonnée de la Ligne d'influence en "x" et connaissant les différentes distances (triangles

semblables). Ces ordonnées sont notées sur la figure 10. Ainsi, on voit que lorsque la charge est en travée, elle n'a pas d'effet sur les consoles (section x').

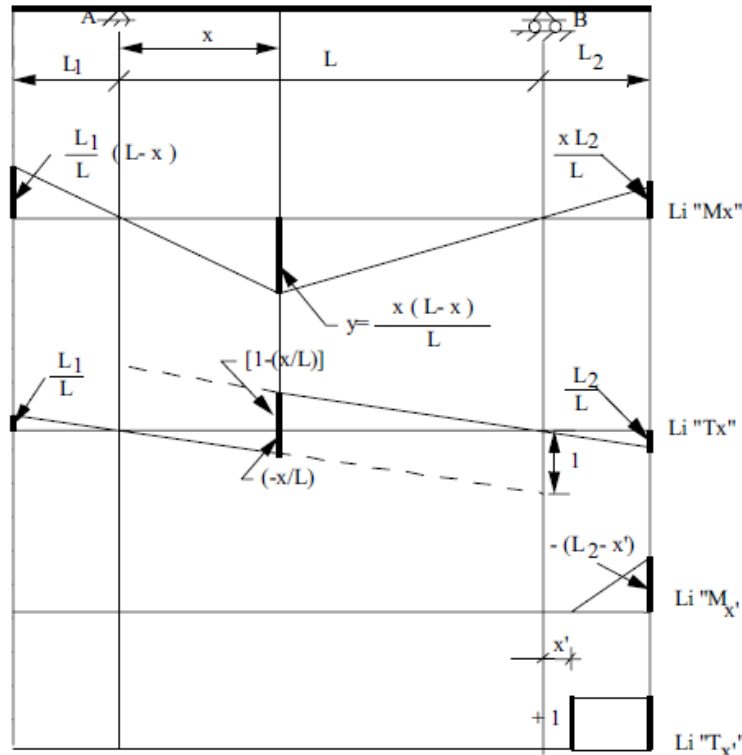


Figure. 10: Lignes d'influence des moments fléchissant et des efforts tranchants pour une poutre avec consoles.

IV. LIGNES D'INFLUENCE DES POUTRES CONTINUES A DEUX TRAVEES :

IV.1. Ligne d'influence du moment fléchissant sur appui intermédiaire:

Soit une poutre continue à deux travées soumise à une charge mobile $P=1$ d'une distance x de l'appui gauche A (figure 11), le moment fléchissant sur appui intermédiaire B est calculé comme suit :

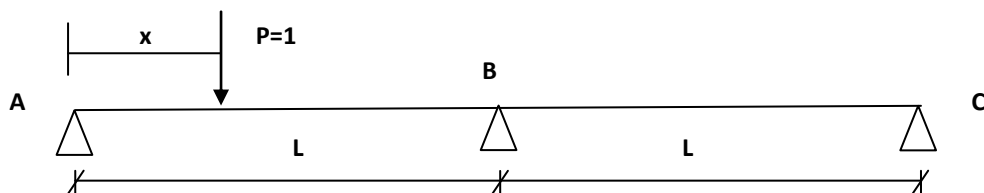


Figure.11: Poutre continue à deux travées soumise à une charge mobile unitaire.

Le moment sur appui intermédiaire B est variable suivant la position de la charge P : $M_B=f(x)$
 En appliquant la méthode des 3 moments, nous obtenons la formule suivante :

$$M_B = -\frac{x(L^2-x^2)}{4L^4} \text{ Pour : } 0 \leq x \leq L \quad (14.a)$$

Si on pose : $x = \alpha \cdot L$, donc :

$$M_B = -\frac{\alpha L(1-\alpha^2)}{4} ; \text{ Pour : } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (14.b)$$

La valeur de α pour que M_B soit maximum : $\frac{dM_B}{d\alpha} = 0$, donc : $\alpha=0.58$

L'allure de la ligne d'influence du moment fléchissant sur appui B est donnée par la figure 12 :

➤ **Aire de la ligne d'influence :**

L'aire S_1^- sera calculée en intégrant l'équation de la ligne d'influence pour : $0 \leq x \leq L$ ou

$0 \leq \alpha \leq 1$ et on obtient : $S_1^- = S_2^- = L \cdot \int_0^1 M_B \cdot d\alpha = -\frac{L^2}{16}$

Et l'aire totale sera : $S_{\text{totale}}^- = S_2^- + S_1^- = -\frac{L^2}{8}$

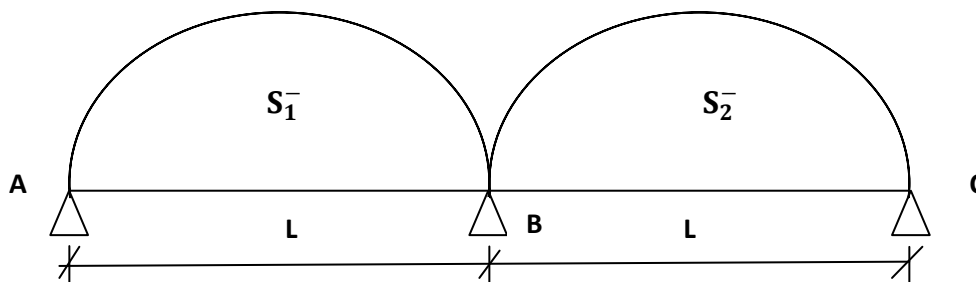


Figure.12: Ligne d'influence du moment fléchissant sur appui intermédiaire B

IV.2.Ligne d'influence des moments fléchissants en travée :

Soit la poutre hyperstatique de deux travées : AB et BC soumises au chargement mobile unitaire P, nous cherchons à déterminer les moments fléchissants dans une section C située à d'une distance (a) de l'appui A; nous allons déplacer la charge unitaire P sur toute la poutre, nous distinguons trois cas comme suit :

- P=1 se trouve sur la travée AB et à gauche de C ;
- P=1 se trouve sur la travée AB et à droite de C ;
- P=1 se trouve sur la travée BC et située à une distance x de l'appui de droite C.

1^{er} cas : P=1 se trouve sur la travée AB et à gauche de la section C :

Connaissant la valeur du moment sur appui intermédiaire B (équation 14.a), le moment fléchissant en C est donnée par la formule suivante :

$$M_C = \left[\frac{L-x}{L} - \frac{x(L^2-x^2)}{4L^3} \right] \cdot a - (a-x) ; \text{ Pour : } 0 \leq x \leq a \quad (15.a)$$

En posant : $x = \alpha \cdot L$, donc : $M_C = + \frac{a}{4} \alpha^3 - \alpha \left(L - \frac{5a}{4} \right) ; \text{ pour : } 0 \leq \alpha \leq \frac{a}{L} \quad (15.b)$

2^{eme} cas : P=1 se trouve sur la travée AB et à droite de la section C :

$$M_C = \left[\frac{L-x}{L} - \frac{x(L^2-x^2)}{4L^3} \right] \cdot a ; \text{ Pour : } a \leq x \leq L \quad (16.a)$$

En posant : $x = \alpha \cdot L$, donc : $M_C = \left(1 - \frac{5\alpha}{4} + \frac{\alpha^3}{4} \right) \cdot a ; \text{ Pour : } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (16.b)$

3^{eme} cas : P=1 se trouve sur la travée BC et son point d'application située à une distance x de l'appui de droite C :

$$M_C = \left[\frac{x(L^2-x^2)}{4L^3} \right] \cdot a ; \text{ Pour : } 0 \leq x \leq L \quad (17.a)$$

En posant : $x = \alpha \cdot L$, donc : $M_C = \left(-\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{4} \right) \cdot a ; \text{ Pour : } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (17.b)$

Finalement, l'allure de la ligne d'influence des moments fléchissant en travée dans la section C de la poutre continue de deux travées est représentée par la figure 8 ci-dessous :

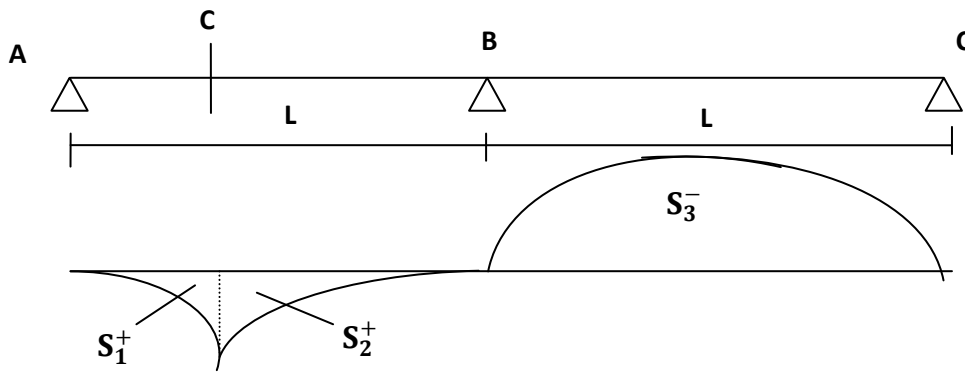


Figure.13 : Ligne d'influence du moment fléchissant en travée de la poutre continue.

➤ **Calcul des aires de la ligne d'influence :**

$$1) S_1^+ = \int_0^a M_C \cdot dx = L \cdot \int_0^a M_C \cdot d\alpha = \frac{a^2}{2L} \left[\frac{a^3}{8L^2} + L - \frac{5a}{4} \right]$$

$$2) S_2^+ = \int_0^L M_C \cdot dx = L \cdot \int_a^1 M_C \cdot d\alpha = a \cdot L \cdot \left[\frac{7}{16} - \frac{a}{L} + \frac{5a^2}{8L^2} - \frac{a^4}{16L^4} \right]$$

$$3) S_3^- = \int_0^L M_C \cdot dx = L \cdot \int_0^1 M_C \cdot d\alpha = -\frac{a \cdot L}{16}$$

$$4) S_{\text{totale}}^+ = S_1^+ + S_2^+ = -\frac{a^2}{2} + \frac{7 \cdot a \cdot L}{16}$$

➤ **Détermination de la section dangereuse :**

C'est la section en travée pour laquelle l'aire positive est plus grande, la valeur de la distance (a) qui rend cette aire positive maximale est obtenue par la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial S^+}{\partial a} = 0, \text{ donc : } a = \frac{7 \cdot L}{16}$$

L'aire positive maximale pour la section dangereuse est :

$$S_{\text{totale}}^+ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{16} \right)^2 \cdot L^2$$

IV.3. Ligne d'influence des efforts tranchants :

Soit la poutre continue à deux travées égales soumise à une charge mobile unitaire, nous allons tracer les lignes d'influence de l'effort tranchant dans les sections :

- A_d : Section immédiatement à droite de l'appui A.
- B_g : Section immédiatement à gauche de l'appui B.

➤ **1^{er} cas** : La charge unitaire se trouve entre l'appui A et l'appui B :

Connaissant déjà la valeur du moment M_B : $M_B = -\frac{x(L^2 - x^2)}{4L^4}$ Pour : $0 \leq x \leq L$.

Donc la réaction R_A est donnée par la relation suivante :

$$R_A = \frac{L - x}{L} - \frac{x(L^2 - x^2)}{4L^3}$$

L'effort tranchant cherché : $T_{Ad} = R_A$, d'où :

$$T_{Ad} = \frac{L - x}{L} - \frac{x(L^2 - x^2)}{4L^3} \quad ; \text{ Pour : } 0 \leq x \leq L \quad (18.a)$$

$$\text{Posons : } x = \alpha \cdot L, \text{ donc : } T_{Ad} = 1 - \frac{5}{4} \alpha + \frac{1}{4} \alpha^3 \quad ; \text{ Pour : } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (18.b)$$

➤ L'autre effort tranchant cherché : $T_{Bg} = R_A - 1$, d'où :

$$T_{Bg} = -\frac{5x}{4L} + \frac{1x^3}{4L^3} \quad ; \text{ Pour : } 0 \leq x \leq L \quad (19.a)$$

Si on Pose : $x = \alpha \cdot L$, donc : $T_{Bg} = -\frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^3$; Pour : $0 \leq \alpha \leq 1$ (19.b)

- 2^{ème} cas : La charge unitaire se trouve entre l'appui B et l'appui C :

- L'effort tranchant T_{Ad} est calculé comme suit:

$$T_{Ad} = R_A = -\frac{1x}{4L} + \frac{1x^3}{4L^3} ; \text{ Pour : } 0 \leq x \leq L \quad (20.a)$$

Si on Pose : $x = \alpha \cdot L$, donc : $T_{Ad} = -\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^3$; Pour : $0 \leq \alpha \leq 1$ (20.b)

- L'effort tranchant T_{Bg} est calculé comme suit:

$$T_{Bg} = T_{Ad} = -\frac{1x}{4L} + \frac{1x^3}{4L^3} ; \text{ Pour : } 0 \leq x \leq L \quad (21.a)$$

Si on Pose : $x = \alpha \cdot L$, donc : $T_{Bg} = -\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^3$; Pour : $0 \leq \alpha \leq 1$ (21.b)

✓ **Tracé des lignes d'influence :**

➤ **Lignes d'influence de l'effort tranchant A_d :**

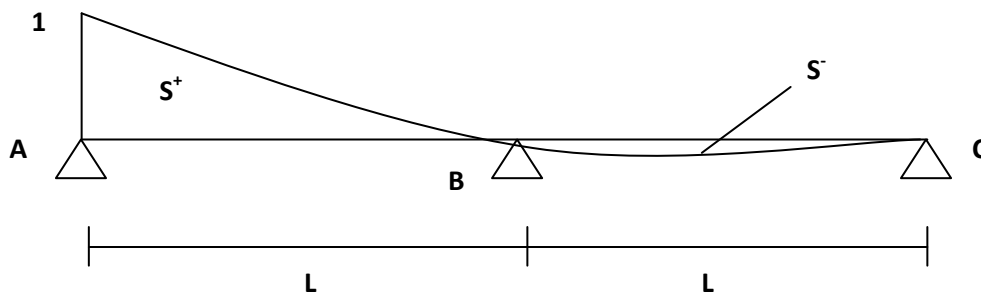


Figure.14 : Tracé des Lignes d'influence de l'effort tranchant A_d .

✓ **Calcul des aires des lignes d'influence :**

$$1) S^+ = \int_0^L T_{Ad} \cdot dx = L \int_0^1 T_{Ad} \cdot d\alpha = L \left[1 - \frac{5}{8} + \frac{1}{16} \right]$$

$$\text{Donc : } S^+ = \frac{7}{16} L$$

$$2) S^- = \int_0^L T_{Ad} \cdot dx = L \int_0^1 T_{Ad} \cdot d\alpha = -\frac{L}{16}$$

➤ **Lignes d'influence de l'effort tranchant B_g :**

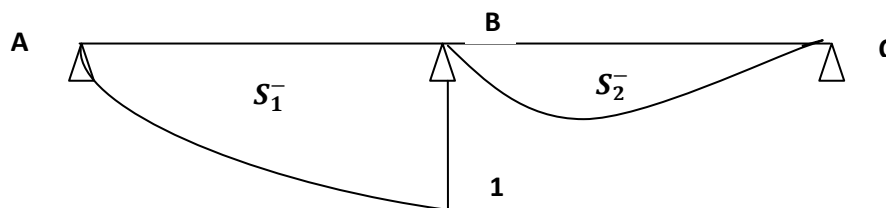


Figure.15: Tracé des Lignes d'influence de l'effort tranchant B_g .

✓ **Calcul des aires des lignes d'influence :**

$$1) S_1^- = -\frac{9}{16} L$$

$$2) S_2^- = S^- = -\frac{L}{16}$$

IV.4. Ligne d'influence de la réaction de l'appui intermédiaire :

Soit une poutre continue de deux travées, l'artifice de calcul est de supprimer l'appui B et de le remplacer par une charge unitaire concentrée $P=1$ (figure 16) :

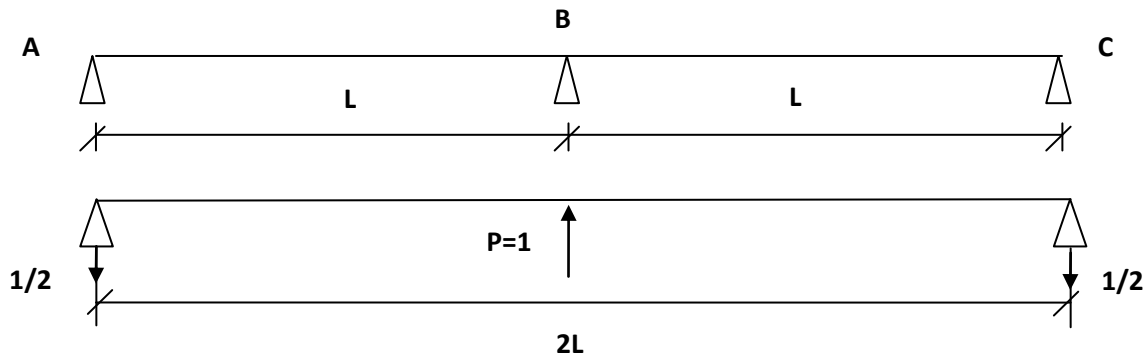


Figure.16 : Schéma du principe de calcul de la ligne d'influence de la réaction d'appui intermédiaire B

Soit $w(x)$: c'est le tracé la ligne d'influence de $R_B(x)$:

$$R_B = \frac{w(x)}{w(L)} \quad (22)$$

L'équation du moment fléchissant dans une section située à x de l'appui de gauche A pour :

$$\begin{aligned} x \text{ entre : } 0 \text{ et } L : M(x) &= -\frac{1}{2} x \\ x \text{ entre : } L \text{ et } 2L : M(x) &= -\frac{1}{2} x - L \end{aligned}$$

L'équation de la déformée :

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x)$$

En remplaçant les 2 expressions du moment dans cette équation et en appliquant les conditions aux limites, on obtient l'équation suivante :

$$E. I. w(x) = \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{4} L^2 x \quad (23)$$

En injectant l'équation (22) dans l'équation (21), on obtient donc :

$$R_B(x) = \frac{1}{2L} \left(3 - \frac{x^2}{L^2} \right) ; 0 \leq x \leq L \quad (24a)$$

Si on remplace : $x = \alpha.L$, on obtient :

$$R_B(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha (3 - \alpha^2) ; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (24b)$$

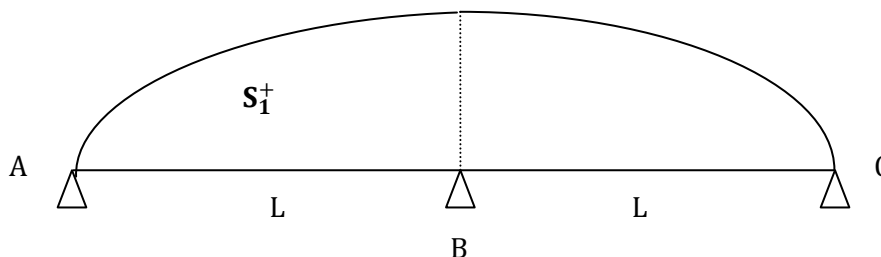


Figure.17 : La ligne d'influence de la réaction d'appui intermédiaire B de la poutre continue de 2 travées.

➤ *Calcul des aires de la ligne d'influence :*

$$S_1^+ = \int_0^L R_B dx = L \int_0^1 R_B \cdot d\alpha = \frac{5}{8} L$$

Donc l'aire totale est : $S_{\text{totale}}^+ = 2S_1^+ = \frac{5}{4} L$

CONCLUSION :

Donc les lignes d'influence décrivent l'influence de la position des charges sur la valeur d'un effet élastique peut être :

- une contrainte en un point précis ;
- le déplacement (rotation - translation) d'une section donnée ;
- une composante de réaction d'un appui ;
- un élément de réduction dans une section donnée.