

CHAPITRE 4

CALCUL DU TABLIER

1 INTRODUCTION

Le moment fléchissant et l'effort tranchant d'un tablier peuvent être déterminés par les lignes d'influence en n'importe quelle abscisse x le long du tablier. Mais le problème qui se pose est comment répartir ce moment et cet effort tranchant entre les poutres ? c'est-à-dire connaître les valeurs de sollicitations de chaque poutre. Plusieurs méthodes ont essayé de répondre à cette question, les plus connues d'entre elles sont :

- La méthode de Guyon-Massonet qu'on applique pour une entretoise de rigidité finie ; cas courant des tabliers en béton.
- La méthode de Courbon qui est appliquée lorsque l'entretoise est infiniment rigide.

2 METHODE DE GUYON-MASSONNET

2-1 Aperçu général de la méthode

Cette méthode pratique fut établie par les deux chercheurs Guyon et Massonet. Elle est largement employée dans les calculs des grillages formés par les poutres, entretoises et dalles ; cet ensemble va former une dalle orthotrope.

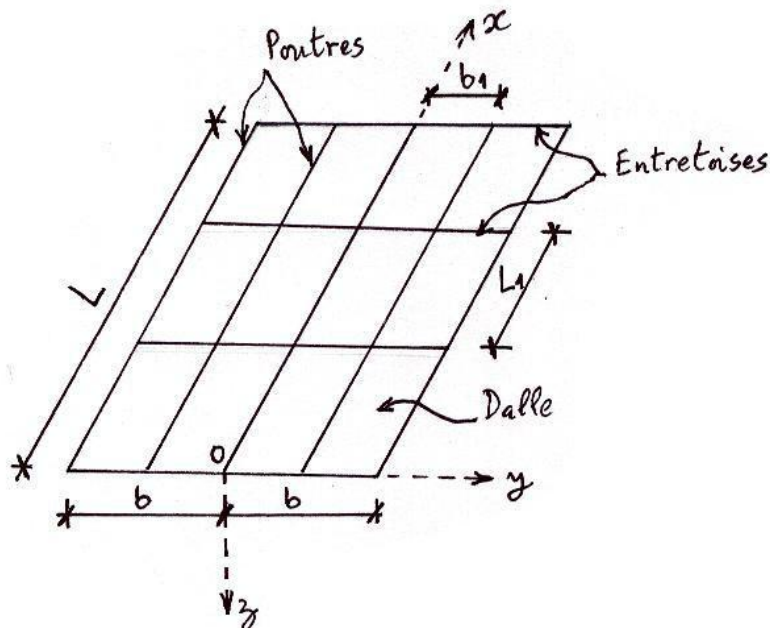


Fig. 1 Eléments constitutifs d'un tablier en B.A ou en B.P.

Une dalle est dite orthotrope si elle admet 2 plans verticaux de symétrie. D'après la figure 1, ces 2 plans sont parallèles aux axes ox et oy . Par ailleurs la dalle est isotrope du fait qu'elle admet une infinité de plans verticaux de symétrie.

2-2 Définitions et Notations selon la théorie des plaques

Les différents efforts sont obtenus en fonction des contraintes normales σ_x et σ_y , et tangentielles τ_{xy} , τ_{xz} et τ_{yz} régnants dans une plaque d'épaisseur h (fig. 2). A titre d'exemple τ_{xy} est la contrainte de cisaillement appartenant au plan perpendiculaire à l'axe des x (plan yz) et dirigée selon y .

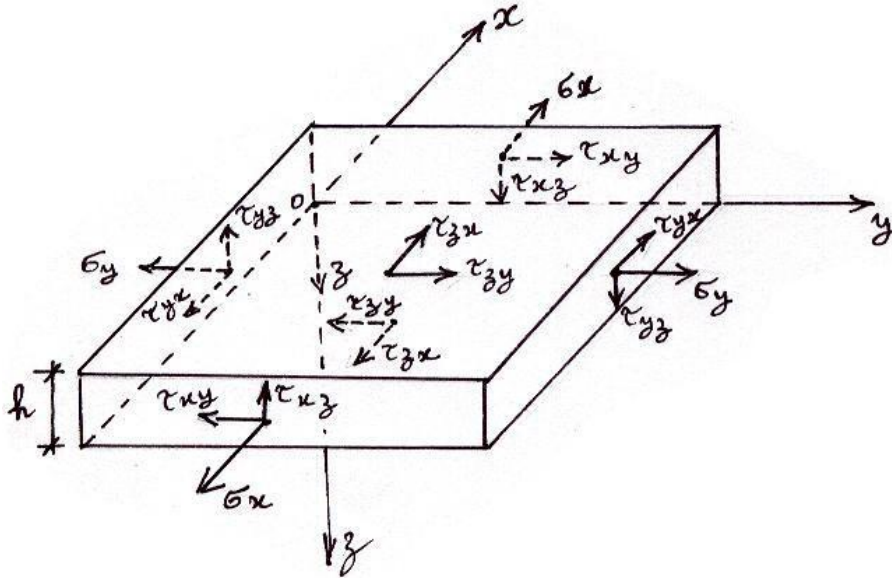


Fig. 2 Contraintes dans une plaque

Les moments fléchissants M_x et M_y , les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} , et les efforts tranchants T_x et T_y sont donnés par la figure 3.

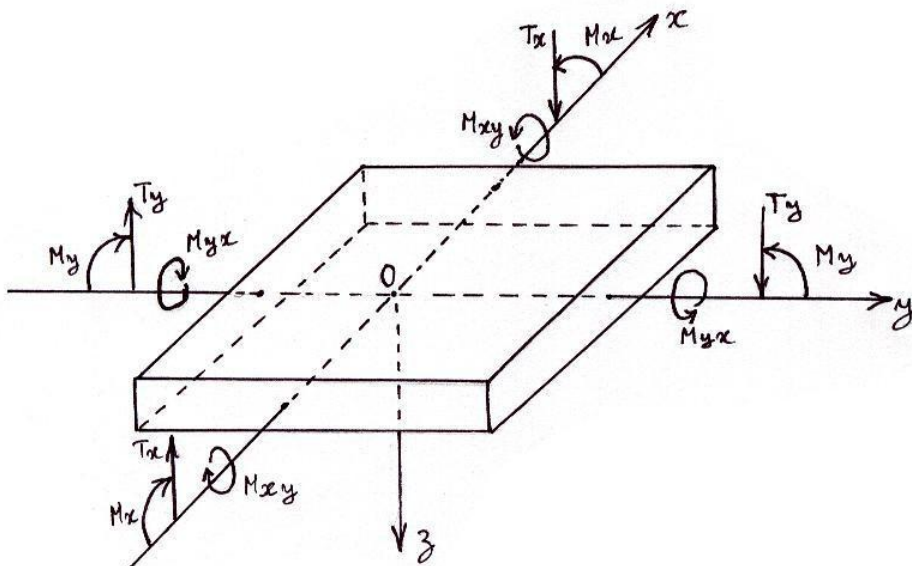


Fig. 3 Conventions de signes des efforts

Pour une bande de largeur $b = 1 \text{ ml}$, on a

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad (1)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \quad (2)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (3)$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \cdot z \cdot dz \quad (4)$$

$$T_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \cdot dz \quad (5)$$

$$I_y = \int_{-h/2}^{+h/2} yz \cdot dz \quad (6)$$

2-3 Rigidité du tablier

a - Rigidité dans le sens des poutres (l'axe des x)

D'après la figure 1 la rigidité flexionnelle du tablier dans le sens des poutres (selon x), est donnée pour 1 ml de largeur (selon y) par l'expression

$$\rho_p = \frac{E \cdot I_p}{b_1} \quad (7)$$

Où E est le module de déformation longitudinale du béton.

I_p est le moment d'inertie flexionnel de la section de poutre par rapport à son axe neutre.

b_1 est l'entraxe entre 2 poutres consécutives.

La rigidité torsionnelle d'une section de poutre pour 1 ml de largeur du tablier est

$$\gamma_p = \frac{G \cdot I_p^t}{b_1} \quad (8)$$

Où G est le module de déformation transversale du béton.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

Avec ν le coefficient de poisson. Pour $\nu = 0.15$, on a

$$G = \frac{E}{2.3} \quad (10)$$

I_p^t est le moment d'inertie torsionnel de la section de poutre.

$$I_p^t = \sum_{i=1}^n \frac{b_i v_i^3}{\psi_i} \quad (11)$$

Où b_i et v_i sont les dimensions de la section (i) supposée rectangulaire. Avec

$$v_i < b_i \quad (12)$$

ψ_i est un coefficient correspondant à la section (i) et qui dépend de ses dimensions b_i et v_i .

$$\psi_i = 3 + 1.8 \frac{v_i}{b_i} \quad (13)$$

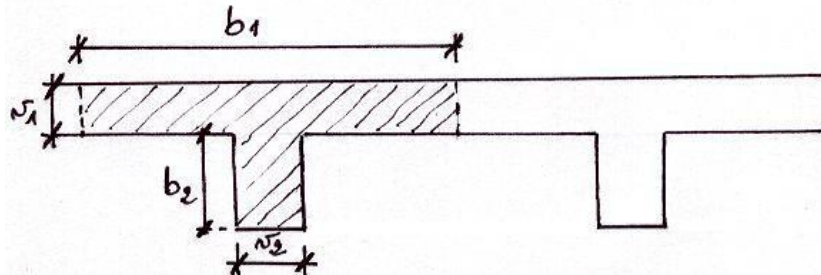


Fig. 4 Décomposition d'une section en T en des sections rectangulaires.

D'après la section de poutre de la figure 4, on a

$$I_p^t = \frac{b_1 v_1^3}{\psi_1} + \frac{b_2 v_2^3}{\psi_2}$$

D'après la section de poutre de la figure 5, il vient

$$I_p^t = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i v_i^3}{\psi_i}$$

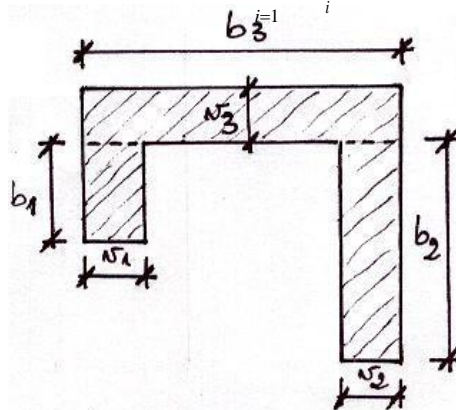


Fig. 5 Décomposition d'une section en U non symétrique en des sections rectangulaires.

Dans le cas d'une poutre en caisson (fig. 6), le moment d'inertie torsionnel s'écrit sous la forme

$$I_p^t = I_p^t(\text{ouvert}) + \frac{4S^2}{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{b_i}} \quad (14)$$

Où I_p^t (*ouvert*) est le moment d'inertie torsionnel de la section de poutre supposée ouverte et composée de plusieurs éléments rectangulaires.

S est l'aire de la section définie par le contour moyen de la poutre (fig. 6).

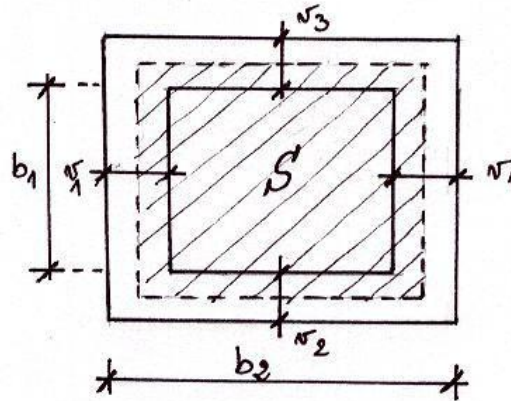


Fig. 6 Section de poutre en caissons à contour fermé.

D'après la figure 6, on a

$$I_p^t (\text{ouvert}) = 2 \frac{b v_1^3}{\psi_1} + \frac{b v_2^3}{\psi_2} + \frac{b v_3}{\psi_3}$$

Et

$$S = (b - v) \cdot b \left(1 + \frac{v_2}{2} + \frac{v_3}{2} \right)$$

D'où

$$I_p^t = I_p^t (\text{ouvert}) + \frac{4 S^2}{\frac{2b_1}{v_1} + \frac{b_2}{v_2} + \frac{b_2}{v_3}}$$

b - Rigidité dans le sens des entretoises (l'axe des y)

D'après la figure 1 la rigidité flexionnelle du tablier dans le sens des entretoises (selon y), est donnée pour 1 ml de longueur (selon x) par la relation.

$$\rho_E = \frac{E \cdot I_E}{L_1} \quad (15)$$

Où I_E est le moment d'inertie flexionnel de la section d'entretoise par rapport à son axe neutre.

L_1 est l'entraxe entre 2 entretoises consécutives.

La rigidité torsionnelle de la section d'entretoise poutre pour 1 ml de longueur du tablier est

$$\gamma_E = \frac{G \cdot I^t}{L} \quad (16)$$

c - Les paramètres θ et α

c1 - Le paramètre d'entretoisement θ

Il représente la contribution de chacun des 2 sens ; longitudinal et transversal, dans la rigidité flexionnelle du tablier. Plus grand est θ , plus souple est l'entretoisement.

$$\theta = L \cdot \sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_E}} \quad (17)$$

c1 - Le paramètre de torsion α

C'est le rapport entre la moyenne arithmétique des rigidités torsionnelles et la moyenne géométrique des rigidités flexionnelles prises dans les deux sens ; celui des poutres (x) et celui des entretoises (y).

$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2\sqrt{\rho_P \cdot \rho_E}} \quad (18)$$

2-4 Comportement du tablier

2-4-1 Tablier en grillage seulement

Si le tablier comporte seulement un grillage de poutres et d'entretoises sans la présence de l'hourdis, la rigidité torsionnelle du tablier est négligeable devant sa rigidité flexionnelle.

$$\gamma_P + \gamma_E \ll \sqrt{\rho_P \cdot \rho_E} \quad (19)$$

D'après l'équation 18, on aura

$$\alpha = 0 \quad (20)$$

2-4-2 Tablier en dalle pleine seulement

Si le tablier est constitué d'une dalle pleine sans la présence de poutres et d'entretoises, il sera considéré comme une dalle isotrope. Dans ces conditions

$$\rho_P = \rho_E = \rho \quad (21)$$

Avec

$$\rho = E \cdot \frac{h^3}{12} \quad (22)$$

Où h est l'épaisseur de l'hourdis pris avec une largeur de 1 ml.

De même

$$\gamma_P = \gamma_E = \rho \quad (23)$$

En remplaçant les équations 20 et 22 dans l'équation 17, on aura

$$\alpha = 1 \quad (24)$$

2-4-3 Tablier en dalle orthotrope (cas réel)

Puisque le tablier comporte à la fois des poutres, des entretoises et un hourdis, son comportement réel est intermédiaire entre celui d'un grillage ($\alpha = 0$) et celui d'une dalle isotrope ($\alpha = 1$).

$$0 < \alpha < 1 \quad (25)$$

La relation 24 exprime le comportement réel d'une dalle orthotrope qui se base essentiellement sur les 2 paramètres α et θ . Cette dalle orthotrope est supposée simplement appuyée sur ses 2 bords

(fig. 7). La structure réelle est remplacée par une dalle équivalente homogène orthotrope dont les rigidités longitudinale et transversale sont différentes. La largeur utile du pont, notée (2b), vérifie la relation

$$2b = n \cdot b_1 \quad (26)$$

Où n est le nombre de poutres longitudinales.
 b_1 est l'entraxe entre 2 poutres consécutives.

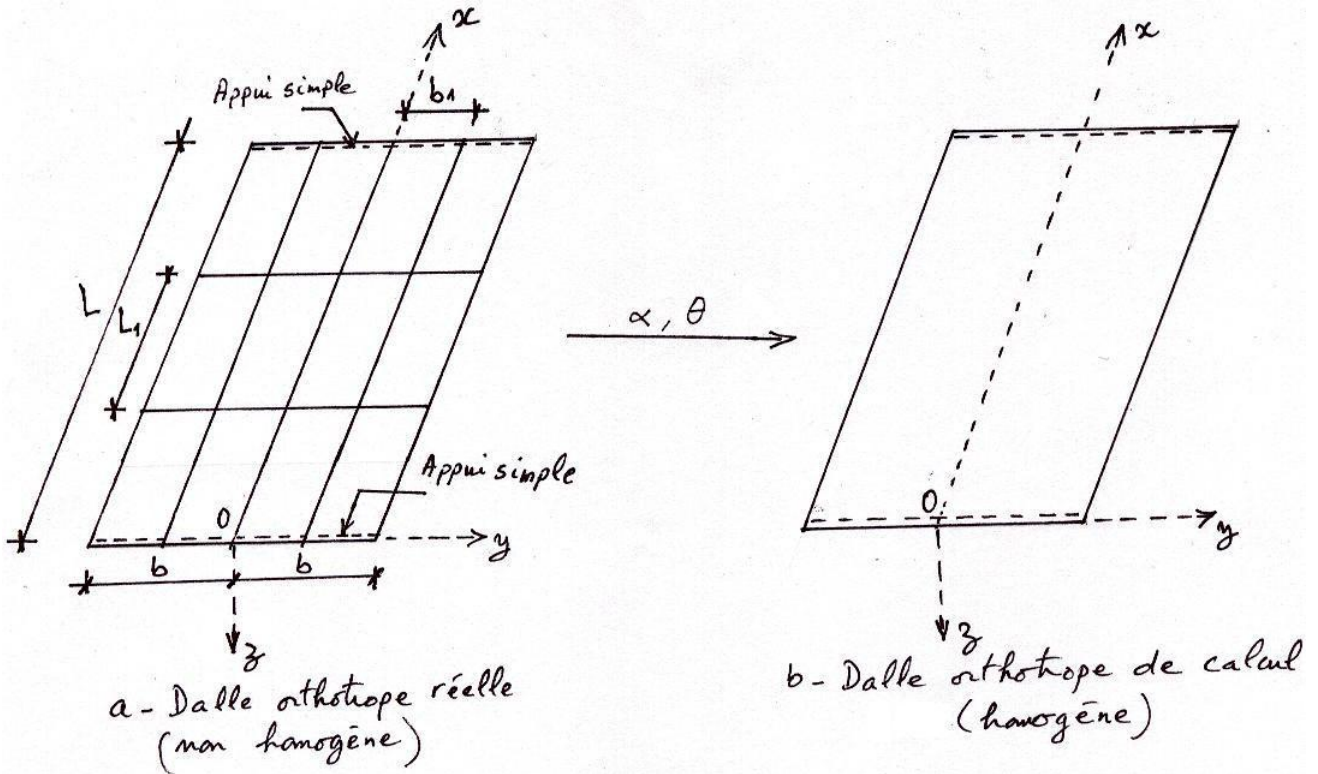


Fig. 7 Modélisation du tablier orthotrope d'un pont.

2-5 Solution du problème

2-5-1 Méthode analytique

D'après les conditions aux limites du tablier (fig. 7-b), la théorie des plaques nous donne pour une dalle orthotrope

$$\rho_P \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\alpha \sqrt{\rho_P \cdot \rho_E} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (27)$$

Où $W(x, y)$ est le déplacement vertical ; selon l'axe des z, d'un point de la dalle de coordonnées (x, y) .

$q(x, y)$ est la densité de charge par unité de surface.

La solution de l'équation aux dérivées partielles (27) nous fournit la fonction de déplacement $W(x, y)$. Les moments peuvent être calculés en fonction de $W(x, y)$ par la manière suivante.

$$\text{Moments fléchissants : } \left\{ \begin{array}{l} M_x = -\rho P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ = -\rho_E \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (28)$$

$$\text{Moments de torsion : } \left\{ \begin{array}{l} M_{xy} = -\gamma P \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ = -\gamma_E \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (29)$$

2-5-2 Méthode pratique

a- Flexion longitudinale (Poutres)

Pour une poutre donnée située à l'abscisse y par rapport à l'axe longitudinal (ox), on a

$$M_x(x, y) = M_{xm} \cdot \frac{\sum_i^P P_i \cdot K_\alpha(y, e_i)}{\sum_i^P P_i} \quad (30)$$

Où M_{xm} est le moment fléchissant moyen de chaque poutre.

$$M_{xm} = \frac{M_{x0}}{n} \quad (31)$$

Où M_{x0} est le moment fléchissant total revenant au tablier.

n est le nombre de poutres.

P_i est la i ème charge concentrée ayant une excentricité e_i par rapport à l'axe (ox).

K_α est le coefficient de répartition transversale des charges P_i . Le K_α dépend de l'abscisse y de la poutre choisie, de l'excentricité e_i de la charge unitaire ($P_i = 1$), et du coefficient α ; paramètre de torsion.

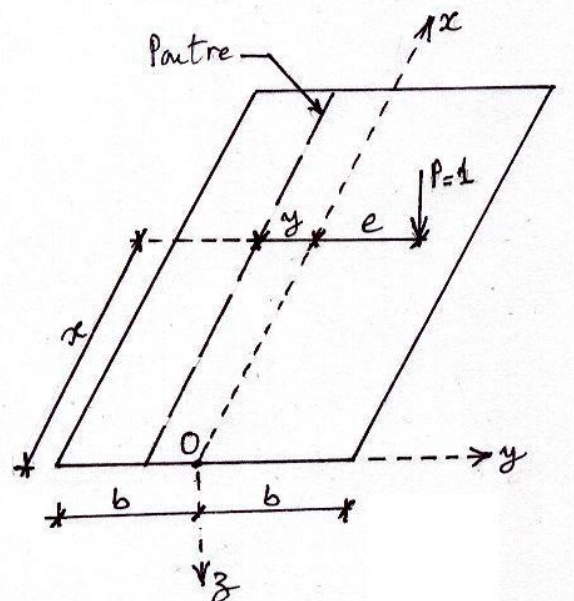


Fig. 8 Représentation des paramètres (y) et (e) qui influent sur le K_α .

L'exemple de la figure 9 nous donne le diagramme de K_α de la poutre centrale ($y = 0$). Supposons que $M_{xm} = 1335.8 \text{ KN} \cdot \text{m}$, pour calculer le moment fléchissant maximal repris par cette poutre, le diagramme de K_α est chargé par la disposition transversale la plus contraignante des roues B_C . En se référant à l'équation 28 et en utilisant le diagramme de la figure 9, on a

$$M_x = M_{xm} \cdot \frac{\sum P_i \cdot \alpha_i}{\sum P_i}$$

Soit

$$M_x = M_{xm} \cdot \frac{\sum K_{\alpha i}}{4P} \Rightarrow \boxed{M_x = M_{xm} \cdot \frac{\sum K_{\alpha i}}{4}}$$

$$M_x = 1335.8 \times \frac{(1.082 + 1.304 + 1.082 + 1.304)}{4} \Rightarrow \boxed{M_x = 1354.9 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

Donc la poutre centrale reprend un moment $M_x = 1354.9 \text{ KN} \cdot \text{m}$ qui est supérieur au moment moyen $M_{xm} = 1335.8 \text{ KN} \cdot \text{m}$.

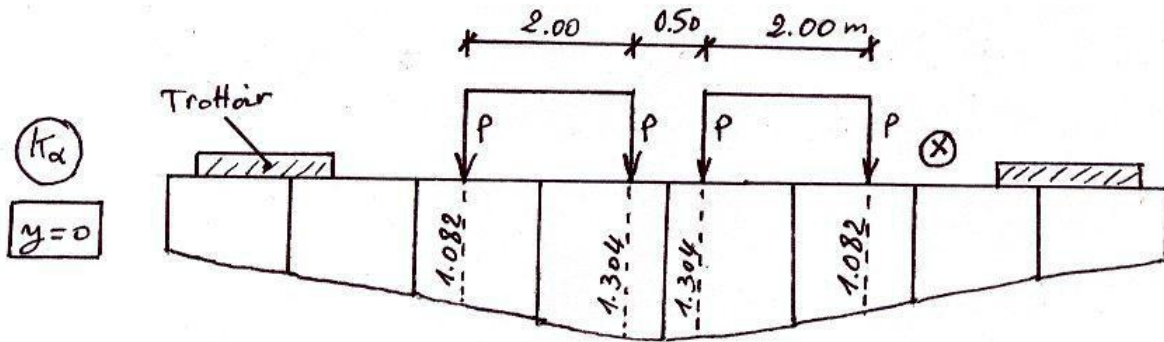


Fig. 9 Diagramme d'influence transversale K_α d'une poutre centrale ($y=0$) chargée par 2 files de camions B_C .

Dans l'exemple de la figure 10 est tracé le diagramme de K_α correspondant à la poutre intermédiaire située à l'abscisse ($y = b/2$) par rapport à la poutre centrale. Puisqu'il s'agit d'une charge uniformément répartie, on peut transformer la sommation de l'équation 30 en une intégrale.

$$M_x = M_{xm} \cdot \frac{\int q \cdot dx \cdot K_\alpha}{q \cdot L_c} = M_{xm} \cdot \frac{q \cdot \int K_\alpha \cdot dx}{q \cdot L_c}$$

Soit

$$M_x = \boxed{M_{xm} \cdot \frac{S}{L_c}} \quad (32)$$

Dans l'exemple on a $M_{xm} = 1341.59 \text{ KN} \cdot \text{m}$, $S_k = 6.717$ et $L_c = 6 \text{ m}$. On obtient pour la poutre intermédiaire ($y = b/2$) un moment fléchissant

$$M_x = 1341.59 \times \frac{6.717}{6} \Rightarrow \boxed{M_x = 1501.85 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

Ce moment dépasse de loin le moment fléchissant moyen $M_{xm} = 1341.59 \text{ KN} \cdot \text{m}$.

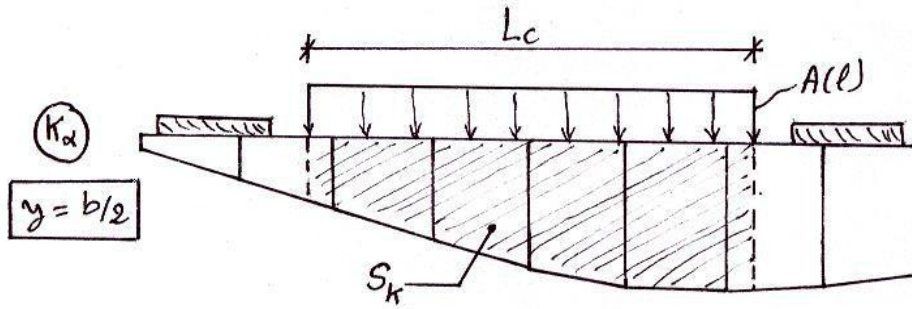


Fig. 10 Diagramme d'influence transversale \$K_\alpha\$ d'une Poutre intermédiaire (\$y=b/2\$) chargée par le système A(1).

Pour calculer les coefficients \$K_\alpha\$, on tire tout d'abord les valeurs des coefficients \$K_0\$ et \$K_1\$ à partir de tableaux ou d'abaques, sachant que \$K_0\$ et \$K_1\$ sont les coefficients de répartition transversale des charges correspondants respectivement aux valeurs \$\alpha = 0\$ et \$\alpha = 1\$. On calcule ensuite \$K_\alpha\$ par interpolation en racine de \$\alpha\$.

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \cdot \sqrt{\alpha} \quad (33)$$

Cependant les coefficients \$K_0\$ et \$K_1\$ peuvent être calculés à partir de leurs expressions analytiques.

$$K_0 = 2\lambda b \frac{1}{sh^2 2\lambda b - \sin^2 2\lambda b} \left\{ \begin{aligned} & (2 ch \lambda(b+y) \cdot \cos \lambda(b+y) \cdot \\ & [sh 2\lambda b \cdot \cos \lambda(b+e) \cdot ch \lambda(b-e) - \sin 2\lambda b \cdot ch \lambda(b+e) \cdot \cos \lambda(b-e)] + | \\ & + [ch \lambda(b+y) \cdot \sin \lambda(b+y) + sh \lambda(b+y) \cdot \cos \lambda(b+y)] \cdot \\ & [sh 2\lambda b [\sin \lambda(b+e) \cdot ch \lambda(b-e) - \cos \lambda(b+e) \cdot sh \lambda(b-e)] + | \\ & + \sin 2\lambda b [sh \lambda(b+e) \cdot \cos \lambda(b-e) - ch \lambda(b+e) \cdot \sin \lambda(b-e)] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Où \$e\$ est l'excentricité de la charge unitaire dans le sens transversal.
\$y\$ est l'abscisse transversale de la section étudiée.

$$\lambda = \frac{\pi\theta}{b\sqrt{2}} \quad (35)$$

Telle que \$\theta\$ est le paramètre d'entretoisement, \$b\$ est la demi largeur utile de l'ouvrage.

N.B : L'équation 34 n'est applicable que si la section considérée d'abscisse \$y\$ se trouve à gauche du point d'application de la charge unitaire, c'est-à-dire pour \$y \le e\$, comme le montre la figure 8. Dans le cas contraire (\$y > e\$), l'équation peut être aussi utilisée à condition de changer les signes de \$y\$ et \$e\$ se trouvant dans cette équation.

$$K_1 = \frac{\sigma}{2sh} \left[\frac{(\sigma \cdot ch\sigma + sh\sigma) \cdot ch\theta\chi - \theta\chi \cdot sh\sigma \cdot sh\theta\chi + \frac{R_\beta \cdot R_\nu}{3 sh\sigma \cdot ch\sigma - \sigma} + \frac{Q_\beta \cdot Q_\nu}{3 sh\sigma \cdot ch\sigma + \sigma}}{\sigma} \right] \quad (36)$$

Où

$$\sigma = \pi\theta \quad (37)$$

$$\beta = \frac{\pi y}{b} \quad (38)$$

$$\psi = \frac{\pi e}{b} \quad (39)$$

$$\chi = \pi - |\beta - \psi| \quad (40)$$

Et

$$\left. \begin{aligned} R_\beta &= (\sigma \cdot \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \cdot \operatorname{ch} \theta \beta - \theta \beta \cdot \operatorname{sh} \sigma \cdot \operatorname{sh} \theta \beta \\ R &= (\sigma \cdot \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma) \cdot \operatorname{ch} \theta \psi - \theta \psi \cdot \operatorname{sh} \sigma \cdot \operatorname{sh} \theta \psi \\ Q_\beta &= (2 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \cdot \operatorname{ch} \sigma) \cdot \operatorname{sh} \theta \beta - \theta \beta \cdot \operatorname{sh} \sigma \cdot \operatorname{ch} \theta \beta \\ Q &= (2 \operatorname{sh} \sigma + \sigma \cdot \operatorname{ch} \sigma) \cdot \operatorname{sh} \theta \psi - \theta \psi \cdot \operatorname{sh} \sigma \cdot \operatorname{ch} \theta \psi \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Les valeurs des coefficients K_0 et K_1 sont lues soit sur des tableaux en fonction de θ (exemple du tableau 1) soit sur des abaques (exemple des figures 11 et 12).

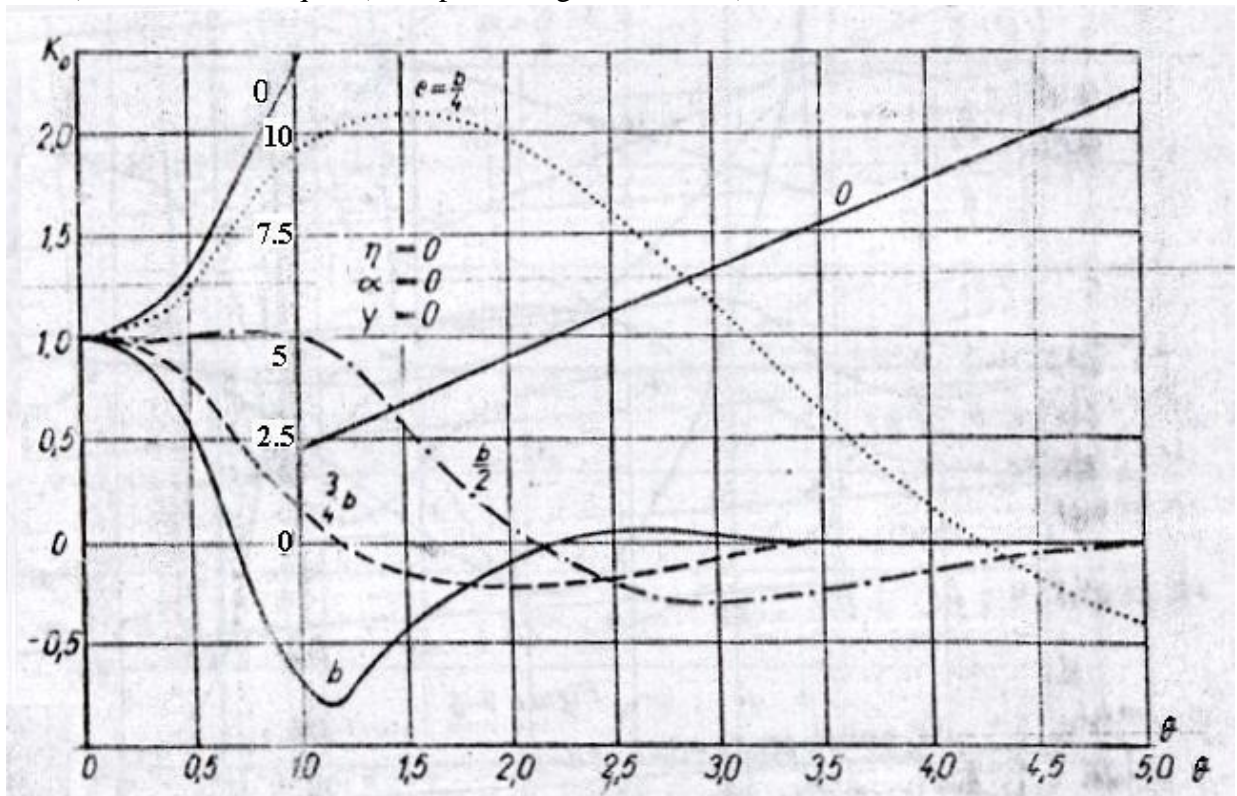


Fig. 11 Exemple : Représentation de K_0 en fonction de θ , pour $y = 0$.

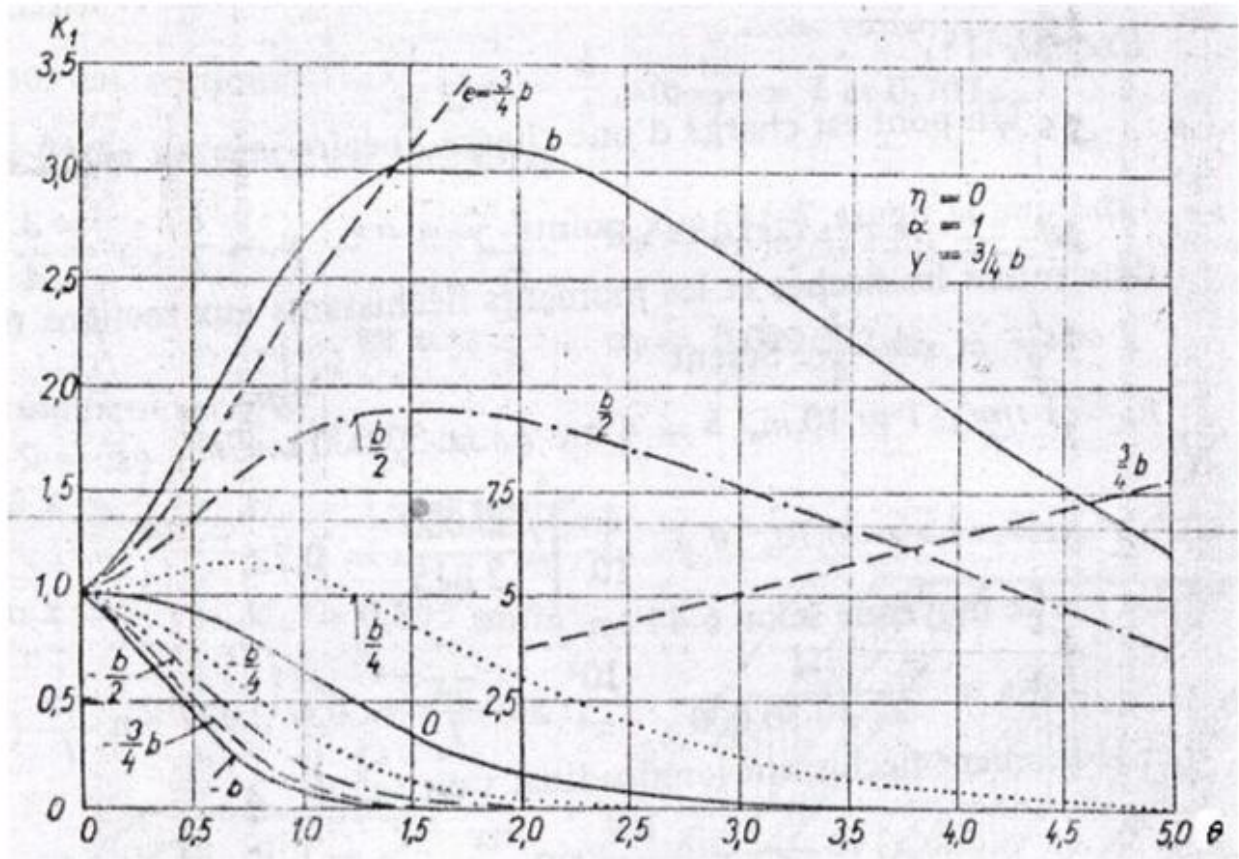


Fig. 12 Exemple : Représentation de K_1 en fonction de θ , pour $y = 3b/4$.

$\frac{c}{y}$	$-b$	$-3b/4$	$-b/2$	$-b/4$	0	$b/4$	$b/2$	$3b/4$	b
Tableau I/11									
$\theta = 0,55$	K_0								
0	+0,4848	+0,7666	+1,0360	+1,2556	+1,3521	+1,2556	+1,0360	+0,7666	+0,4848
b/4	-0,0883	+0,2657	+0,6185	+0,9592	+1,2556	+1,4423	+1,4571	+1,3746	+1,2654
b/2	-0,5233	-0,1539	+0,2230	+0,6185	+1,0360	+1,4571	+1,8274	+2,0885	+2,3046
3b/4	-0,8871	-0,5278	-0,1539	+0,2657	+0,7666	+1,3746	+2,0885	+2,8585	+3,6081
b	-1,2289	-0,8871	-0,5233	-0,0883	+0,4848	+1,2654	+2,3046	+3,6081	+5,0997
	K_1								
0	+0,8255	+0,9069	+1,0016	+1,0980	+1,1489	+1,0980	+1,0016	+0,9069	+0,8255
b/4	+0,6309	+0,7192	+0,8275	+0,9595	+1,0980	+1,1940	+1,1901	+1,1411	+1,0889
b/2	+0,4916	+0,5777	+0,6859	+0,8275	+1,0016	+1,1901	+1,3443	+1,4070	+1,4308
3b/4	+0,3922	+0,4737	+0,5777	+0,7192	+0,9069	+1,1411	+1,4070	+1,6611	+1,8519
b	+0,3153	+0,3922	+0,4916	+0,6309	+0,8255	+1,0889	+1,4308	+1,8519	+2,3314
Tableau I/12									
$\theta = 0,60$	K_0								
0	+0,3347	+0,6968	+1,0447	+1,3316	+1,4594	+1,3316	+1,0447	+0,6968	+0,3347
b/4	-0,1808	+0,2154	+0,6119	+0,9977	+1,3316	+1,5237	+1,4853	+1,3177	+1,1155
b/2	-0,5241	-0,1615	+0,2117	+0,6119	+1,0447	+1,4853	+1,8575	+2,0778	+2,2358
3b/4	-0,7808	-0,4806	-0,1615	+0,2154	+0,6968	+1,3177	+2,0778	+2,9106	+3,7122
b	-1,0112	-0,7808	-0,5241	-0,1808	+0,3347	+1,1155	+2,2358	+3,7122	+5,4480
	K_1								
0	+0,7878	+0,8839	+0,9996	+1,1215	+1,1878	+1,1215	+0,9996	+0,8839	+0,7878
b/4	+0,5792	+0,6761	+0,7992	+0,9545	+1,1215	+1,2361	+1,2207	+1,1501	+1,0792
b/2	+0,4349	+0,5243	+0,6410	+0,7992	+0,9996	+1,2207	+1,3994	+1,4582	+1,4686
3b/4	-0,3362	+0,4171	+0,5243	+0,6761	+0,8839	+1,1501	+1,4582	+1,7518	+1,9607
b	-0,2627	+0,3362	+0,4349	+0,5792	+0,7878	+1,0792	+1,4686	+1,9607	+2,5312

Tab. 1 Exemple : Valeurs de K_0 et K_1 correspondants à $\theta = 0,55$ et $\theta = 0,60$

Exercice 1

Soit un pont en béton précontraint de portée 28 m, le tablier comporte 4 poutres principales et 3 entretoises.

- 1- Tracer les diagrammes K_α pour chacune des poutres.
- 2- Calculer le moment fléchissant maximal dans la poutre intermédiaire, du aux surcharges $A(l)$, S_t et B_c .

Données : $A_2(l) = 12.8 \text{ KN/m}^2$

b

$c = 1.1 ; \delta_{Bc} = 1.236$

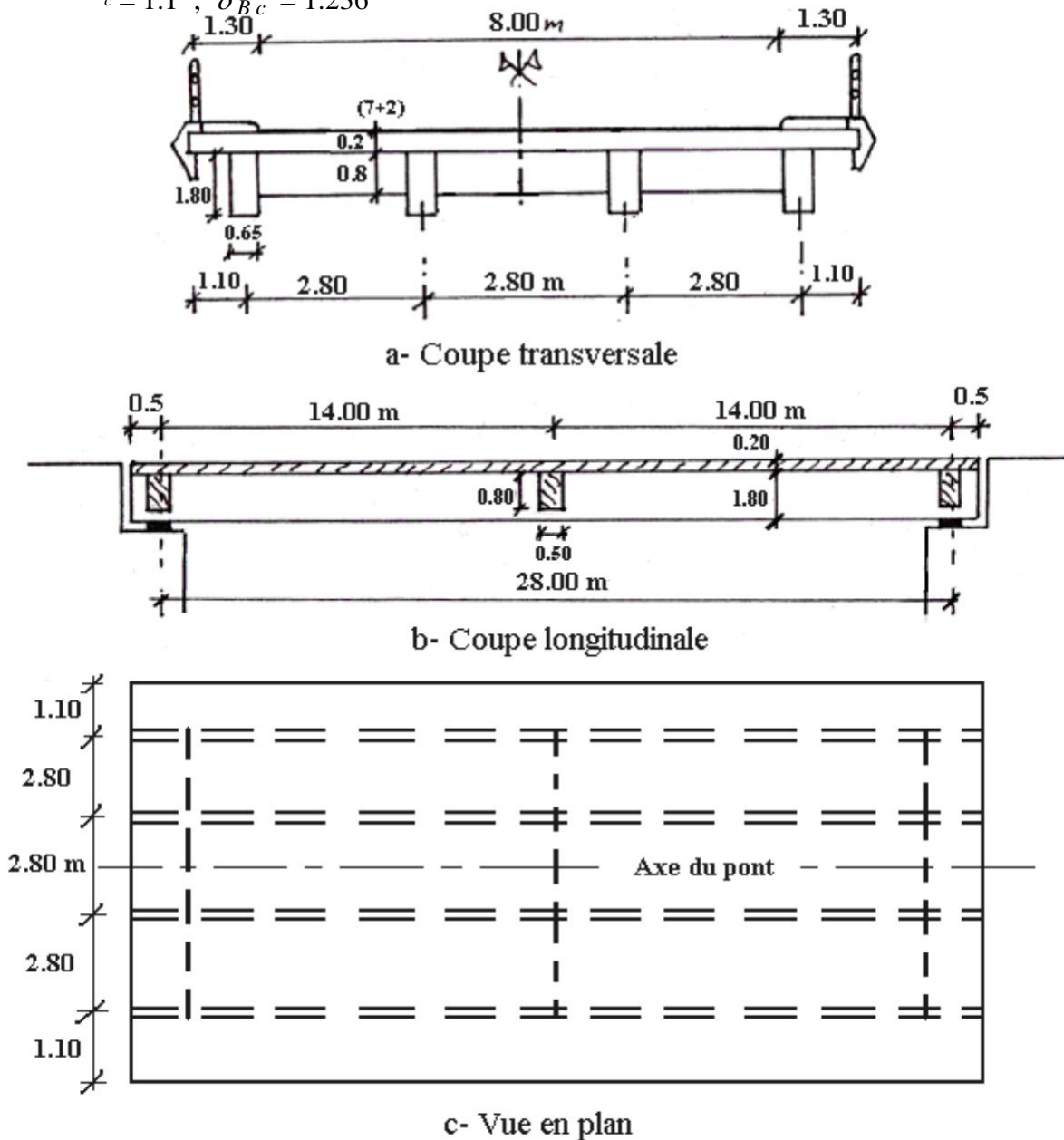


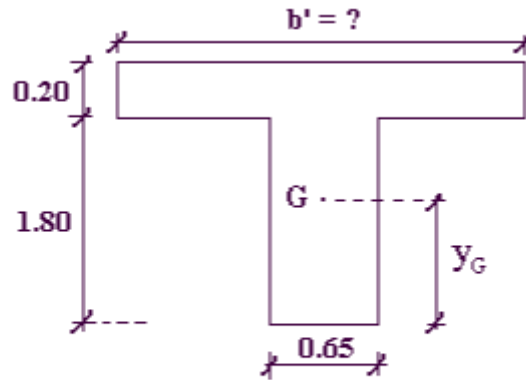
Fig. 13 Détail de l'ouvrage

Solution

1- Traçage des diagrammes de K_α :

1- a Poutres :

$$b'-b \leq \inf \left\{ \begin{array}{l} L_p \\ 10 \end{array} \right.$$



Section transversale de la poutre.

$$\frac{b'-0.65}{2} \leq \inf \left\{ \begin{array}{l} 2.8 - 0.65 \\ 2.8 \end{array} \right. = 1.075 \Rightarrow \boxed{b' = 2.80 \text{ m}}$$

$$y_G = \frac{0.65 \times 1.80 \times 0.9 + 0.2 \times 2.8 \times 1.9}{0.65 \times 1.8 + 0.2 \times 2.8} \Rightarrow \boxed{y_G = 1.224 \text{ m}}$$

$$I_P = \frac{0.65 \times (1.8)^3}{12} + 0.65 \times 1.8 \times (1.224 - 0.9)^2 + \frac{2.8 \times (0.2)^3}{12} + 2.8 \times 0.2 \times (0.676)^2$$

$$\boxed{I_P = 0.6965 \text{ m}^4}$$

$$\rho_P = \frac{E \cdot I_P}{b_1}$$

$$\rho_P = \frac{E \times 0.6965}{2.8} \Rightarrow \boxed{\rho_P = 0.24875 E}$$

$$I_P^t = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i \cdot v_i^3}{\psi_i}$$

$$\psi_1 = 3 + 1.8 \frac{v_1}{b_1} = 3 + 1.8 \times \frac{0.2}{2.8} = 3.129$$

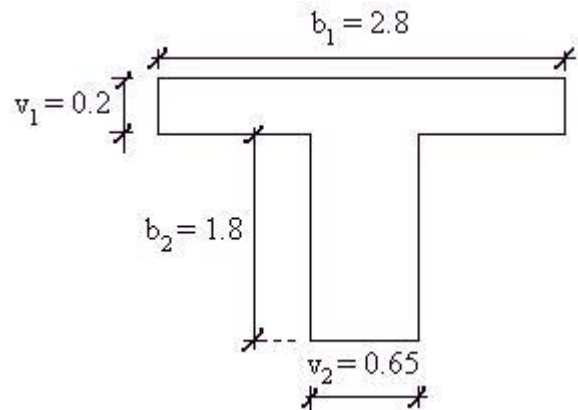
$$\psi_2 = 3 + 1.8 \frac{v_2}{b_2} = 3 + 1.8 \times \frac{0.65}{1.8} = 3.650$$

$$I_P^t = \frac{2.8 \times (0.2)^3}{3.129} + \frac{1.8 \times (0.65)^3}{3.650} \Rightarrow \boxed{I_P^t = 0.1426 \text{ m}^4}$$

$$\gamma_P = \frac{G \cdot I_P^t}{b_1}$$

$$G = \frac{E}{2.3} \Rightarrow \gamma_P = \frac{E}{2.3} \times \frac{0.1426}{2.8}$$

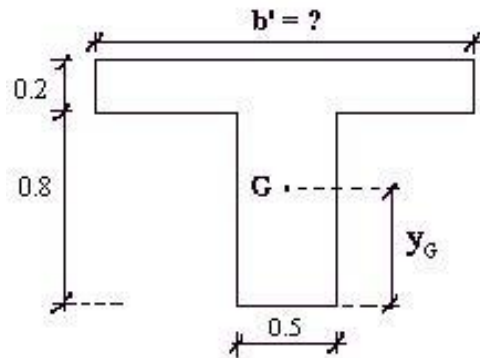
$$\boxed{\gamma_P = 0.022143 E}$$



1- b Entretoise :

$$\frac{b'-0.5}{2} \leq \inf \left\{ \begin{array}{l} \frac{2.8 \times 3}{10} = 0.84 \\ 14 \frac{-0.5}{2} = 6.75 \\ 6 \times 0.2 = 1.2 \end{array} \right. \Rightarrow b' \leq 2.18 \text{ m}$$

$b' = 2.10 \text{ m}$



Section transversale de l'entretoise

$$y_G = \frac{0.5 \times 0.8 \times 0.4 + 0.2 \times 2.1 \times 0.9}{0.5 \times 0.8 + 2.1 \times 0.2} \Rightarrow y_G = 0.656 \text{ m}$$

$$I_E = \frac{0.5 \times (0.8)^3}{12} + 0.5 \times 0.8 \times (0.256)^2 + \frac{2.1 \times (0.2)^3}{12} + 2.1 \times 0.2 \times (0.244)^2$$

$I_E = 0.0740 \text{ m}^4$

$$\rho_E = \frac{E \cdot I_E}{L_1}$$

$$\rho_E = \frac{E \times 0.0740}{14} \Rightarrow \rho_E = 0.00529 E$$

$$I_E^i = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i \cdot v_i^3}{\psi_i}$$

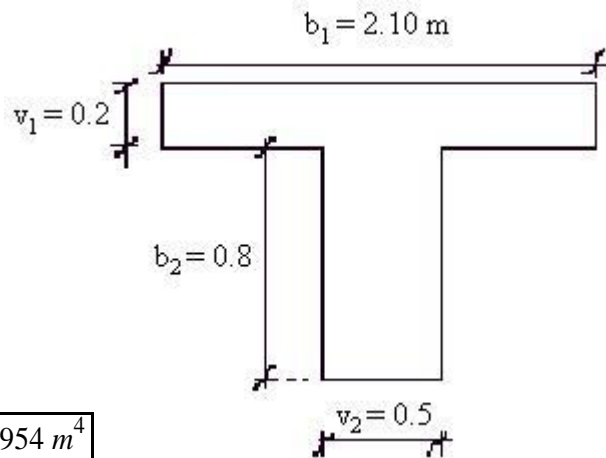
$$\psi_1 = 3 + 1.8 \times \frac{0.2}{2} = 3.171$$

$$\psi_2 = 3 + 1.8 \times \frac{0.5}{0.8} = 4.125$$

$$I_E^i = \frac{2.1 \times (0.2)^3}{3.171} + \frac{0.8 \times (0.5)^3}{4.125} \Rightarrow I_E^i = 0.02954 \text{ m}^4$$

$$\gamma_E = \frac{G \cdot I_E^i}{L_1}$$

$$\gamma_E = \frac{E}{2.3} \times \frac{0.02954}{14} \Rightarrow \gamma_E = 0.000917 E$$



1- c Le paramètre d'entretènement θ :

$$\theta = \frac{b}{L} \cdot 4 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_E}}$$

La largeur utile est

$$2b = n \cdot b_1$$

$$2b = 4 \times 2.8 \Rightarrow \boxed{2b = 11.20 \text{ m}}$$

On remarque que cette largeur utile est supérieure à la largeur réelle de l'hourdis qui est

$$L_H = 3 \times 2.8 + 2 \times 1.1 = 10.60 \text{ m}$$

Pour avoir la largeur utile de 2b, on doit rajouter la valeur a = 0.3 m sur chacun des 2 côtés de l'hourdis.

La largeur utile (2b) est valable pour le calcul des paramètres θ , K_α et ν_α , mais seule la largeur réelle peut être chargée, et les côtés (a) ne doivent pas l'être.

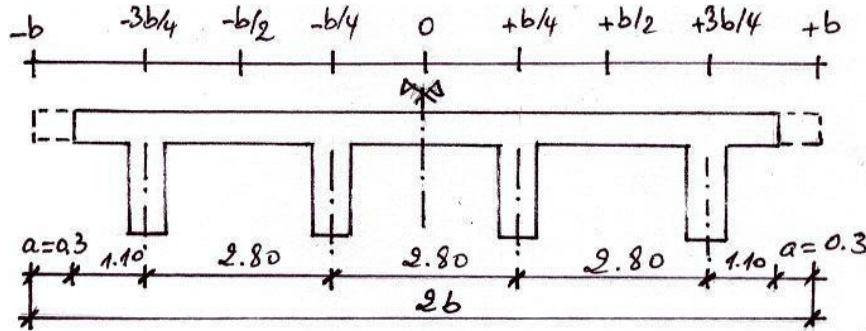


Fig. 14 Disposition transversale des poutres

$$b = \frac{11.2}{2} = 5.6 \text{ m}$$

$$\theta = \frac{5.6}{28} \cdot \sqrt[4]{\frac{0.24875 E}{0.00529 E}} \Rightarrow \boxed{\theta = 0.524}$$

1- d Le paramètre de torsion α :

$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2 \cdot \sqrt{\rho_P \cdot \rho_E}}$$

$$\alpha = \frac{(0.022143 + 0.000917)E}{2 E \sqrt{0.24875 \times 0.00529}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.318}$$

1- e Valeurs de K_α :

Les poutres à étudier se trouvent à des abscisses $y = b/4$ et $y = 3b/4$. Pour calculer les coefficients K_0 et K_1 correspondant à $\theta = 0.524$, on doit interpoler entre les valeurs des 2 tableaux correspondants respectivement à $\theta = 0.5$ et $\theta = 0.55$, ce qui donne

$\theta = 0.524 \rightarrow K_0$

y \ e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y = b/4	-0.044	0.289	0.620	0.940	1.220	1.406	1.445	1.401	1.334
y = 3b/4	-0.937	-0.550	-0.150	-0.289	1.796	1.401	2.093	2.835	3.559

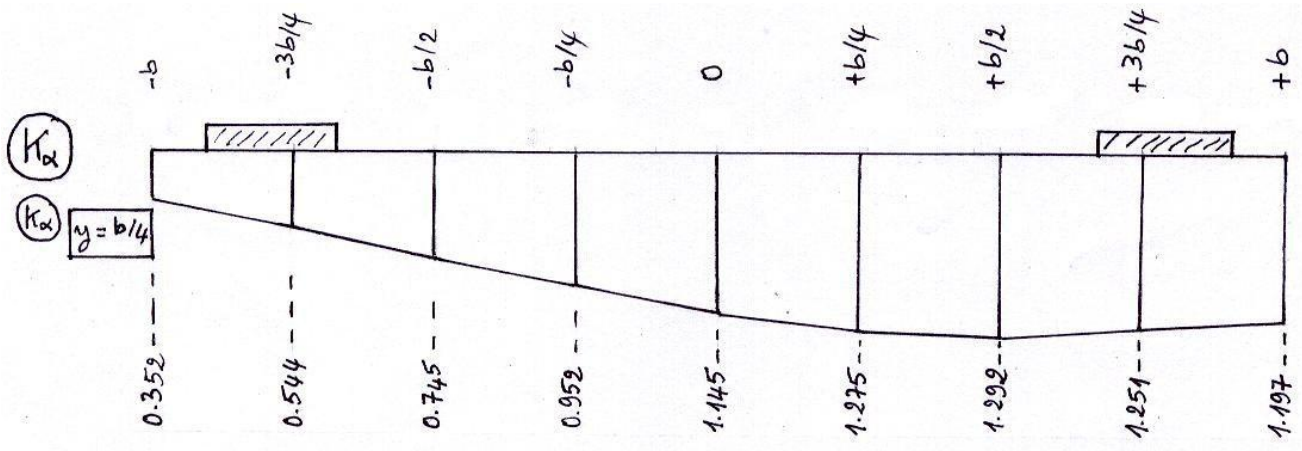
$\theta = 0.524 \rightarrow K_1$

y \ e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y = b/4	0.658	0.741	0.842	0.962	1.087	1.174	1.750	1.535	1.091
y = 3b/4	0.424	0.505	0.606	0.741	0.918	1.135	1.380	1.614	1.794

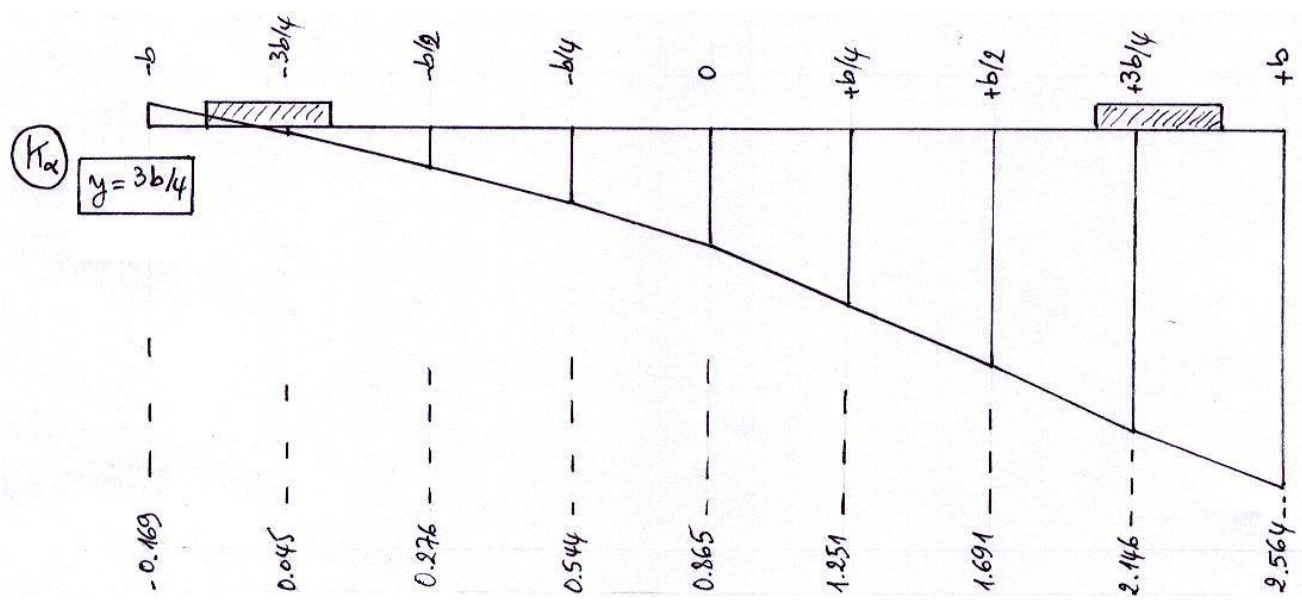
$$\theta = 0.524 \rightarrow \nu_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

y \ e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y = b/4	0.352	0.544	0.745	0.952	1.145	1.275	1.292	1.251	1.197
y = 3b/4	-0.169	0.045	0.276	0.544	0.865	1.251	1.691	2.146	2.564

On peut maintenant tracer le diagramme de K_α pour chacune des 2 poutres.



a- Poutre d'abscisse ($y = b/4$)



b- Poutre d'abscisse ($y = 3b/4$)

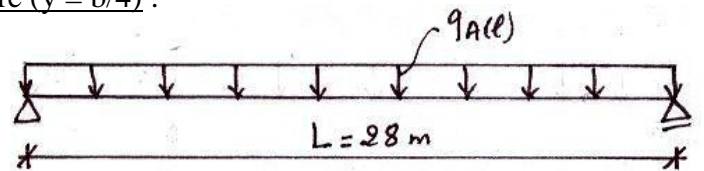
Fig. 15 Diagramme de K_α des poutres

2- Calcul de M_{\max} dans la poutre intermédiaire ($y = b/4$) :

2- a M_{\max} du à $A(L)$:

$$q_{A(L)} = A_2(l) \cdot L_c$$

$$q_{A(L)} = 12.8 \times 8 \Rightarrow \boxed{q_{A(L)} = 102.400 \text{ KN/ml}}$$



Le moment fléchissant total du tablier : $M_0 = q_{A(L)} \cdot \frac{l^2}{8}$

$$M_0 = 102.4 \times \frac{(28)^2}{8} \Rightarrow \boxed{M_0 = 10035.200 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

Le moment fléchissant moyen revenant à chaque poutre est : $M_{xm} = \frac{M_{x0}}{n}$

Où n est le nombre de poutres ; n = 4.

$$M_{xm} = \frac{10035.2}{4} \Rightarrow \boxed{M_{xm} = 2508.800 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

Puisqu'il s'agit d'une charge uniformément répartie, on a : $M_x = M_{xm} \cdot \frac{S_K}{L_c}$

L_c est la largeur chargée par A(L) : $L_c = 8 \text{ m}$

S_K est l'aire comprise entre le diagramme de K_α et l'axe horizontal de référence : $S_K = \int_0^{L_c} K_\alpha \cdot dx$

D'après le diagramme de la figure 16, on a : $S_K = 8.467$

$$D'où M_x = 2508.8 \times \frac{8.467}{8} \Rightarrow \boxed{M_x = 2655.800 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

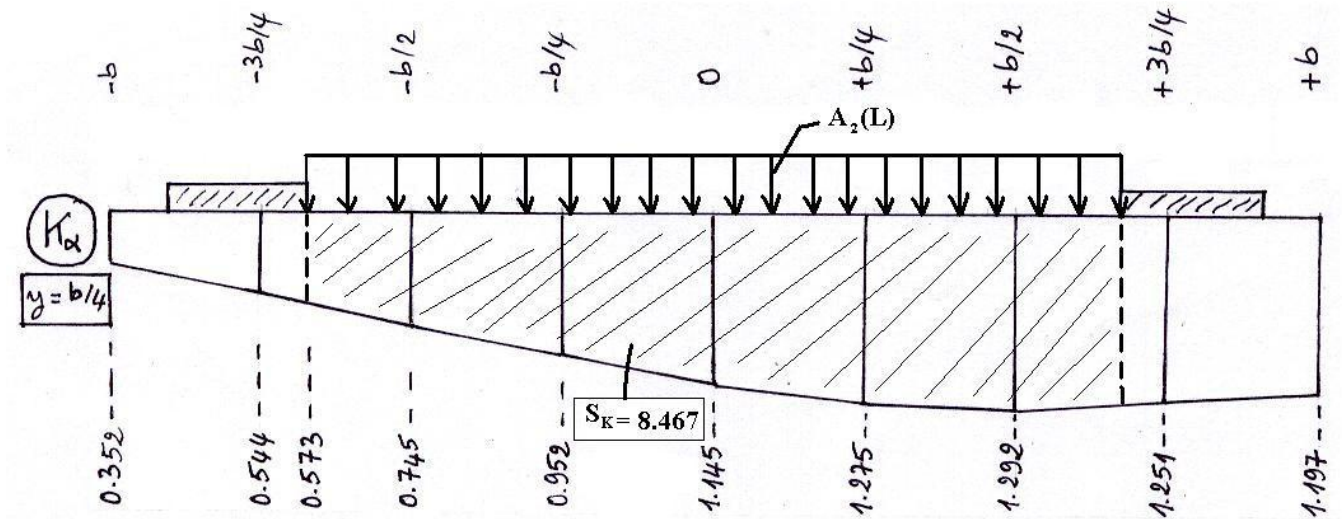


Fig. 16 Chargement du diagramme K_α de la poutre d'abscisse ($y = b/4$), par le système A(L).

2- b M_{max} du à S_t :

$$q_{S_t} = S_t \cdot l_t \times 2$$

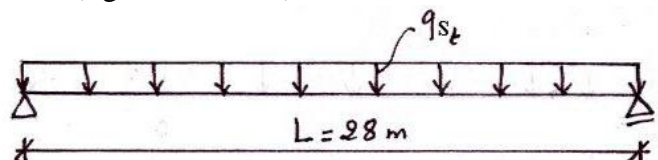
Où l_t est la largeur du trottoir ; $l_t = 1.3 \text{ m}$

Puisqu'il s'agit de l'étude d'une poutre on utilise le S_t global, soit $S_t = 1.5 \text{ KN} / \text{m}^2$

$$q_{S_t} = 1.5 \times 1.3 \times 2 \Rightarrow \boxed{q_{S_t} = 3.900 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

$$M_0 = q_{S_t} \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$M_0 = 3.9 \times \frac{(28)^2}{8} \Rightarrow \boxed{M_0 = 382.200 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$



Le moment fléchissant moyen pour chaque poutre : $M_{xm} = \frac{M_{x0}}{4}$

$$M_{xm} = \frac{382.2}{4} \Rightarrow \boxed{M_{xm} = 95.550 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

D'après la figure 17, on a : $M_x = M_{xm} \left(\frac{S_{K1} + S_{K2}}{L_{c1} + L_{c2}} \right)$

$$M_x = 95.55 \times \left(\frac{0.628 + 1.603}{1.3 + 1.3} \right) \Rightarrow \boxed{M_x = 81.989 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

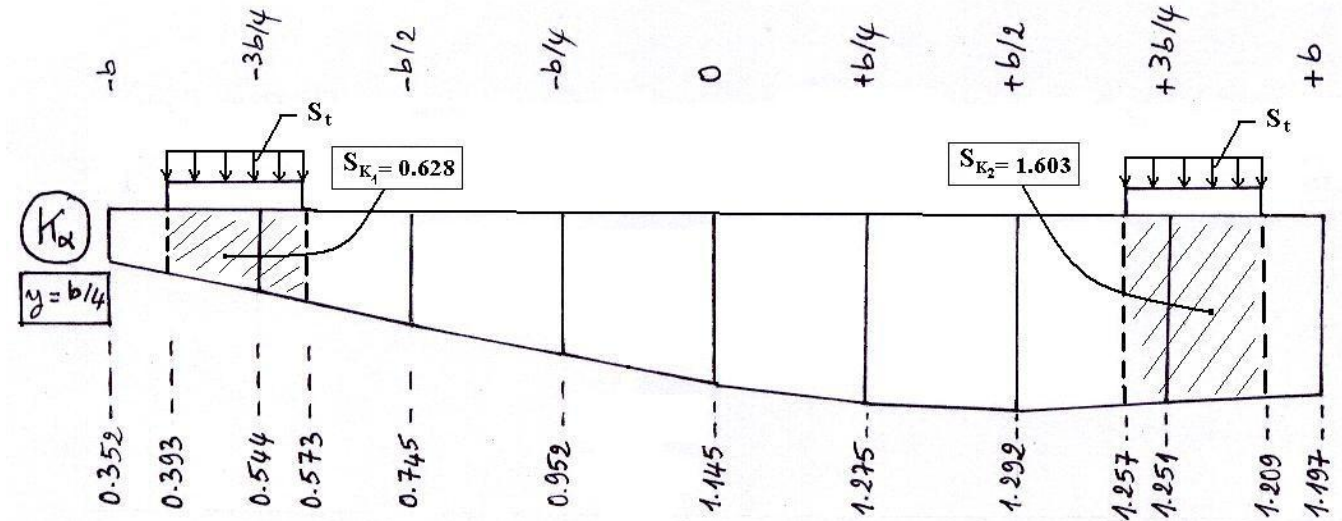


Fig. 17 Chargement du diagramme K_α de la poutre d'abscisse ($y = b/4$), par S_t (trottoir).

2- c M_{\max} du au système B_c :

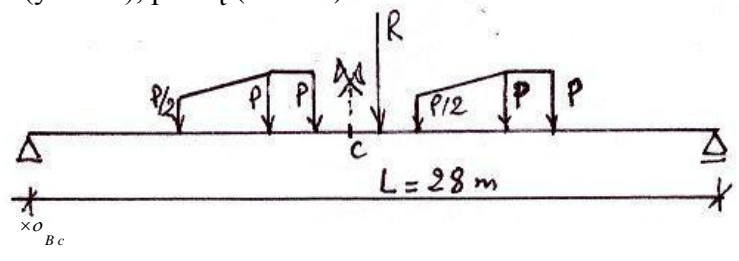
En utilisant le théorème de Barré pour 2 files de camions (soit 4 camions), on a

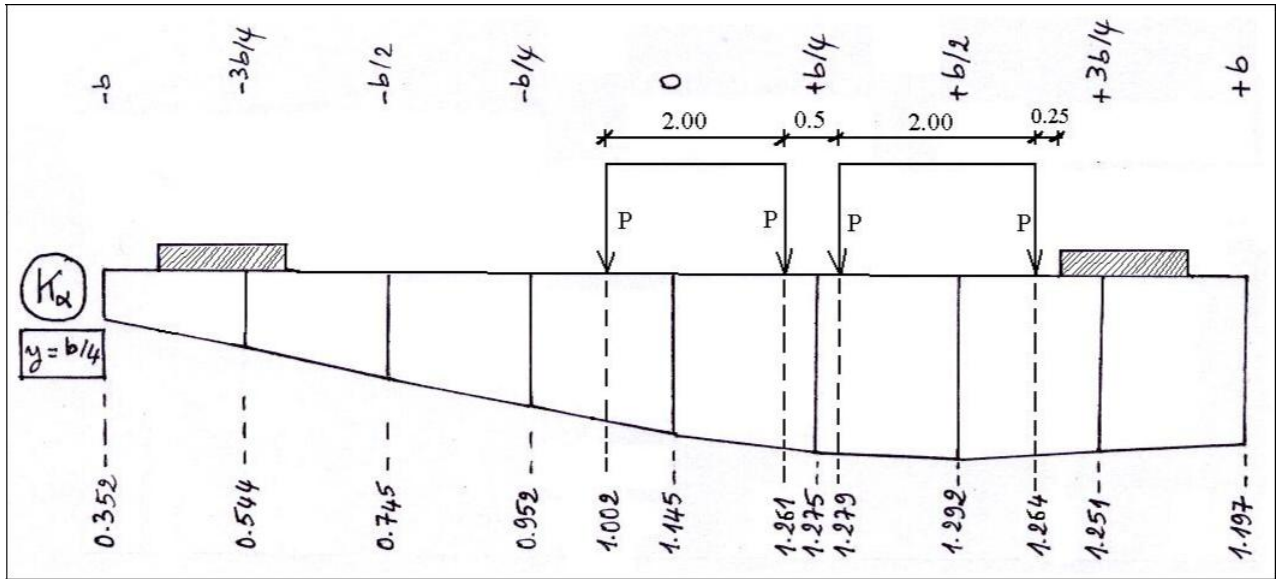
$$M_0 = 2 \times P \left(1.25 l + \frac{14.878125}{l} - 13.125 \right) \times b_c$$

$$M_0 = 2 \times 120 \times \left(1.25 \times 28 + \frac{14.878125}{28} - 13.125 \times 1.1 \times 1.236 \right) \Rightarrow \boxed{M_0 = 7311.28 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

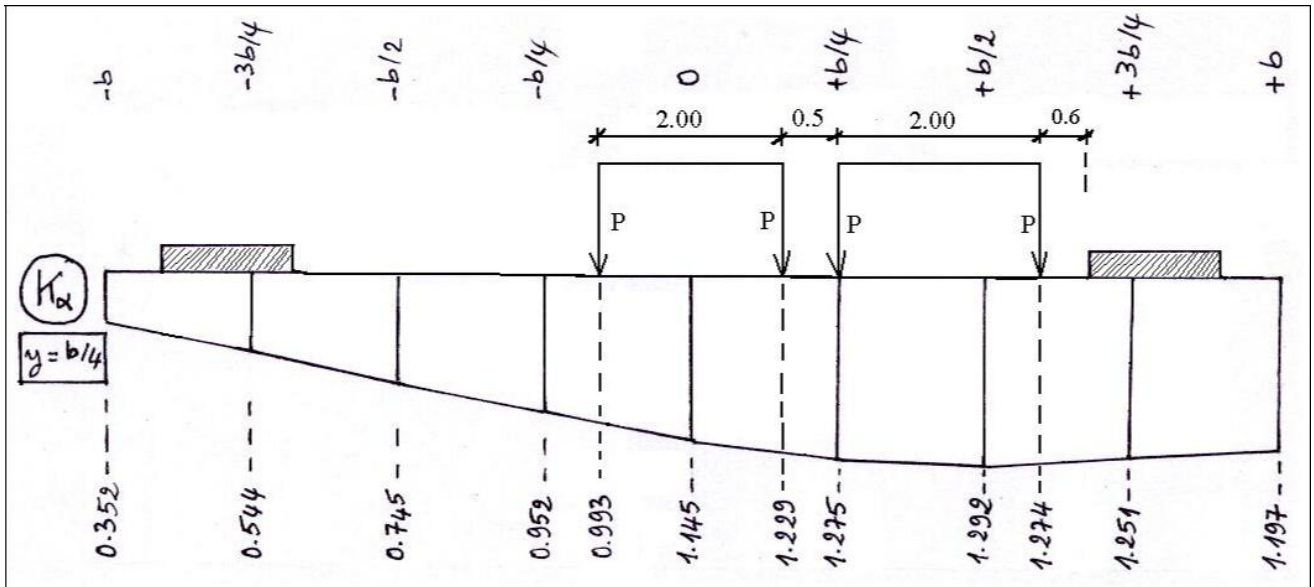
$$M_{xm} = \frac{M_0}{4} : M_{xm} = \frac{7311.28}{4} \Rightarrow \boxed{M_{xm} = 1827.820 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

Position 1 : $\sum_{i=1}^4 K_{\alpha i} = 4.846$





Position 2 : $\sum_{i=1}^4 K_{\alpha i} = 4.771$



$\sum_{i=1}^4 K_{\alpha i}^{(1)} > \sum_{i=1}^4 K_{\alpha i}^{(2)} \Rightarrow$ On choisit la position 1.

$M_x = M_{xm} \cdot \frac{\sum_i P \cdot K_{\alpha i}}{\sum_i P} \Rightarrow M_x = M_{xm} \cdot \frac{P \sum K_{\alpha i}}{4P}$, soit : $M_x = M_{xm} \cdot \frac{\sum K_{\alpha i}}{4}$

$M_x = 1827.82 \times \frac{4.846}{4} \Rightarrow M_x = 2214.400 \text{ KN} \cdot \text{m}$

b- Flexion transversale (Entretoises)

Pour une entretoise donnée située à l'abscisse x par rapport à l'axe transversal (oy), le moment fléchissant est donné par l'expression

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ch arg es concentrées : } M_y(x, y) = b \sin \frac{\pi x}{L} \cdot \sum_i P_i \cdot v_\alpha(y, e_i) \\ \text{Ch arg es réparties : } M_y(x, y) = b \sin \frac{\pi x}{L} \cdot P \cdot S_v \end{array} \right. \quad (42)$$

Où b est la demi largeur utile de l'ouvrage.

L est la portée du pont.

P_i sont les différentes réactions de l'entretoise dues aux files de charges concentrées sur le tablier.

Chacune de ces réactions P_i est excentrée d'une valeur e_i par rapport à l'axe longitudinal (ox).

P_q est la réaction de l'entretoise, sur 1 mètre de largeur du tablier, due à une charge q uniformément répartie.

v_α est le coefficient de répartition transversale des réactions P_i . Le v_α dépend de l'abscisse y de la section transversale choisie dans l'entretoise, de l'excentricité e_i de la réaction unitaire ($P_i = 1$), et du coefficient α ; paramètre de torsion.

S_v est l'aire compris entre le diagramme de v_α et l'axe horizontal de référence sur la longueur d'application de la charge répartie.

L'exemple de la figure 18 nous donne le diagramme de v_α pour la section médiane d'une entretoise ($y = 0$). Cette entretoise est située à l'abscisse $x = L/2$. Le diagramme de v_α est chargé par les réactions de cette entretoise dues au convoi B_t . En utilisant l'équation (42) pour des charges concentrées, on a

$$M_y = b \sin \frac{\pi x}{L} \cdot \sum P_i \cdot v_{\alpha i}$$

Sachant que pour cet exemple on a : $b = 5.2325 \text{ m}$; $P = 170.880 \text{ KN}$; $x = L/2$, on aura

$$M_y = 5.2325 \times \sin \frac{\pi}{2} \times P \times \sum v_{\alpha i} \Rightarrow M_y = 5.2325 \times 170.880 \times (0.087 + 1.918 + 1.918 + 0.087)$$

$$M_y = 3585.460 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

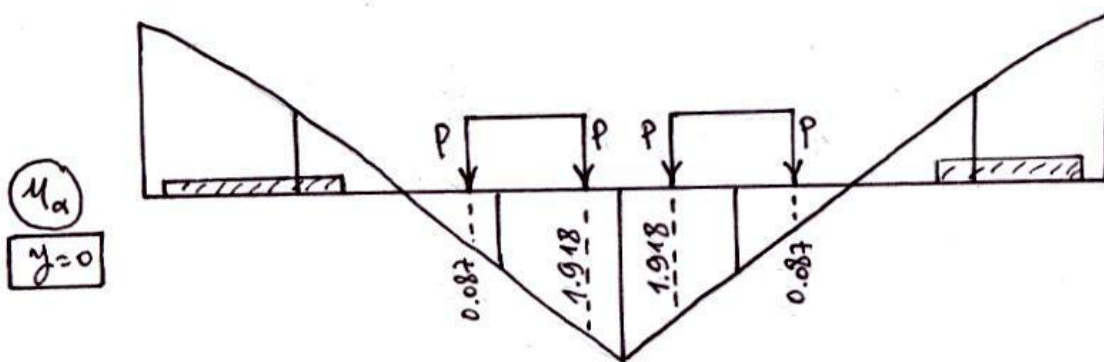


Fig. 18 Diagramme d'influence transversale v_α d'une entretoise dans sa section médiane ($y=0$) chargée par 2 files de tandem B_t

D'après l'exemple de la figure 19, il s'agit du diagramme de v_α correspondant à la section médiane ($y = 0$) d'une entretoise. Ce diagramme est chargé par la réaction d'entretoise due au système D_{240} . En utilisant l'équation 42 pour le cas de charge répartie, on aura

$$M_y = b \sin \frac{\pi x}{L} \cdot P_q \cdot S_v$$

Sachant que : $b = 5.2325 \text{ m}$, $P_q = 635.690 \text{ KN}$, $S_\mu = 0.524$, et $x = L/2$, on aura

$$M_y = 5.2325 \times \sin \frac{\pi}{2} \times 635.69 \times 0.524 \Rightarrow M_y = 1742.954 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

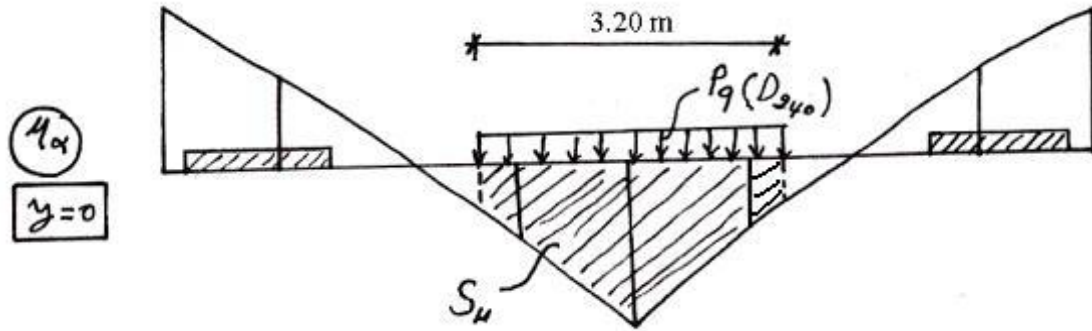


Fig. 19 Diagramme d'influence transversale ν_α d'une entretoise dans sa section médiane ($y = 0$), chargée le système D240

Le coefficient ν_α est calculé à partir des 2 coefficients ν_0 et ν_1 correspondants respectivement aux valeurs $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

$$\nu_\alpha = \nu_0 + (\nu_1 - \nu_0) \cdot \sqrt{\alpha} \quad (43)$$

Les valeurs de ν_0 et ν_1 sont tirées à partir de tableaux ou d'abaques en fonction du paramètre d'entretoisement θ . Cependant ν_0 et ν_1 peuvent être calculés à partir de leurs expressions analytiques.

$$\nu_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{2\theta}} \cdot \frac{1}{(sh 2\lambda b - \sin 2\lambda b)} \left\{ \begin{array}{l} 2 sh \lambda(b+y) \cdot \sin \lambda(b+y) \cdot \\ \left[sh 2\lambda b \cdot \cos \lambda(b+e) \cdot ch \lambda(b-e) - \sin 2\lambda b \cdot ch \lambda(b-e) \cdot \cos \lambda(b+e) \right] - \\ \left[- \sin 2\lambda b \cdot ch \lambda(b+e) \cdot \cos \lambda(b-e) \right] + \\ [ch \lambda(b+y) \cdot \sin \lambda(b+y) - sh \lambda(b+y) \cdot \cos \lambda(b+y)] \cdot \\ \left\{ sh 2\lambda b [\sin \lambda(b+e) \cdot ch \lambda(b-e) - \cos \lambda(b+e) \cdot sh \lambda(b-e)] + \right\} \\ \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \sin 2\lambda b [sh \lambda(b+e) \cdot \cos \lambda(b-e) \\ - ch \lambda(b+e) \cdot \sin \lambda(b-e)] \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (44)$$

Où λ est un coefficient cité dans l'équation 34. En reportant sa valeur on aura

$$\lambda = \frac{\pi \theta}{b \sqrt{2}} \quad (45)$$

Sachant que :

e est l'excentricité de la charge unitaire dans le sens transversal.

y est l'abscisse de la section transversale étudiée dans l'entretoise.

N.B : L'équation 44 n'est valable que si la section transversal d'abscisse y est établie à gauche de point d'application de la charge unitaire, càd pour $y \leq e$. Dans le cas contraire ($y > e$), l'équation peut être aussi utilisée à condition de changer les signes de y et e se trouvant dans cette équation.

$$v_1 = \frac{\sigma}{4\sigma sh^2\sigma} \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{[(\sigma \cdot ch\sigma - 3sh\sigma) \cdot ch\theta\beta - \theta\beta \cdot sh\sigma \cdot sh\theta\beta] \cdot [(\sigma \cdot ch\sigma - sh\sigma) \cdot ch\theta\psi - \theta\psi \cdot sh\sigma \cdot sh\theta\psi]}{3sh\sigma \cdot ch\sigma - \sigma} \\ &+ \frac{(\sigma \cdot ch\sigma \cdot sh\theta\beta - \theta\beta \cdot sh\sigma \cdot ch\theta\beta) \cdot [(2sh\sigma + \sigma \cdot ch\sigma) \cdot sh\theta\psi - \theta\psi \cdot sh\sigma \cdot ch\theta\psi]}{3sh\sigma \cdot ch\sigma + \sigma} \\ &+ [\sigma \cdot ch\sigma - sh\sigma] \cdot ch\theta\chi - \theta\chi \cdot sh\sigma \cdot sh\theta\chi \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Où les paramètres σ , β , ψ , et χ déjà mentionnés dans les équations (36-39) sont reportés avec leurs expressions

$$\sigma = \pi\theta \quad (47)$$

$$\beta = \frac{\pi y}{b} \quad (48)$$

$$\psi = \frac{\pi e}{b} \quad (49)$$

$$\chi = \pi - |\beta - \psi| \quad (50)$$

Les valeurs des coefficients v_0 et v_1 peuvent être lues à partir d'abaques (exemple des figures 20 et 21) ou à partir des tableaux qui dépendent du paramètre d'entretoisement θ (exemple du tableau 2).

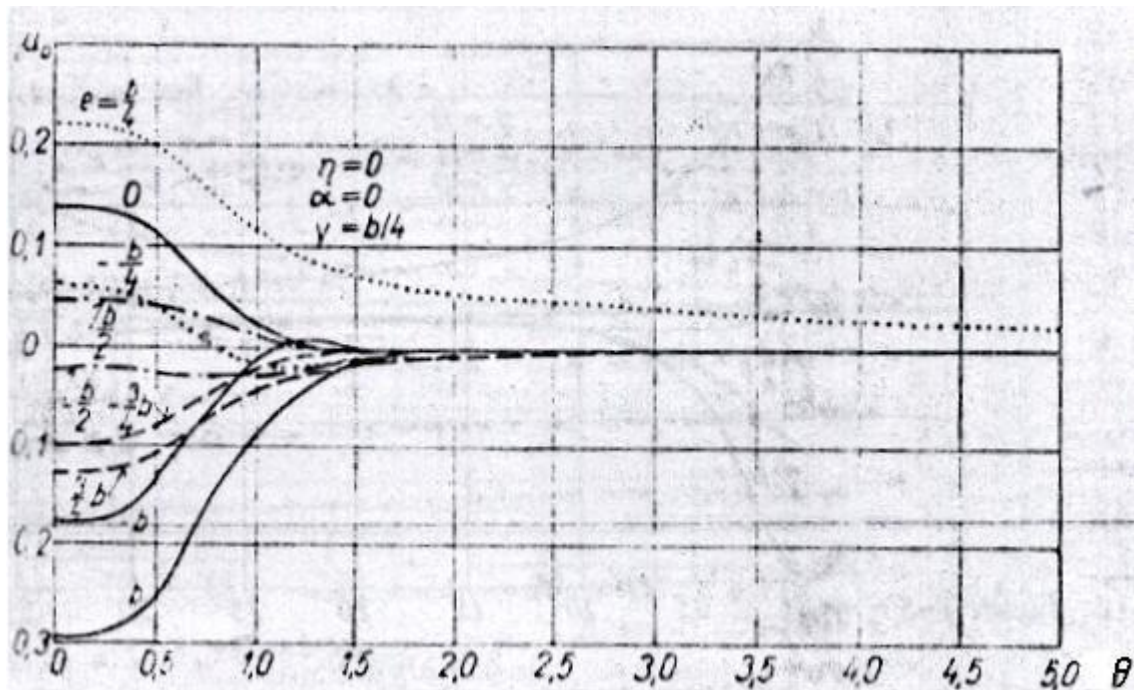


Fig. 20 Exemple : Représentation de v_0 en fonction de θ , pour $y = b/4$.

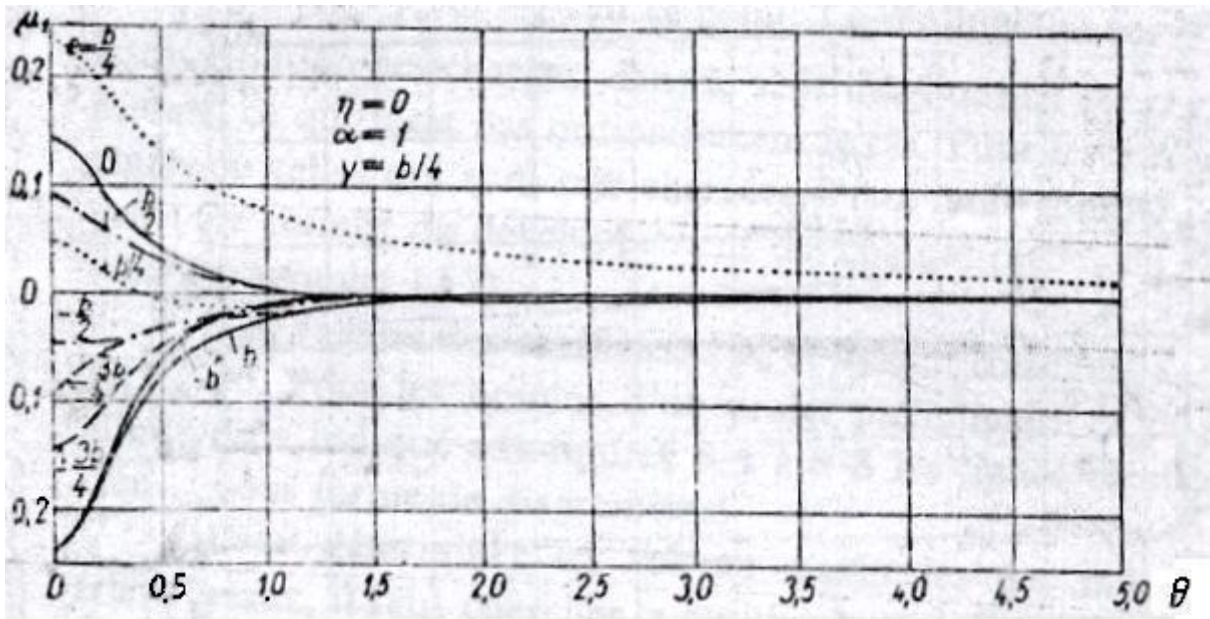


Fig. 21 Exemple : Représentation de ν_1 en fonction de θ , pour $y = b/4$.

e y		$\mu \cdot 10^4$									
		-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b	
Tableau II/5											
$\theta = 0,50$											
$\mu_0 \cdot 10^4$											
0	-2040,37	-1053,37	-43,93	+1031,31	+2216,50	+1031,31	+2216,50	+1031,31	-43,93	-1053,37	2040,37
b/4	-1374,64	-797,16	-204,05	+436,52	+1161,01	+1995,20	+1161,01	+1995,20	+437,28	-1048,52	2508,21
b/2	-706,83	-442,18	-169,29	+129,15	+474,39	+881,38	+474,39	+881,38	+1365,00	-596,33	2534,62
3b/4	-200,06	-132,12	-61,80	+15,99	+107,81	+219,77	+107,81	+219,77	+355,34	+512,67	1818,14
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_1 \cdot 10^4$											
0	-730,46	-482,42	-147,00	+400,82	+1355,96	+400,82	+1355,96	+400,82	-147,00	-482,42	730,46
b/4	-603,93	-489,95	-332,01	-61,65	+432,79	+1334,49	+432,79	+1334,49	+313,28	-329,20	810,67
b/2	-448,19	-407,32	-347,40	-234,38	9,13	+428,22	9,13	+428,22	+1246,07	+82,57	795,12
3b/4	-256,51	-249,96	-237,73	-206,78	-133,44	+21,59	-133,44	+21,59	+349,92	+954,51	584,70
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tableau II/6											
$\theta = 0,60$											
$\mu_0 \cdot 10^4$											
0	-1689,63	-902,76	-76,96	+863,93	+1998,94	+863,93	+1998,94	+863,93	-76,96	-902,76	1689,63
b/4	-1086,58	-667,68	-222,69	+307,76	+973,34	+1837,59	+973,34	+1837,59	+395,49	-916,42	2181,16
b/2	-535,55	-362,57	-176,30	+52,08	+359,80	+780,81	+359,80	+780,81	+1330,43	-514,59	2315,19
3b/4	-146,09	-106,43	-63,05	-7,62	+71,19	+184,92	+71,19	+184,92	+341,30	+538,58	1741,12
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_1 \cdot 10^4$											
0	-525,16	-379,21	-152,18	+290,92	+1190,61	+290,92	+1190,61	+290,92	-152,18	-379,21	525,16
b/4	-408,08	-359,73	-277,57	-95,74	+310,87	+1173,99	+310,87	+1173,99	+227,79	-285,28	626,21
b/2	-289,55	-285,32	-270,58	-216,67	+63,35	+305,67	+63,35	+305,67	+1107,50	+51,26	664,29
3b/4	-162,24	-171,20	-179,34	-177,42	-142,43	-27,35	-142,43	-27,35	+258,39	+883,95	529,16
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 2 Exemple : Valeurs de ν_0 et ν_1 correspondants à $\theta = 0.5$ et $\theta = 0.60$

Pour déterminer les réactions P_i ou P_q mentionnés dans l'équation 42, on trace la ligne d'influence de la réactions R_E de cette entretoise selon l'axe longitudinal (ox), ensuite cette ligne d'influence sera chargée par les convois envisagés, on obtiendra ainsi

$$P_i \text{ (ou } P_q) = R_E \quad (51)$$

La ligne d'influence de la réaction R_E de l'entretoise est représentée dans la figure 17 où l'on peut distinguer 3 cas (a, b ou c) selon la position de cette entretoise dans la travée du pont.

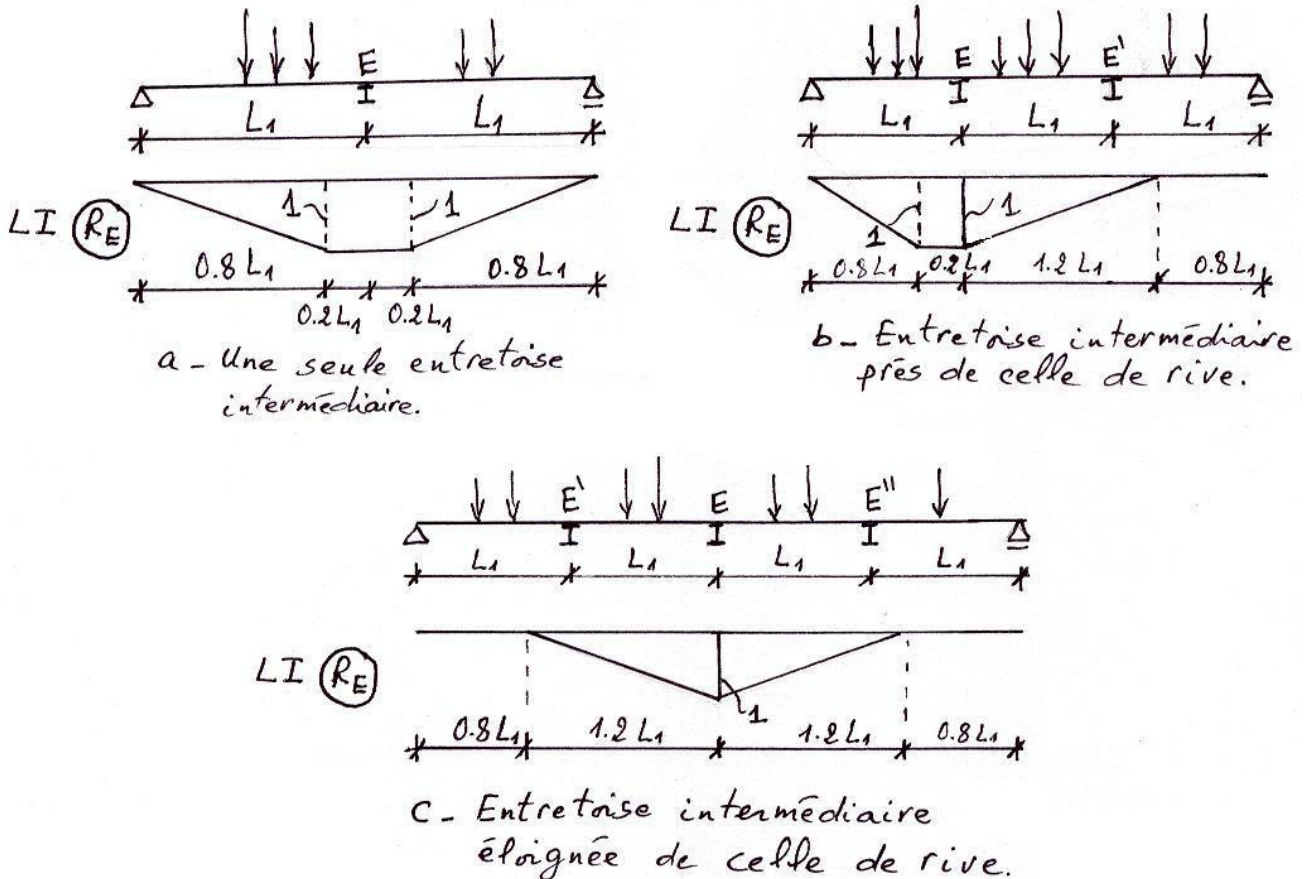


Fig. 22 Lignes d'influence de réaction d'une entretoise intermédiaire.

Remarque

Le moment fléchissant au niveau des entretoises d'about est nul, cela se confirme par la relation (42) qui s'annule pour $x = 0$ et $x = L$ (les abouts). Leur rôle est de solidariser les poutres au niveau des appuis pour minimiser leurs déversement et torsion. Cependant l'entretoise d'about peut être calculée au vérinage du tablier lors d'un changement d'appareils d'appuis, l'entretoise sera calculée comme étant une poutre à plusieurs appuis (vérins) est supportant la moitié du poids propre du tablier.

Parfois la réalisation des entretoises va compliquer la réalisation du tablier, dans ces condition c'est l'hourdis qui va assurer l'entretoisement, il sera calculé comme une poutre rectangulaire de largeur égale à 1m et de hauteur $h = h$ (hourdis).

Exercice 2 (suite de l'exo 1)

En utilisant les données de l'exercice 1 :

- 1- Tracer les lignes d'influence v_α pour l'entretoise intermédiaire dans les sections transversales D'abscisses $y = 0$ et $y = 3b/4$.

2-Calculer les moments fléchissants ; maximal et minimal au milieu de l'entretoise ($y = 0$), dus au système B_c .

Données : $b_c = 1.1$; $\delta_{B_c} = 1.236$

Solution

1- Traçage des diagrammes de v_α :

Sachant que $\theta = 0.524$, les valeurs μ_0 et μ_1 sont interpolées entre les valeurs correspondantes à $\theta = 0.5$ et $\theta = 0.6$, ce qui donne

$\theta = 0.524 \rightarrow \mu_0 \times 10^4$

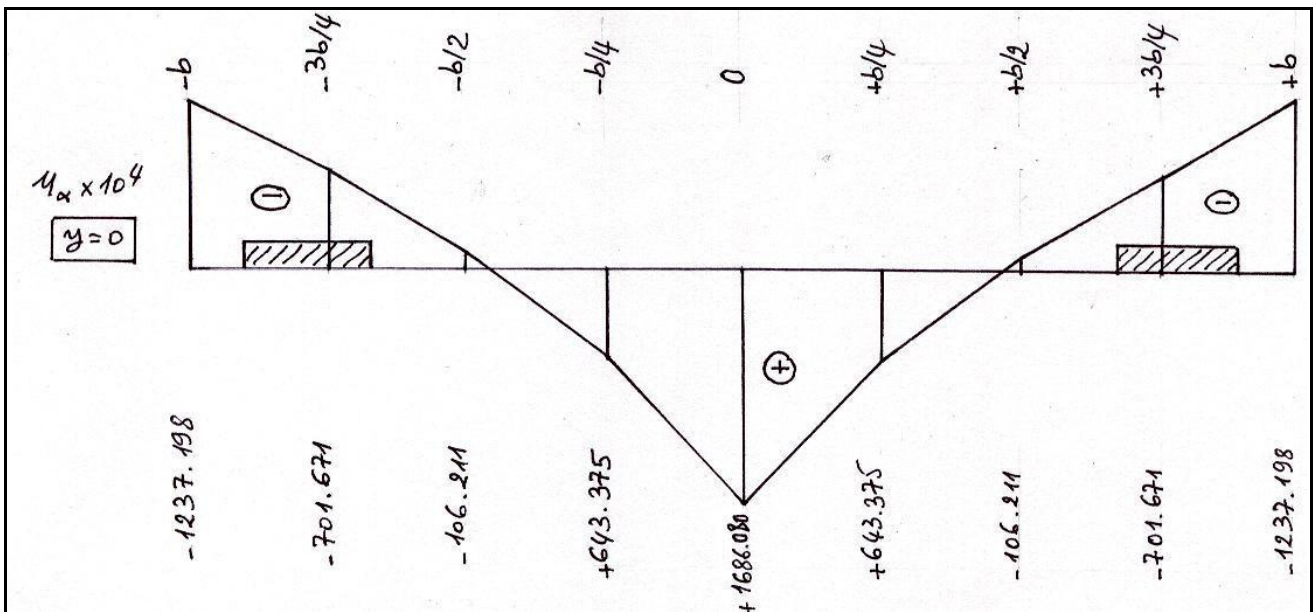
y \ e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y = 0	-1956.192	-1017.224	-51.857	991.139	2164.286	991.139	-51.875	-1017.224	-1956.192
y = 3b/4	-87.107	-125.954	-62.100	10.324	99.021	221.406	351.970	518.888	-1799.655

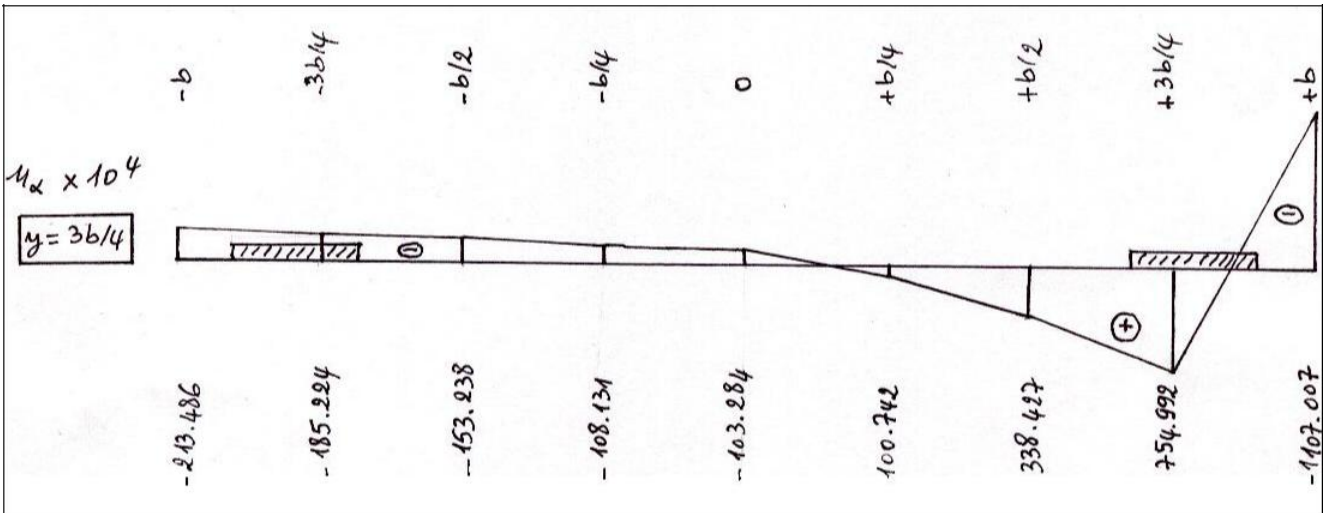
$\theta = 0.524 \rightarrow \mu_1 \times 10^4$

y \ e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y = 0	-681.188	-457.650	-148.643	374.444	1816.276	374.444	-148.643	-457.650	-681.188
y = 3b/4	-233.885	-231.058	-233.716	-199.734	-35.598	15.164	327.953	937.576	-571.370

$\theta = 0.524 \rightarrow v_\alpha = v_0 + (v_1 - v_0) \cdot \sqrt{\alpha} \times 10^4$

y \ e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y = 0	-1237.198	-701.671	-106.221	643.375	1686.080	643.375	-106.221	-701.671	-1237.198
y = 3b/4	-213.486	-185.224	-153.238	-108.131	-103.284	100.742	338.427	754.992	-1107.007





2- Calcul de M_{max} du au système B_c dans l'entretoise à l'abscisse ($y = 0$) :

$$M_y = b \sin \frac{\pi x}{L} \cdot \sum P_i \cdot v_{\alpha i}$$

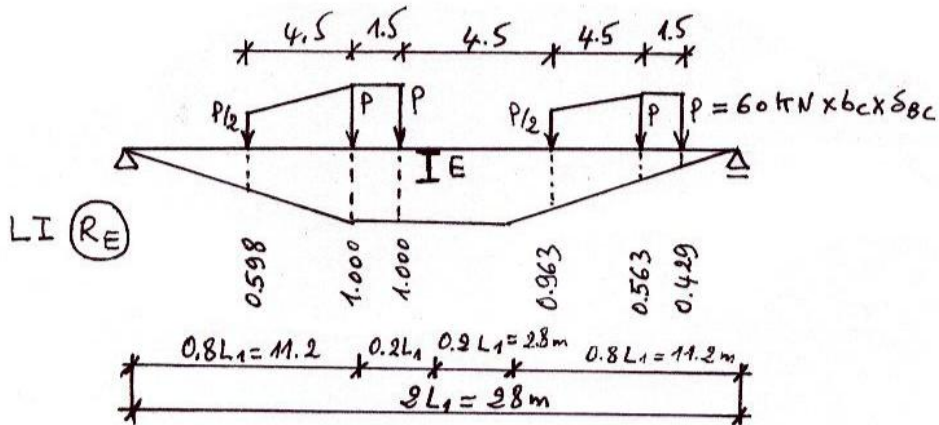
$$x = 14 \text{ m} \Rightarrow \sin \frac{\pi \times 14}{28} = 1 ; b = 5.6 \text{ m}$$

$P_i = R_E$, où R_E est la réaction maximale de l'entretoise intermédiaire due à une file de roues B_c .

Position 1 :

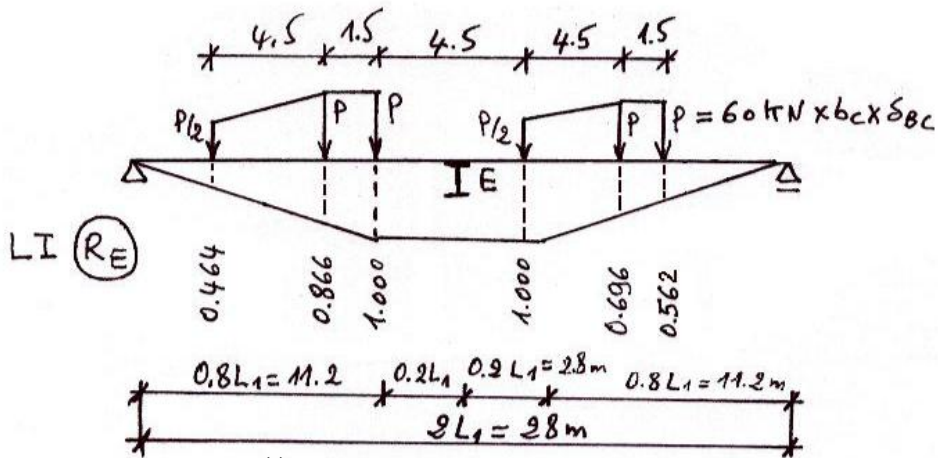
$$R_E^{(1)} = P \times b \times \delta$$

$$= \left(\frac{0.598}{2} + \frac{0.964}{2} + 0.563 + 0.429 \right) \times 3.773$$



Position 2 : $R_E^{(2)} = P \times b \times \delta$

$$= \frac{0.464}{2} + \frac{0.866 + 1.000}{2} + \frac{1}{2} + \frac{0.696 + 0.562}{2} = 3.856$$

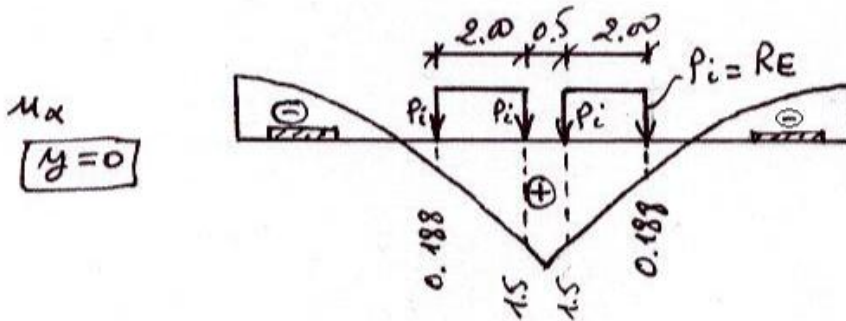


On a $3.856 > 3.773 \Rightarrow P = R_E^{(2)} = P \times b \times \delta \times 3.856$

$$P = R_E^{(2)} = 60 \times 1.1 \times 1.236 \times 3.856 \Rightarrow P = R_E^{(2)} = 314.560 \text{ KN}$$

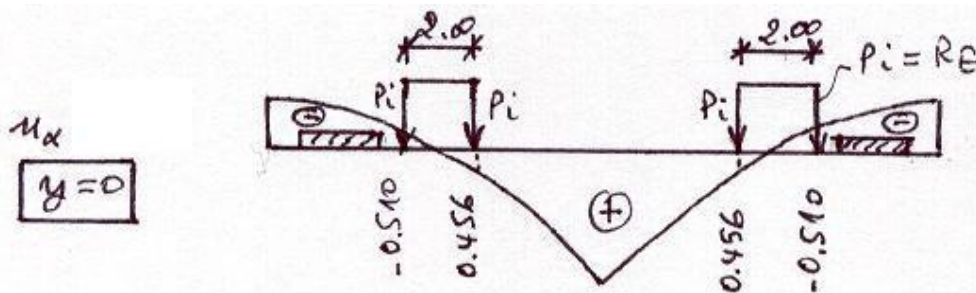
2- a $M_y^{\max} : M_y^{\max} = 5.6 \times 1 \times P_i \sum_{i=1}^4 v_{\alpha i}$

$$M_y^{\max} = 5.6 \times 1 \times 314.560 \times (0.188 + 1.5 + 1.5 + 0.188) \Rightarrow M_y^{\max} = 5946.940 \text{ KN} \cdot \text{m}$$



2- b $M_y^{\min} : M_y^{\min} = 5.6 \times 1 \times P_i \sum_{i=1}^4 v_{\alpha i}$

$$M_y^{\min} = 5.6 \times 1 \times 314.560 \times (-0.510 + 0.456 + 0.456 - 0.510) \Rightarrow M_y^{\min} = -190.246 \text{ KN} \cdot \text{m}$$



c- Torsion du tablier

Les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} sont calculés sur une longueur 1 ml selon respectivement la longueur et la largeur du tablier.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Charges concentrées : } M_{xy} - M_{yx} = 2b \cos \frac{\pi x}{L} \cdot \sum P_i \cdot \tau_\alpha(y, e_i) \\ \text{Charges réparties : } M_{xy} - M_{yx} = 2b \cos \frac{\pi x}{L} \cdot P_q \cdot S_\tau \end{array} \right\} \quad (52)$$

Où b est la demi largeur utile de l'ouvrage.

L est la portée du pont.

P_i sont les différentes réactions sur une bande transversale du tablier de largeur 1 ml dues aux charges concentrées appliquées sur cette zone. Chacune de ces réactions P_i est excentrée d'une valeur e_i par rapport à l'axe longitudinal (ox).

P_q est la réaction sur 1 m^2 de la bande transversale du tablier de largeur 1 ml , due à une charge q uniformément répartie.

τ_α est le coefficient de répartition transversale des réactions P_i . Le τ_α dépend de l'abscisse y de la section transversale choisie dans l'entretoise, de l'excentricité e_i de la réaction unitaire ($P_i = 1$), et du coefficient α ; paramètre de torsion.

S_τ est l'aire comprise entre le diagramme de τ_α et l'axe horizontal de référence sur la longueur d'application de la charge répartie.

Le coefficient τ_α est calculé par

$$\tau_\alpha = \tau_1 \sqrt{\alpha} \quad (53)$$

Où τ_1 sont tirées à partir de tableaux en fonction du paramètre d'entretoisement θ , ou par l'expression analytique

$$\tau_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{sh^2 \sigma} \cdot \left\{ (\sigma ch \sigma sh \theta \chi - \theta \chi sh \sigma ch \theta \chi) + \frac{1}{(3 sh \sigma \cdot ch \sigma - \sigma)} \left\{ [(\sigma ch \sigma - 2 sh \sigma) sh \theta \beta - \theta \beta sh \sigma sh \theta \beta] \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{(3 sh \sigma \cdot ch \sigma + \sigma)} \left\{ [(sh \sigma + \sigma sh \sigma) ch \theta \beta - \theta \beta sh \sigma sh \theta \beta] \cdot [(2 sh \sigma + \sigma sh \sigma) \cdot sh \theta \beta - \theta \beta sh \sigma ch \theta \beta] \right\} \right\} \quad (54)$$

Où les paramètres σ , β , ψ , et χ déjà mentionnés dans les équations (36-39) et (47-50) sont reportés avec leurs expressions

$$\sigma = \pi \theta \quad (55)$$

$$\beta = \frac{\pi y}{b} \quad (56)$$

$$\psi = \frac{\pi e}{b} \quad (57)$$

$$\chi = \pi - |\beta - \psi| \quad (58)$$

$\frac{e}{y}$	$-b$	$-3b/4$	$-b/2$	$-b/4$	0	$b/4$	$b/2$	$3b/4$	b
Tableau III/5									
$\theta = 0,50$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b/4$	-0,165204	-0,149695	-0,127024	-0,084470	0	0,084470	0,127024	0,149695	0,165204
$b/2$	-0,123879	-0,119142	-0,111174	-0,093078	-0,052077	0,034032	0,123709	0,175701	0,213065
$3b/4$	-0,091282	-0,091077	-0,089511	-0,082760	-0,063195	-0,017165	0,078793	0,185051	0,263281
b	-0,069310	-0,070405	-0,070856	-0,068236	-0,057435	-0,029116	0,032926	0,156147	0,307206
	-0,060952	-0,062120	-0,062785	-0,060893	-0,052059	-0,028245	0,024541	0,130026	0,327806
Tableau III/6									
$\theta = 0,60$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b/4$	-0,139062	-0,133810	-0,122063	-0,088122	0	0,088122	0,122063	0,133810	0,139062
$b/2$	-0,097586	-0,100440	-0,101669	-0,094182	-0,061741	0,028030	0,121283	0,164516	0,190451
$3b/4$	-0,066589	-0,071488	-0,076602	-0,078863	-0,069993	-0,032643	0,057003	0,177424	0,248550
b	-0,046389	-0,050896	-0,056045	-0,060354	-0,059096	-0,041937	0,011675	0,140930	0,303453
	-0,038778	-0,042731	-0,047303	-0,051367	-0,051146	-0,038238	0,003849	0,107186	0,331085
Tableau III/7									
$\theta = 0,70$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b/4$	-0,114689	-0,117434	-0,115460	-0,090727	0	0,090727	0,115460	0,117434	0,114689
$b/2$	-0,075335	-0,082985	-0,091118	-0,093125	-0,069852	0,022478	0,118299	0,152052	0,167193
$3b/4$	-0,047721	-0,055051	-0,064209	-0,073236	-0,073926	-0,045866	0,056278	0,169313	0,231393
b	-0,030477	-0,036046	-0,043326	-0,051862	-0,057816	-0,050766	-0,006677	0,126327	0,297021
	-0,024077	-0,028630	-0,034628	-0,041849	-0,047503	-0,043807	-0,012620	0,085449	0,332465
Tableau III/8									
$\theta = 0,80$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b/4$	-0,093087	-0,101584	-0,107916	-0,092490	0	0,092490	0,107916	0,101584	0,093087
$b/2$	-0,057187	-0,067423	-0,080361	-0,090451	-0,076444	0,017620	0,115105	0,139230	0,144846
$3b/4$	-0,033690	-0,041720	-0,052950	-0,066697	-0,075519	-0,056857	0,046841	0,161328	0,213368
b	-0,019740	-0,025127	-0,032939	-0,043655	-0,054649	-0,056253	-0,022042	0,112968	0,289131
	-0,014666	-0,018788	-0,024806	-0,033233	-0,042417	-0,045795	-0,025007	0,065642	0,333011

Tab. 3 Exemple : τ_1 correspondants à $\theta = 0.5 ; 0.6 ; 0.7$ et 0.80

En utilisant l'expression de la différence $(M_{xy} - M_{yx})$ définie par la relation 52, les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} sont calculés par

$$\begin{cases} M_{xy} = \frac{\gamma_p}{\gamma_p + \gamma_E} (M_{xy} - M_{yx}) \\ M_{yx} = M_{xy} - (M_{xy} - M_{yx}) \end{cases} \quad (59)$$

Exercice 3 (suite de l'exo 1)

En utilisant les données de l'exercice 1 :

- 1- Tracer les lignes d'influence τ_α pour les poutres d'abscisses $y = b/4$ et $y = 3b/4$.
- 2- Calculer les moments de torsion maximaux M_{xy} et M_{yx} dans la poutre intermédiaire ($y = b/4$), à l'abscisse $x=L/8$ dus aux systèmes B_c et S_t .

Données : $b_c = 1.1$; $\delta_{B_c} = 1.236$

Solution

1- Traçage des diagrammes de τ_α :

Du fait que $\theta = 0.524$, les valeurs τ_1 sont interpolées entre les valeurs correspondantes à $\theta = 0.5$ et $\theta = 0.6$, ce qui donne

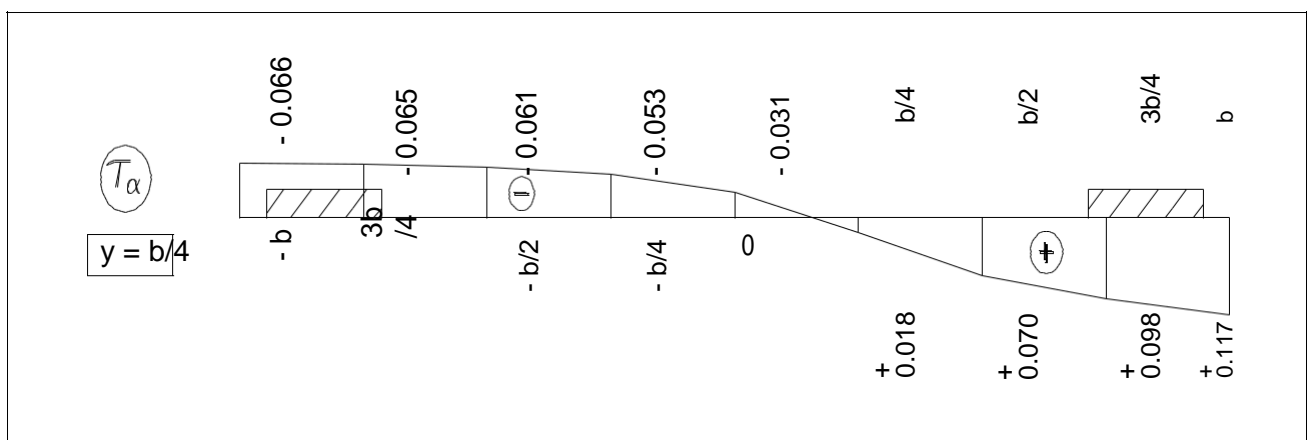
$\theta = 0.524 \rightarrow \tau_1$

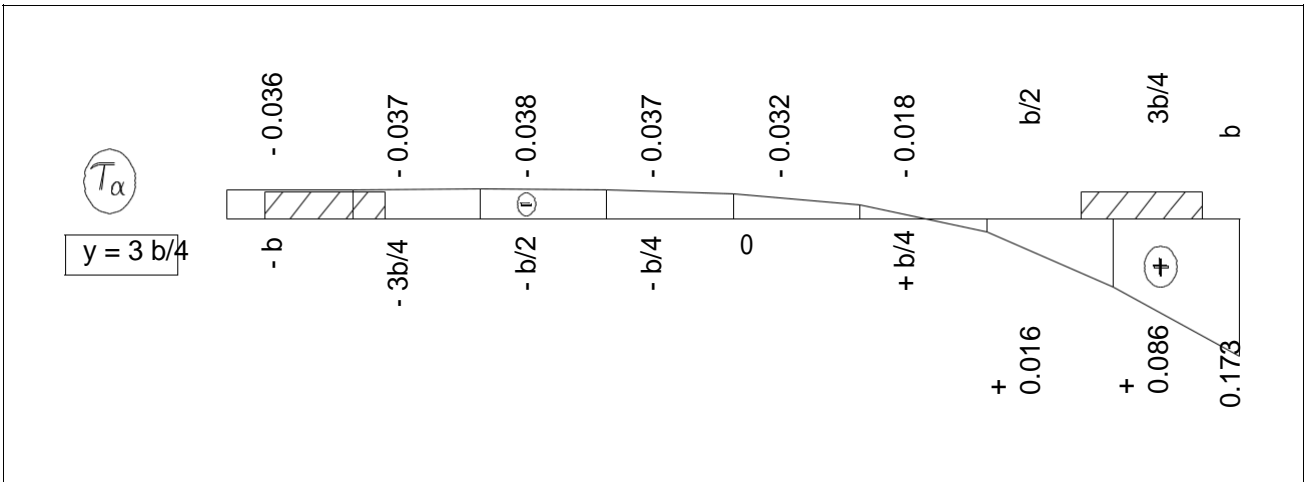
y \ e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y = b/4	-0,118	-0,114	-0,109	-0,093	-0,054	0,033	0,123	0,173	0,207
y = 3b/4	-0,063	-0,065	-0,067	-0,066	-0,057	-0,032	0,028	0,152	0,306

$\tau_\alpha = \tau_1 \sqrt{\alpha}$, avec $\alpha = 0.318$

$\theta = 0.524 \rightarrow \tau_\alpha$

y \ e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y = b/4	-0,066	-0,065	-0,061	-0,053	-0,031	0,018	0,070	0,098	0,117
y = 3b/4	-0,036	-0,037	-0,038	-0,037	-0,032	-0,018	0,016	0,086	0,173

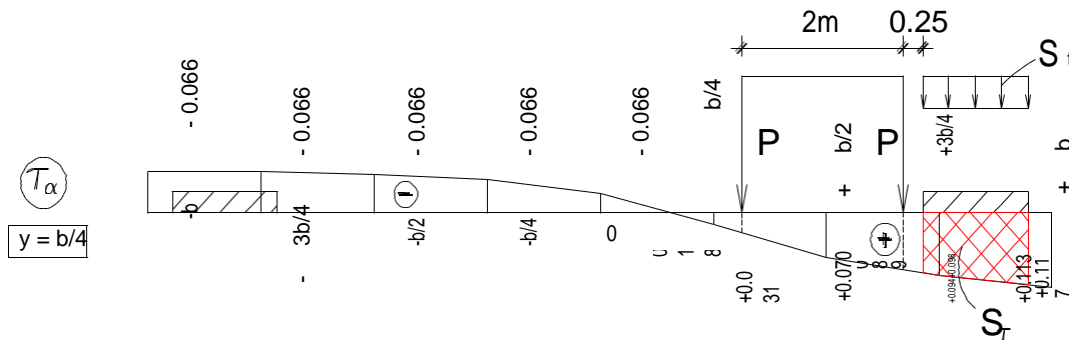




2- Calcul des moments de torsion dans la poutre (y=b/4) :

a- Charges excentrées à droite de la poutre (b/4)

On utilise un seul camion Bc, et le trottoir de droite est chargé.



Système Bc :

$$M_{xy} - M_{yx} = 2b \cos \frac{\pi x}{L} \cdot \sum_i P_i \cdot \tau_{\alpha i} \Rightarrow M_{xy} - M_{yx} = 2b \cdot \cos \frac{\pi x}{L} \cdot P_{Bc} \cdot \delta_{Bc} \cdot (\tau_{\alpha 1} + \tau_{\alpha 2})$$

$$M_{xy} - M_{yx} = 2 \times 5.6 \times \cos \frac{\pi L/8}{L} \times 60 \times 1.1 \times 1.236 \times (0.031 + .089) = 101.292 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{xy} = \frac{\gamma_p}{\gamma_p + \gamma_E} (M_{xy} - M_{yx})$$

$$M_{xy} = \frac{0.022143 E}{0.022143 E + 0.000917 E} \times 101.292 \Rightarrow M_{xy} = 97.264 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{yx} = M_{xy} - (M_{xy} - M_{yx})$$

$$M_{yx} = 97.264 - 101.292 \Rightarrow M_{yx} = -4.656 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

Surcharge du trottoir St :

$$M_{xy} - M_{yx} = 2b \cos \frac{\pi x}{L} \cdot P \cdot S_t \Rightarrow M_{xy} - M_{yx} = 2b \cos \frac{\pi x}{L} \cdot S_t \cdot S_t$$

$$M_{xy} - M_{yx} = 2 \times 5.6 \times \cos \frac{\pi L/8}{L} \times 1.5 \times 0.132 = 2.049 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{xy} = \frac{\gamma_p}{\gamma_p + \gamma_E} (M_{xy} - M_{yx})$$

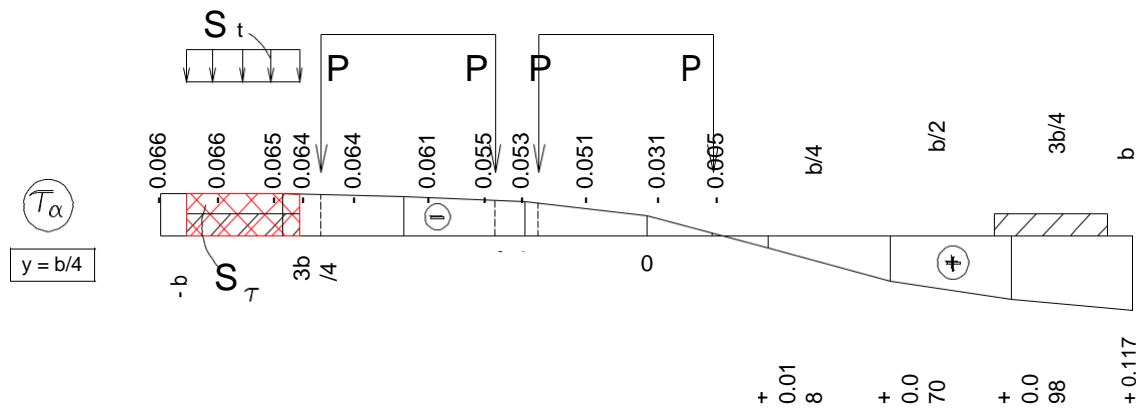
$$M_{xy} = \frac{0.022143 E}{0.022143 E + 0.000917 E} \times 2.049 \Rightarrow M_{xy} = 1.968 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{yx} = M_{xy} - (M_{xy} - M_{yx})$$

$$M_{yx} = 1.968 - 2.049 \Rightarrow M_{yx} = -0.081 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

b- Charges excentrées à gauche de la poutre (b/4)

On utilise deux camions Bc, et le trottoir de gauche sera chargé.



Système Bc :

$$M_{xy} - M_{yx} = 2b \cos \frac{\pi x}{L} \sum_i P_i \tau_{\alpha i} \Rightarrow M_{xy} - M_{yx} = 2b \cdot \cos \frac{\pi x}{L} \cdot P_{Bc} \delta_{Bc} \cdot (\tau_{\alpha 1} + \tau_{\alpha 2} + \tau_{\alpha 3} + \tau_{\alpha 4})$$

$$M_{xy} - M_{yx} = 2 \times 5.6 \times \cos \frac{\pi L/8}{L} \times 60 \times 1.1 \times 1.236 \times (-0.064 - 0.055 - 0.051 - 0.005) = -147.718 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{xy} = \frac{\gamma_p}{\gamma_p + \gamma_E} (M_{xy} - M_{yx})$$

$$M_{xy} = \frac{0.022143 E}{0.022143 E + 0.000917 E} \times (-147.718) \Rightarrow M_{xy} = -141.809 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{yx} = M_{xy} - (M_{xy} - M_{yx})$$

$$M_{yx} = -141.809 + 147.718 \Rightarrow M_{yx} = 5.909 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

Surcharge du trottoir St :

$$M_{xy} - M_{yx} = 2b \cos \frac{\pi x}{L} \cdot P \cdot S \Rightarrow M_{xy} - M_{yx} = 2b \cos \frac{\pi x}{L} \cdot S \cdot S$$

$$M_{xy} - M_{yx} = 2 \times 5.6 \times \cos \frac{\pi L/8}{L} \times 1.5 \times (-0.085) = -1.319 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{xy} = \frac{\gamma_p}{\gamma_p + \gamma_E} (M_{xy} - M_{yx})$$

$$M_{xy} = \frac{0.022143 E}{0.022143 E + 0.000917 E} \times (-1.319) \Rightarrow M_{xy} = -1.266 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{yx} = M_{xy} - (M_{xy} - M_{yx})$$

$$M_{y,x} = -1.266 + 1.319 \Rightarrow M_{y,x} = 0.053 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

Le moment de torsion maximal est calculé par

$$M_{x,y}(B_c) = \sup \left(\left| M_{xy}(B_c)_{droite} \right| ; \left| M_{xy}(B_c)_{gauche} \right| \right) \Rightarrow M_{x,y}(B_c) = 141.809 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{y,x}(B_c) = \sup \left(\left| M_{yx}(B_c)_{droite} \right| ; \left| M_{yx}(B_c)_{gauche} \right| \right) \Rightarrow M_{y,x}(B_c) = 5.909 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{x,y}(S_t) = \sup \left(\left| M_{xy}(S_t)_{droite} \right| ; \left| M_{xy}(S_t)_{gauche} \right| \right) \Rightarrow M_{x,y}(S_t) = 1.968 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

$$M_{y,x}(S_t) = \sup \left(\left| M_{yx}(S_t)_{droite} \right| ; \left| M_{yx}(S_t)_{gauche} \right| \right) \Rightarrow M_{y,x}(S_t) = 0.081 \text{ KN} \cdot \text{m} / \text{ml}$$

N.B : La méthode de Guyon-Massonnet est l'une des méthodes les plus utilisées dans le calcul des tabliers en béton avec entretoisement de rigidité finie tels les ponts à poutres sous chaussée, de même pour les ponts-dalles où la dalle est isotropes ($\alpha = 1$) ; on travaillera ainsi sur les coefficients K_1 dans la flexion longitudinale et μ_1 dans la flexion transversale.

3 METHODE DE COURBON

3-1 Aperçu général de la méthode

Cette méthode dite des entretoises rigides est due à J. Courbon (calcul des ponts à poutres multiples solidarisiées par des entretoises, Annales des Ponts et Chaussées, novembre-décembre 1940). Dans les calculs on suppose que les déformations des entretoises sont négligeables vis-à-vis des déformations des poutres, c'est-à-dire que les entretoises présentent une rigidité infinie.

En pratique, l'hypothèse de l'entretoisement rigide est vérifiée si les trois conditions suivantes sont remplies :

- La largeur du pont est nettement inférieure à sa longueur (leur rapport inférieur à 1/2).
- Les entretoises sont espacées d'une distance maximale égales à la largeur du pont.
- Pour réaliser des entretoises rigides, on doit avoir :
 - Dans les ponts en béton ; des entretoises dont la hauteur est du même ordre que celles des poutres.
 - Dans les ponts métalliques ou mixtes ; des entretoises en PRS renforcées ou en treillis, ces dernières présentent une grande rigidité par rapport aux sections à âme pleine.

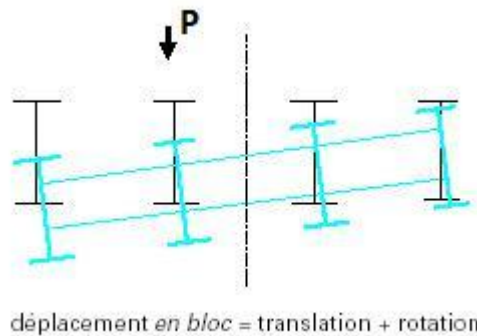


Fig. 23 Répartition des charges entre les poutres par une entretoise rigide

3-2 Répartition des charges entre les poutres

3-2-1 Cas général

Supposons que le tablier reçoit dans le plan de l'entretoise une charge concentrée P d'excentricité e (fig. 24). Ecrivons les équations d'équilibre de l'entretoise

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_z = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n R_j = P \quad (51) \\ \sum M^t / o = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n R_j \cdot y_j = P \cdot e \quad (52) \end{array} \right. \quad (60)$$

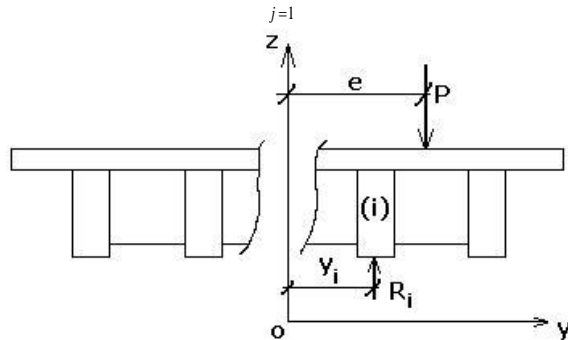


Fig. 24 Bilan des forces sur une entretoise

Sous la charge P d'excentricité e l'entretoise supposée infiniment rigide subit une déformée linéaire (fig. 25). Sa flèche peut s'écrire sous la forme

$$f_i = \alpha y_i + \beta \quad (61)$$

Où α et β sont des constantes réelles.

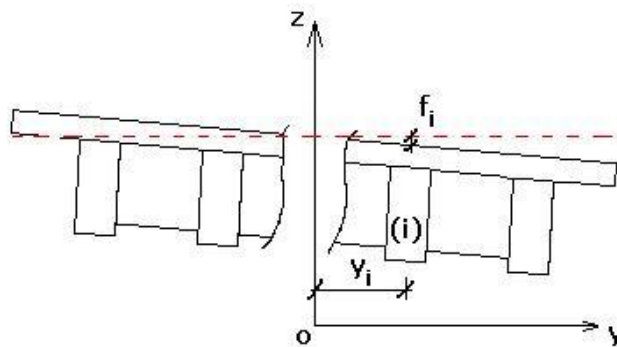


Fig. 25 Déformation rigide du tablier transversalement

La flèche f_i est proportionnelle à la charge R_i reprise par la poutre (i) , et inversement proportionnelle à son inertie I_i . On peut écrire

$$f_i = k \frac{R_i}{I_i} \quad (62)$$

Où k est une constante réelle

En remplaçant l'équation (62) dans (61), il vient : $k \frac{R_i}{I_i} = \alpha y_i + \beta$

Ou bien

$$R_i = I_i \begin{bmatrix} \alpha y_i + \beta \\ k \quad k \end{bmatrix} \quad (63)$$

En posant les constantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a} \\ |a = \\ \beta \end{array} \right. \quad (64)$$

On aura

$$R_i = I_i [a y_i + b] \quad (65)$$

En remplaçant l'équation (65) dans les équations d'équilibre (60), il en résulte

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n I_j = \sum_{j=1}^n I_j [a y_j + b] = P \\ \text{et} \\ \sum_{j=1}^n I_j y_j = \sum_{j=1}^n [a y_j + b] \cdot y_j = P \cdot e \end{array} \right\} \quad (66)$$

En développant la relation 66, on aura

$$\left. \begin{array}{l} a \sum_{j=1}^n I_j y_j + b \sum_{j=1}^n I_j = P \\ \text{et} \\ a \sum_{j=1}^n I_j y_j^2 + b \sum_{j=1}^n I_j y_j = P \cdot e \end{array} \right\} \quad (67)$$

En choisissant une position de l'origine O des axes qui coïncide avec le centre d'inertie, il vient

$$\sum_{j=1}^n I_j y_j = 0 \quad (68)$$

La relation (67) devient

$$\left. \begin{array}{l} b \sum_{j=1}^n I_j = P \\ \text{et} \\ a \sum_{j=1}^n I_j y_j^2 = P \cdot e \end{array} \right\} \quad (69)$$

Ainsi on obtient les constantes a et b

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{P \cdot e}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} \\ \text{et} \\ b = \frac{P}{\sum_{j=1}^n I_j} \end{array} \right\} \quad (70)$$

En remplaçant les expressions de a et b dans l'équation (65), on obtient

$$R_i = I_i \left[\frac{P \cdot e}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} y_i + \frac{P}{\sum_{j=1}^n I_j} \right] \quad (71)$$

Soit

$$R_i = \frac{P \cdot I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \left[1 + \frac{e \cdot \sum_{j=1}^n I_j}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} \cdot y_i \right] \quad (72)$$

En posant

$$\Delta_i = 1 + \frac{e \cdot \sum_{j=1}^n I_j}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} \cdot y_i \quad (73)$$

On obtient

$$R_i = \frac{P \cdot I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i \quad (74)$$

Remarques

- Si l'axe d'une poutre passe par le centre d'inertie, on aura

$$y_i = 0 \Rightarrow \Delta_i = 1 \Rightarrow R_i = \frac{P \cdot I_i}{\sum_{j=1}^n I_j}$$

- Si les charges sont disposées symétriquement par rapport au centre d'inertie, on aura

$$e = 0 \Rightarrow \Delta_i = 1 \Rightarrow R_i = \frac{P \cdot I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \quad \forall i$$

Exercice 1

Un pont en béton précontraint de 30 m de portée est constitué de 5 poutres principales traversées par des entretoises supposées infiniment rigides. On place une roue Br sur l'entretoise (fig. 26). Calculer la charge revenant à chaque poutre sachant que $\delta_{Br} = 1.120$.

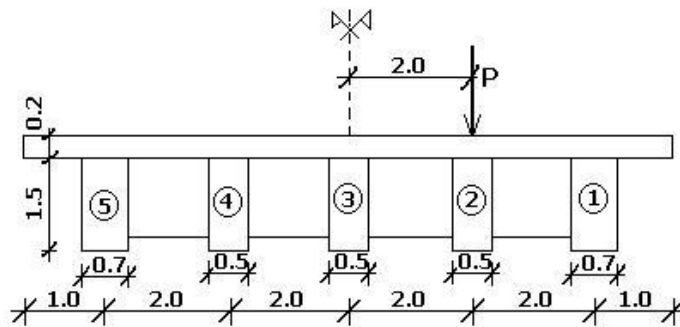


Fig. 26 Coupe transversale du tablier

Solution

$$P = B_r \times \delta_{B_r} = 100 \times 1.12 \Rightarrow \boxed{P = 112 \text{ KN}}$$

La largeur de la table de la poutre :

$$\frac{b-b_0}{2} \leq \inf \left\{ \begin{array}{l} \frac{L_p}{10} \\ d-b_0 \\ 6h \end{array} \right. \quad \frac{b-0.5}{2} \leq \inf \left\{ \begin{array}{l} \frac{30}{10} = 3 \\ \frac{2-0.5}{2} = 0.75 \\ 6 \times 0.2 = 1.2 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{b = 2.0 \text{ m}}$$

Poutre de rive :

$$y_G = \frac{0.7 \times 1.5 \times 0.75 + 2 \times 0.2 \times 1.6}{0.7 \times 1.5 + 2 \times 0.2} \Rightarrow \boxed{y_G = 0.984 \text{ m}}$$

$$I_P = \frac{0.7 \times (1.5)^3}{12} + 0.7 \times 1.5 \times (0.984 - 0.75)^2 + \frac{2 \times (0.2)^3}{12} + 2 \times 0.2 \times (1.6 - 0.984)^2$$

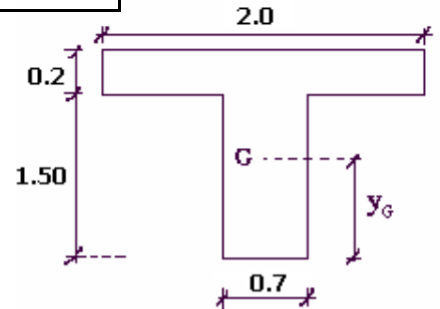
$$\boxed{I_P (\text{rive}) = 0.407 \text{ m}^4}$$

Poutre intermédiaire :

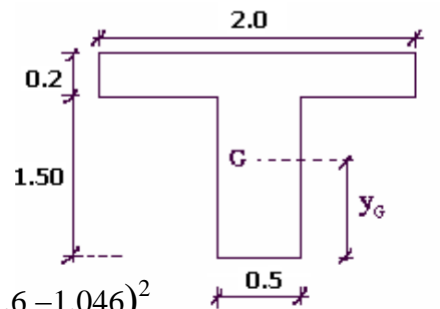
$$y_G = \frac{0.5 \times 1.5 \times 0.5 + 2 \times 0.2 \times 1.6}{0.5 \times 1.5 + 2 \times 0.2} \Rightarrow \boxed{y_G = 1.046 \text{ m}}$$

$$I_P = \frac{0.5 \times (1.5)^3}{12} + 0.5 \times 1.5 \times (1.046 - 0.75)^2 + \frac{2 \times (0.2)^3}{12} + 2 \times 0.2 \times (1.6 - 1.046)^2$$

$$\boxed{I_P (\text{int. intermédiaire}) = 0.330 \text{ m}^4}$$



Section transversale de la poutre de rive



Section transversale de la poutre intermédiaire

Charges revenant à chaque poutre : $R_i = \frac{P \cdot I_i \cdot \Delta_i}{\sum_{j=1}^n I_j}$ où : $\Delta_i = 1 + \frac{e \cdot \sum_{j=1}^n I_j}{\sum_{j=1}^n I_j \cdot y_j^2}$

Poutre 1 :

$$\Delta_1 = 1 + \frac{2 \times (2 \times 0.407 + 3 \times 0.330)}{(2 \times 0.407 \times 4^2 + 2 \times 0.330 \times 2^2)} \times 4 = 1 + \frac{2 \times 1.804}{15.664} \times 4 \Rightarrow \Delta_1 = 1.921$$

$$R_1 = 112 \times \frac{0.407}{1.804} \times 1.921 \Rightarrow \boxed{R_1 = 48.540 \text{ KN}}$$

Poutre 2 :

$$\Delta_2 = 1 + \frac{2 \times 1.804}{15.664} \times 2 \Rightarrow \Delta_2 = 1.461$$

$$R_2 = 112 \times \frac{0.330}{1.804} \times 1.461 \Rightarrow \boxed{R_2 = 29.933 \text{ KN}}$$

Poutre 3 :

$$\Delta_3 = 1$$

$$R_3 = 112 \times \frac{0.330}{1.804} \times 1 \Rightarrow R_3 = 20.488 \text{ KN}$$

Poutre 4 :

$$\Delta_4 = 1 + \frac{2 \times 1.804}{15.664} \times (-2) \Rightarrow \Delta_4 = 0.539$$

$$R_4 = 112 \times \frac{0.330}{1.804} \times 0.539 \Rightarrow R_4 = 11.043 \text{ KN}$$

Poutre 5 :

$$\Delta_5 = 1 + \frac{2 \times 1.804}{15.664} \times (-4) \Rightarrow \Delta_5 = 0.079$$

$$R_5 = 112 \times \frac{0.407}{1.804} \times 0.079 \Rightarrow R_5 = 1.996 \text{ KN}$$

On remarque bien que : $\sum_{i=1}^5 R_i = 112 \text{ KN}$

La part de chaque poutre est calculée par : $\frac{R_i}{\sum_{i=1}^5 R_i} \times 100$

Soit :

N° Poutre	1	2	3	4	5
% Charge	43.34	26.73	18.29	9.86	1.78

Tab. 4 Contribution en charges de chaque poutre

3-2-2 Cas des poutres identiques également espacées

Les (n) poutres espacées de (d) ont un moment d'inertie (I) et sont numérotées de droite à gauche (fig. 27).

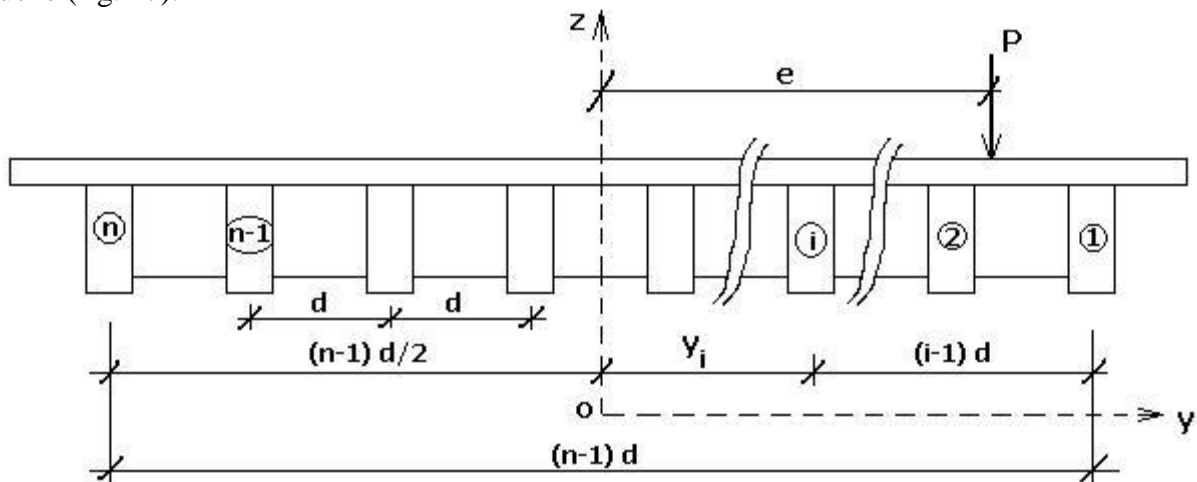


Fig. 27 Tablier à poutres identiques également espacées

Calculons l'expression

$$\frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} = \frac{I}{n I} = \frac{1}{n} \quad (75)$$

En remplaçant l'équation (75) dans (74), on aura

$$R_i = \frac{P}{n} \cdot \Delta_i \quad (76)$$

On a aussi :

$$\frac{\sum_{j=1}^n I_j}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} = \frac{n I}{I \sum_{j=1}^n y_j^2} = \frac{n}{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

Soit

$$\frac{\sum_{j=1}^n I_j}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} = \frac{n}{\sum_{j=1}^n y_j^2} \quad (77)$$

D'après la figure 27, on a

$$y_i = (n-1)\frac{d}{2} - (i-1)d \quad (78)$$

Ou bien

$$y_i = (n+1-2i)\frac{d}{2} \quad (79)$$

Il en résulte : $\sum_{j=1}^n y_j^2 = \sum_{j=1}^n (n+1-2j)^2 \frac{d^2}{4}$

Soit

$$\sum_{j=1}^n y_j^2 = \frac{d^2}{4} \left[\sum_{j=1}^n (n+1)^2 - 4(n+1)\sum_{j=1}^n j + 4\sum_{j=1}^n j^2 \right] \quad (80)$$

Les lois de sommation donnent

$$\sum_{j=1}^n (n+1)^2 = n(n+1)^2 \quad (81)$$

$$\sum_{j=1}^n j = n \frac{(n+1)}{2} \quad (82)$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (83)$$

En remplaçant les équations (81), (82) et (83) dans l'équation (80), il vient

$$\sum_{j=1}^n y_j^2 = \frac{d^2}{4} \left[n(n+1)^2 - 2n(n+1) \frac{(n+1)}{2} + 2n \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

Soit après simplification

$$\sum_{j=1}^n y_j^2 = \frac{d^2}{12} n(n+1)(n-1) \quad (84)$$

Ou bien

$$\sum_{j=1}^n y_j^2 = \frac{d^2}{12} n(n^2 - 1) \quad (85)$$

Et par la suite

$$\frac{\sum_{j=1}^n I_j}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} = \frac{n}{\sum_{j=1}^n y_j^2} = \frac{12}{d^2(n^2 - 1)} \quad (86)$$

En remplaçant les équations (79) et (86) dans (73), il résulte

$$\Delta_i = 1 + \frac{12e}{d^2(n^2 - 1)}(n+1 - 2i) \frac{d}{2}$$

Soit

$$\Delta_i = 1 + 6 \frac{(n+1 - 2i) \cdot e}{(n^2 - 1) d} \quad (87)$$

Et finalement, la charge revenant à chaque poutre s'écrit

$$\text{avec } \left. \begin{aligned} R_i &= \frac{P}{n} \cdot \Delta_i \\ \Delta_i &= 1 + 6 \frac{(n+1 - 2i) \cdot e}{(n^2 - 1) d} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Remarques

- La réaction maximale se produit dans la poutre de rive (i=1) située du même côté que la charge P par rapport à l'axe du pont, et pour laquelle on a le terme Δ_i maximal.
- Si le pont comporte un nombre impair de poutres, sur la poutre centrale :

$$y_i = 0 \Rightarrow \Delta_i = 1 \Rightarrow R_i = \frac{P}{n}$$

- Si les charges sont disposées symétriquement par rapport au centre d'inertie, on aura

$$e = 0 \Rightarrow \Delta_i = 1 \Rightarrow R_i = \frac{P}{n} \quad \forall i$$

Exercice 2

- 1- Tracer la ligne d'influence des réactions des poutres pour le tablier représenté dans la figure 28 dont l'entretoisement est supposé infiniment rigide.
- 2- Sachant que l'entraxe des entretoises est de 7m, calculer les réactions max et min de chaque poutre dues aux :
 - a- Système B_t avec $b_t = 1.0$, $\delta_{B_t} = 1.18$.
 - b- Surcharges du trottoir $S_t = 1.5 \text{ KN/m}^2$.

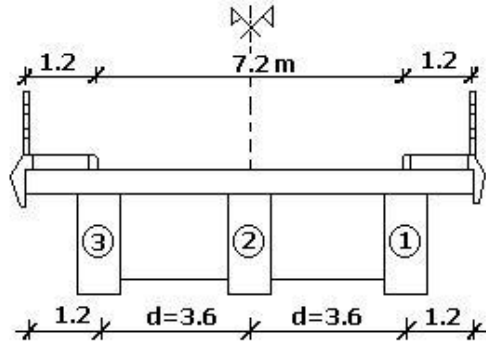
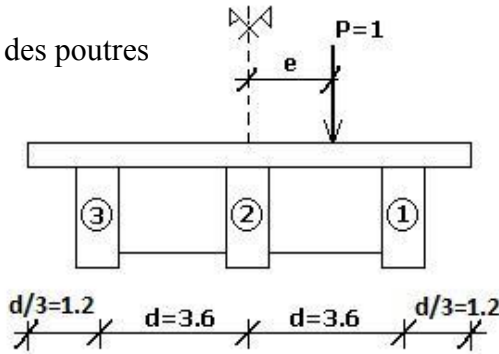


Fig. 28 Coupe transversale du tablier à 3 poutres

Solution

1- Lignes d'influence des réactions des poutres

$$\begin{cases} R = \frac{P}{n} \cdot \Delta_i \\ \Delta_i = 1 + 6 \frac{(n+1-2i) \cdot e}{(n^2-1) d} \end{cases}$$



Poutre 1 : $R = \frac{1}{3} \Delta_1$

avec $\Delta_1 = 1 + 6 \frac{(4-2) \cdot e}{(9-1) d} \Rightarrow \Delta_1 = 1 + \frac{3 \cdot e}{2 d}$

Soit $R_1 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3 \cdot e}{2 d} \right)$

$e = -4d/3 \rightarrow R_1 = -1/3$

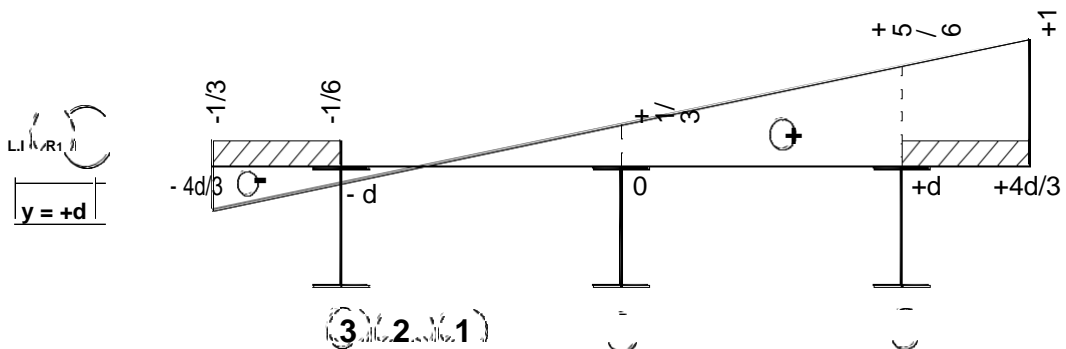
$e = -d \rightarrow R_1 = -1/6$

$e = 0 \rightarrow R_1 = +1/3$

$e = +d \rightarrow R_1 = +5/6$

$e = +4d/3 \rightarrow R_1 = +1$

$R_1 = 0 \rightarrow R_1 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3 \cdot e}{2 d} \right) = 0 \rightarrow e = -2d/3 = -2.4 \text{ m}$



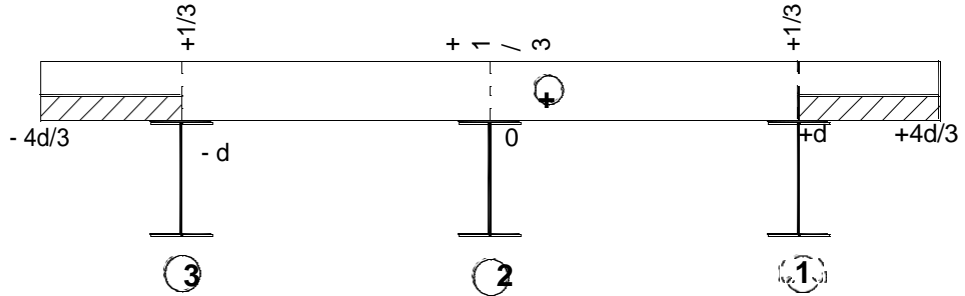
Poutre 2 : $R_2 = \frac{1}{3} \Delta_2$

avec $\Delta_2 = 1 + 6 \frac{(4-4) \cdot e}{(9-1) d} \Rightarrow \Delta_2 = 1$

Soit $R_2 = \frac{1}{3}$

L.I (R₂)

y = 0



Poutre 3 : $R_3 = \frac{1}{3} \Delta_3$

avec $\Delta_3 = 1 + 6 \frac{(4-6) \cdot e}{(9-1) d} \Rightarrow \Delta_3 = 1 - \frac{5e}{2d}$

Soit $R_3 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{5e}{2d} \right)$

e = -4d/3 → R₃ = +1

e = -d → R₃ = +5/6

e = 0 → R₃ = +1/3

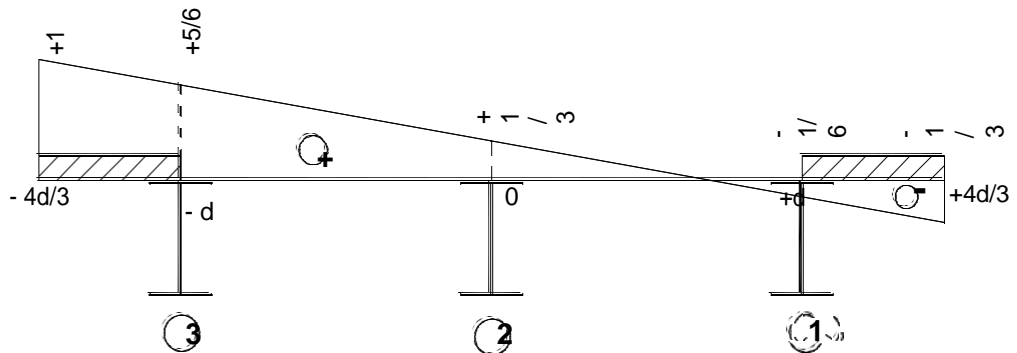
e = +d → R₃ = -1/6

e = +4d/3 → R₁ = -1/3

R₃ = 0 → $1 - \frac{3 \cdot e}{2d} = 0 \Rightarrow e = \frac{2d}{3} = 2.4 \text{ m}$

L.I (R₃)

y = -d



On remarque que L.I (R₃) est la symétrie de L.I (R₁) par rapport à l'axe du pont.

2- Calcul des réactions de chaque poutre dues aux charges B_t et S_t.

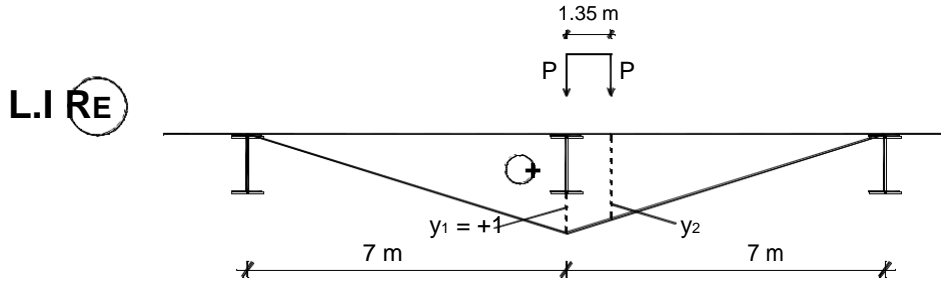
On opère de la manière suivante :

Etape 1 : Rechercher la position longitudinale du convoi qui donne la réaction max de l'entretoise en utilisant la ligne d'influence longitudinale de la réaction de l'entretoise.

Etape 2 : Rechercher la position transversale du convoi qui donne soit la réaction max soit min de chaque poutre. Pour cela on utilisera les lignes d'influence de réaction de chaque poutre.

a- Système B_t

Etape 1 : On calcule la réaction max de l'entretoise due à une file de roues du système B_t.



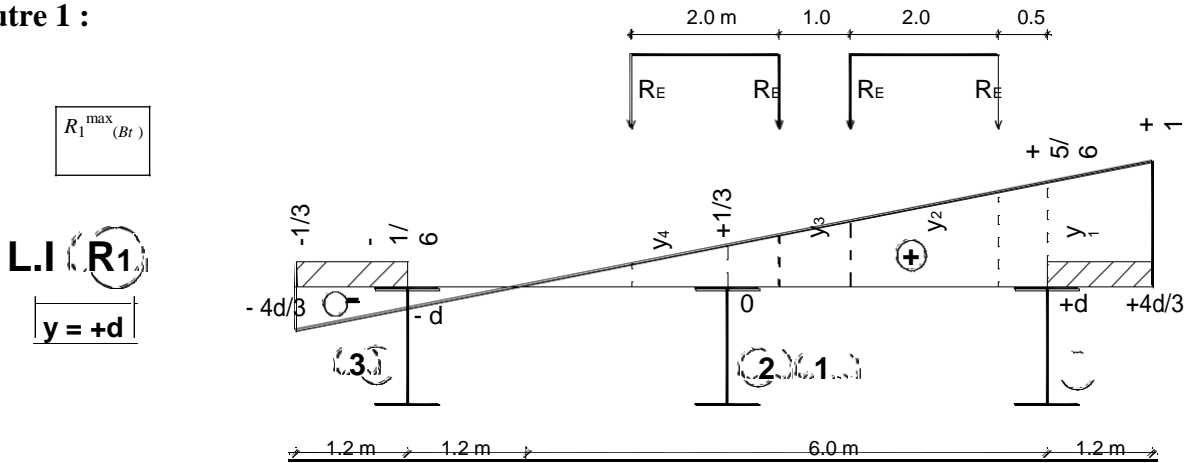
$$\frac{1}{7} = \frac{y_2}{(7 - 1.35)} \Rightarrow y_2 = 0.807$$

$$R_E = P \cdot b_t \cdot \delta_{B_t} \cdot (y_1 + y_2)$$

$$R_E = 80 \times 1.0 \times 1.18 \times (1 + 0.807) \Rightarrow R_E = 170.581 \text{ KN}$$

Etape 2 : On charge les lignes d'influence transversales des réactions des poutres par les réactions de l'entretoise R_E déjà calculées dans l'étape 1.

Poutre 1 :



$$R_1^{\max (B_t)}$$

$$L.I. (R_1)$$

$$y = +d$$

$$\frac{5 \times 1}{665.5} = \frac{y_1}{72} \Rightarrow y_1 = \frac{55}{72} ; \quad \frac{5}{36} = \frac{y_2}{3.5} \Rightarrow y_2 = \frac{35}{72}$$

$$\frac{5}{36} = \frac{y_3}{2.5} \Rightarrow y_3 = \frac{25}{72} ; \quad \frac{5}{36} = \frac{y_4}{0.5} \Rightarrow y_4 = \frac{5}{72}$$

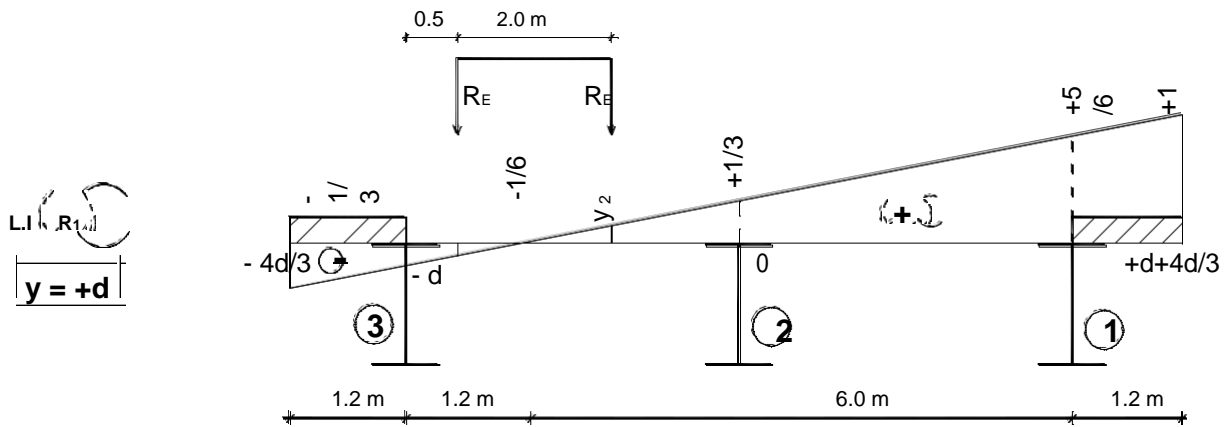
$$R_1^{\max} = \sum_{k=1}^4 R_k \cdot y_k \quad (A)$$

Où P_k = R_E

$$R_{1(B_t)}^{\max} = R_E \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$R_{1(B_t)}^{\max} = 170.581 \times \left(\frac{55}{72} + \frac{35}{72} + \frac{25}{72} + \frac{5}{72} \right) \Rightarrow R_{1(B_t)}^{\max} = 284.302 \text{ KN}$$

$R_{1(Bt)}^{\min}$: Puisque la zone négative est étroite, on n'utilisera qu'un seul tandem transversalement.



$$\frac{-1/6}{1.2} = \frac{y_1}{(1.2 - 0.5)} \Rightarrow y_1 = -0.097 \quad ; \quad \frac{5/6}{6} = \frac{y_2}{(2.5 - 1.2)} \Rightarrow y_2 = 0.181$$

$$R_{1(Bt)}^{\min} = R_E \cdot (y_1 + y_2)$$

$$R_{1(Bt)}^{\min} = 170.581 \times (-0.097 + 0.181) = 14.328 \text{ KN} > 0$$

Résultat : Pour obtenir $R_{1(Bt)}^{\min}$ il suffit de ne pas charger le pont par le système B_t , donc $R_{1(Bt)}^{\min} = 0$

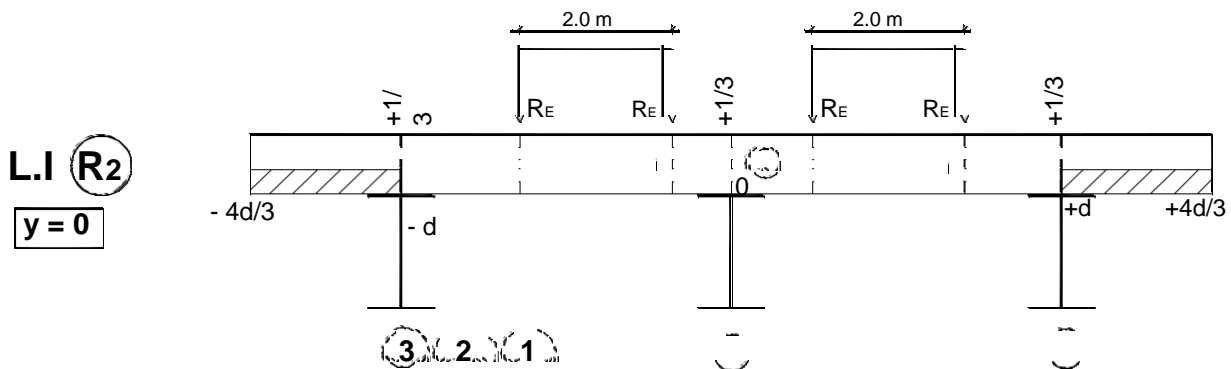
Poutre 2 :

$R_{2(Bt)}^{\max}$: Quelque soit la position transversale du convoi B_t , on a : $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1/3$

$$R_{2(Bt)}^{\max} = R_E \times 4 y$$

$$R_{2(Bt)}^{\max} = 170.581 \times 4 \times \frac{1}{3} \Rightarrow R_{2(Bt)}^{\max} = 227.441 \text{ KN}$$

$$R_{2(Bt)}^{\min} = 0$$

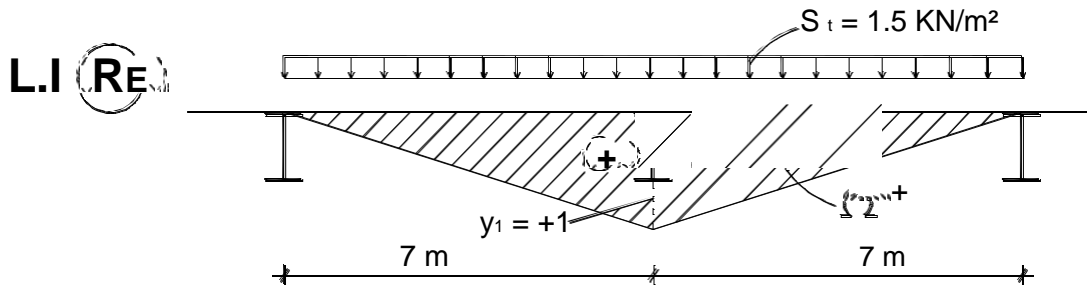


Poutre 3 : La ligne d'influence de R_3 est symétrique à celle de R_1 par rapport à l'axe oz . Donc

$$R_{3(Bt)}^{\max} = R_{1(Bt)}^{\max} = 284.302 \text{ KN} \quad ; \quad R_{3(Bt)}^{\min} = R_{1(Bt)}^{\min} = 0$$

b- Surcharges du trottoir S_t

Etape 1 : On calcule la réaction max de l'entretoise due à la surcharge S_t du trottoir appliquée sur une bande de largeur $l = 1m$.



$$\Omega^+ = \frac{1}{2} \times 14 \times 1 = 7$$

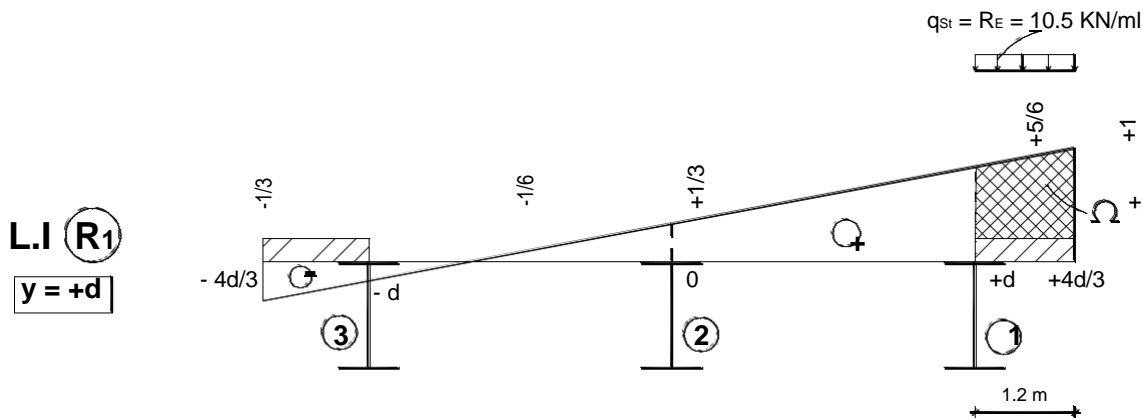
$$q_{St} = R_E = S_t \times \Omega^+$$

$$q_{St} = R_E = 1.5 \times 7 \Rightarrow \boxed{q_{St} = R_E = 10.5 \text{ KN/ml}}$$

Etape 2 : On charge les lignes d'influence transversales des réactions des poutres par les réactions de l'entretoise R_E calculées à l'étape 1.

Poutre 1 :

$R_1^{\max}_{(St)} \rightarrow$ On charge le trottoir de droite seulement.

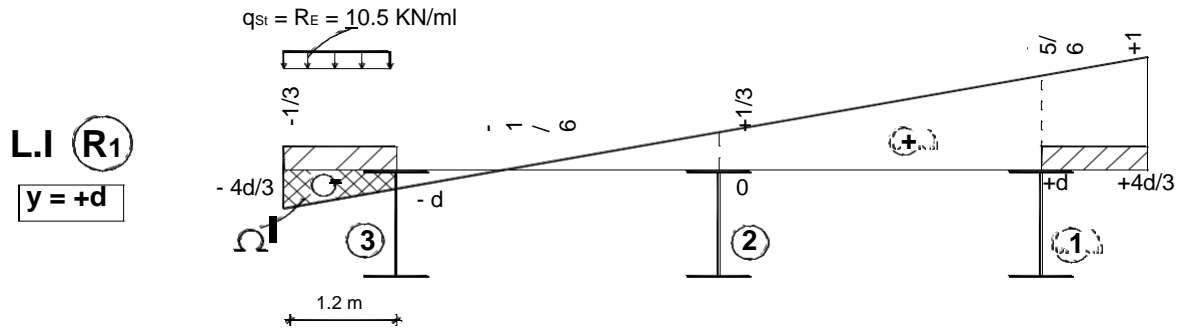


$$\Omega^+ = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{5}{6} \right) \times 1.2 = 1.1$$

$$R_1^{\max}_{(St)} = q_{St} \cdot \Omega^+ \quad (\text{B})$$

$$R_1^{\max}_{(St)} = 10.5 \times 1.1 \Rightarrow \boxed{R_1^{\max}_{(St)} = 11.55 \text{ KN}}$$

$R_1^{\min}_{(St)} \rightarrow$ On charge le trottoir de gauche seulement.



L.I (R1)
y = +d

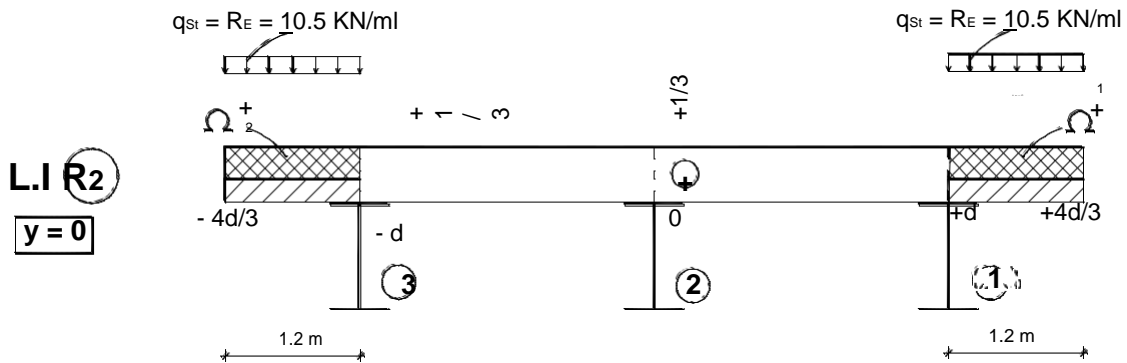
$$\Omega^- = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \times \frac{1}{2} \times 1.2 = -0.3$$

$$R_{1(Sr)}^{\min} = q_{St} \cdot \Omega^-$$

$$R_{1(Sr)}^{\min} = 10.5 \times (-0.3) \Rightarrow R_{1(Sr)}^{\min} = -3.15 \text{ KN}$$

Poutre 2 :

$R_{2(Sr)}^{\max} \rightarrow$ On charge les 2 trottoirs.



L.I (R2)
y = 0

$$\Omega_1^+ = \Omega_2^+ = 1.2 \times \frac{1}{3} = 0.4$$

$$R_{2(Sr)}^{\max} = q_{St} \cdot (\Omega_1^+ + \Omega_2^+)$$

$$R_{2(Sr)}^{\max} = 10.5 \times 2 \times 0.4 \Rightarrow R_{2(Sr)}^{\max} = 8.4 \text{ KN}$$

$$R_{2(Sr)}^{\min} = 0$$

Poutre 3 :

$R_{3(Sr)}^{\max} = 11.55 \text{ KN} \rightarrow$ En chargeant le trottoir de gauche.

$R_{3(Sr)}^{\min} = -3.15 \text{ KN} \rightarrow$ En chargeant le trottoir de droite.

Résultats

D'après l'exercice précédent, on peut calculer la réaction de la poutre (i) en utilisant la ligne d'influence de R_i .

Cas de charges concentrées (fig. 29-a) :

En égalisant les équations (A) et (74), on a : R_i

$$\text{Or } P = \sum_{k=1}^m P_k, \text{ d'où : } \sum_{k=1}^m P_k \cdot y_k = \left(\sum_{k=1}^m P_k \right) \cdot \frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i$$

Il en résulte

$$\frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i = \frac{\sum_{k=1}^m P_k \cdot y_k}{\left(\sum_{k=1}^m P_k \right)} \quad (89)$$

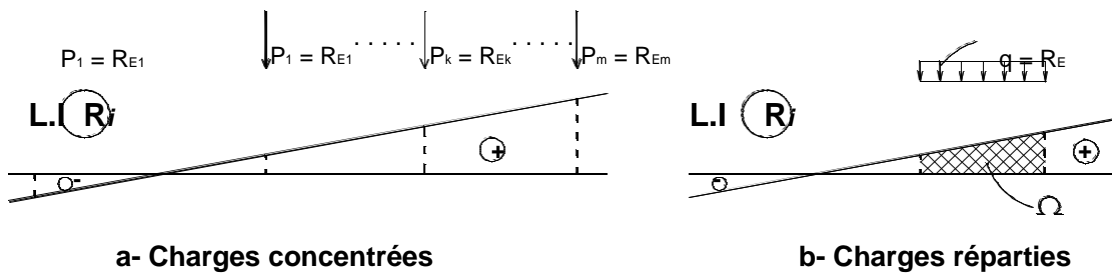


Fig. 29 Chargement de la ligne d'influence de R_i

Cas de charges réparties (fig. 29-b) :

$$\text{En égalisant les équations (B) et (74), on a : } R_i = q \cdot \Omega = P \cdot \frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i$$

$$\text{Or } P = q \cdot L_c, \text{ d'où : } R_i = q \cdot \Omega = q \cdot L_c \cdot \frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i$$

Et par la suite

$$\frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i = \frac{\Omega}{L_c} \quad (90)$$

3-3 Flexion des poutres

Les moments fléchissants sont proportionnels aux réactions R_i . Par conséquent, on peut écrire

$$\left. \begin{aligned} M_i(x) &= M(x) \cdot \frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i \\ \text{avec} \quad \Delta_i &= 1 + \frac{\sum_{j=1}^n I_j}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} \cdot e \cdot y_i \end{aligned} \right\} (91)$$

Où $M(x)$ est le moment fléchissant total du tablier.

$M_i(x)$ est le moment fléchissant dans la poutre (i).

En utilisant les lignes d'influence transversales des réactions R_i , et en substituant les équations (89) et (90) dans l'équation (91), il vient

$$\left. \begin{aligned} \text{Charges concentrées : } M_i(x) &= M(x) \cdot \frac{\sum_{k=1}^m r_k \cdot y_k}{\left(\sum_{k=1}^m P_k \right)} \\ \text{Charges réparties : } M_i(x) &= M(x) \cdot \frac{\Omega}{L_c} \end{aligned} \right\} (92)$$

Exercice 3

Un tablier de pont de portée $L= 40$ m est constitué de 4 poutres sous-chaussée liées transversalement par des entretoises infiniment rigides disposées tous les 8 m (fig. 30).

Calculer le moment fléchissant maximal de chaque poutre du au système Bc et la surcharge du trottoir St.

Données : $b_c = 1.1$, $\delta_{Bc} = 1.15$.

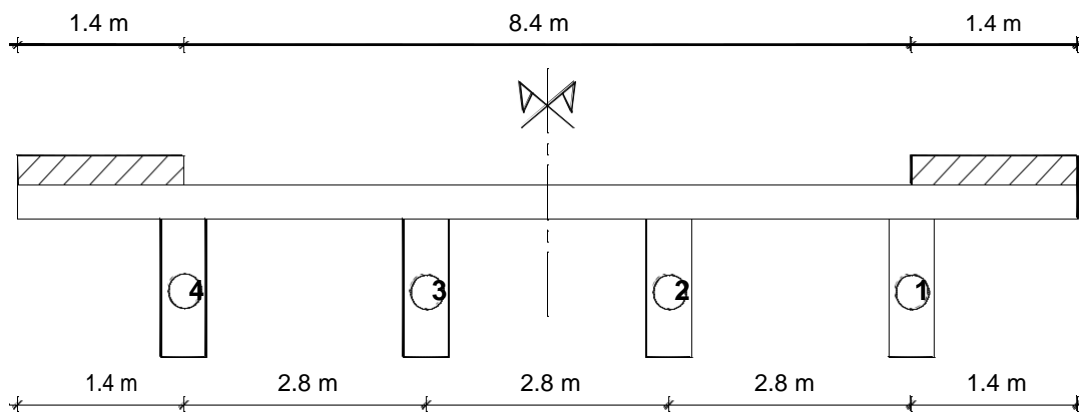


Fig. 30 Coupe transversale du tablier à 4 poutres

Solution

A- Traçons les lignes d'influence des réactions des poutres

$$\begin{cases} R = \frac{P}{n} \cdot \Delta \\ \Delta = 1 + 6 \frac{(n+1-2i)}{(n^2-1)} \cdot \frac{e}{d} \end{cases}$$

Poutre 1 : $y = 3d/2$

$$R_1 = \frac{1}{4} \Delta_1$$

avec $\Delta_1 = 1 + 6 \frac{(5-2)}{(16-1)} \cdot \frac{e}{d} \Rightarrow \Delta_1 = 1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{e}{d}$

Soit $R_1 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{e}{d} \right)$

$e = -2d \longrightarrow R_1 = -7/20$

$e = -3d/2 \longrightarrow R_1 = -1/5$

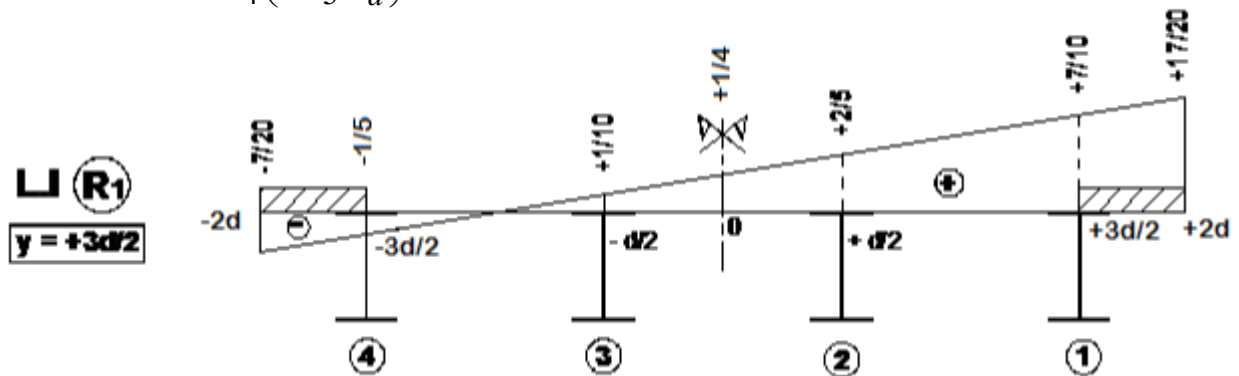
$e = -d/2 \longrightarrow R_1 = +1/10$

$e = +d/2 \longrightarrow R_1 = +2/5$

$e = +3d/2 \longrightarrow R_1 = +7/10$

$e = +2d \longrightarrow R_1 = +17/20$

$R_1 = 0 \longrightarrow \frac{1}{4} \left(1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{e}{d} \right) = 0 \longrightarrow e = -5d/6 = -7/3 = -2.33 \text{ m}$



Poutre 2 : $y = d/2$

$$R_2 = \frac{1}{4} \Delta_2$$

avec $\Delta_2 = 1 + 6 \frac{(5-4)}{(16-1)} \cdot \frac{e}{d} \Rightarrow \Delta_2 = 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{e}{d}$

Soit $R_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{e}{d} \right)$

$e = -2d \longrightarrow R_2 = +1/20$

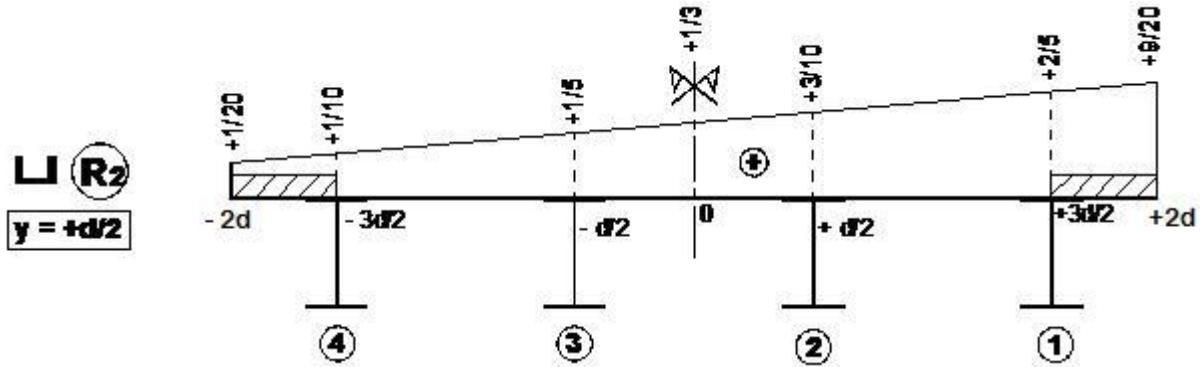
$e = -3d/2 \longrightarrow R_2 = +1/10$

$e = -d/2 \longrightarrow R_2 = +1/5$

$e = +d/2 \longrightarrow R_2 = +3/10$

$e = +3d/2 \longrightarrow R_2 = +2/5$

$e = +2d \longrightarrow R_2 = +9/20$



B- Calculons le moment fléchissant maximal du tablier :

Système Bc : En appliquant le théorème de Barrés, on obtient

$$M(x) = n \times b_c \times \delta_{Bc} \times P \left(1.25 l + \frac{14.878125}{l} - 13.125 \right)$$

$$M(x) = 2 \times 1.1 \times 1.15 \times 120 \times \left(1.25 \times 40 + \frac{14.878125}{40} - 13.125 \right) \Rightarrow \boxed{M(x) = 11308.175 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

Surcharge du trottoir St :

$$q_{St} = 2 \times S_t \times l_t$$

$$q_{St} = 2 \times 1.5 \times 1.4 \Rightarrow q_{St} = 4.2 \text{ KN} / \text{ml}$$

$$M(x) = q_{St} \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$M(x) = 4.2 \times \frac{(40)^2}{8} \Rightarrow \boxed{M(x) = 840 \text{ KN} \cdot \text{m}} \leftarrow \text{Les deux trottoirs sont chargés.}$$

$$\boxed{M(x) = 420 \text{ KN} \cdot \text{m}} \leftarrow \text{Un seul trottoir est chargé.}$$

C- Calculons les moments fléchissants maximaux dans les poutres :

Poutre 1 : $y = 3d/2$

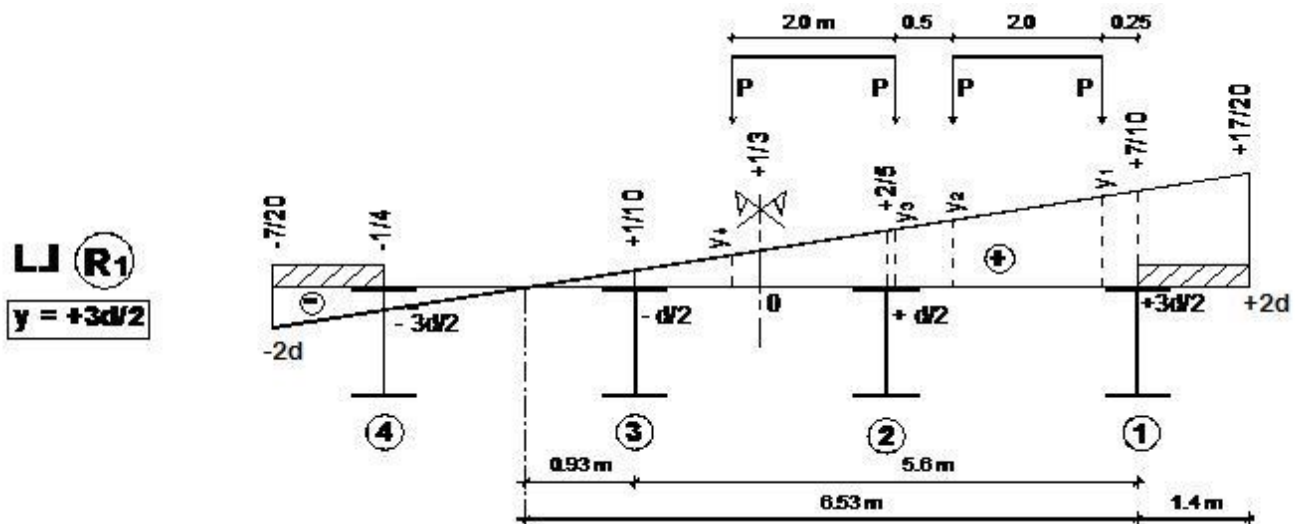
Système Bc :

$$M_1(x) = M(x) \cdot \frac{\sum_{k=1}^4 y_k}{\left(\sum_{k=1}^4 y_k \right)} \Rightarrow M_1(x) = M(x) \cdot \frac{P \cdot \sum_{k=1}^4 y_k}{4P} \Rightarrow \boxed{M_1(x) = M \cdot \frac{\sum_{k=1}^4 y_k}{4}}$$

$$\frac{0.7}{6.53} = \frac{y_1}{(6.53 - 0.25)} \Rightarrow y_1 = 0.673 \quad ; \quad \frac{0.7}{6.53} = \frac{y_2}{(6.53 - 2.25)} \Rightarrow y_2 = 0.459$$

$$\frac{0.7}{6.53} = \frac{y_3}{(6.53 - 2.75)} \Rightarrow y_3 = 0.405 \quad ; \quad \frac{0.7}{6.53} = \frac{y_4}{(6.53 - 4.75)} \Rightarrow y_4 = 0.191$$

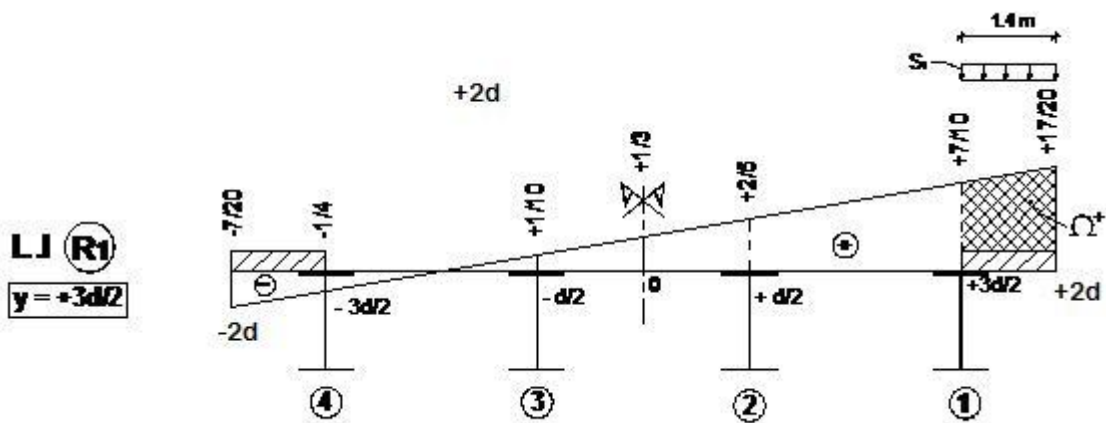
$$M_1(x) = 11308.175 \times \frac{(0.673 + 0.459 + 0.405 + 0.191)}{4} \Rightarrow \boxed{M_1(x) = 4885.132 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$



Surcharge du trottoir St : On charge seulement le trottoir de droite.

$$\Omega^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{20} + \frac{7}{10} \right) \times 1.4 \Rightarrow \Omega^+ = 1.085$$

$$M_1(x) = M(x) \cdot \frac{\Omega^+}{L_c}$$



$$M_1(x) = 420 \times \frac{1.085}{1.4} \Rightarrow \boxed{M_1(x) = 325.5 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

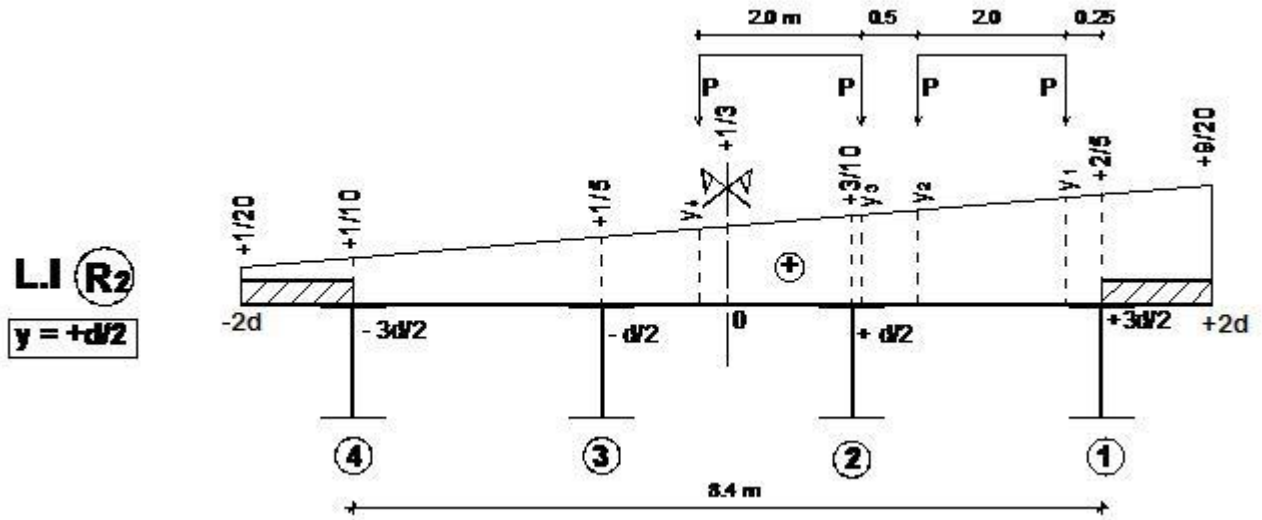
Poutre 2 : $y = d/2$

Système Bc :
$$M_2(x) = M(x) \cdot \frac{\sum_{k=1}^4 y_k}{4}$$

$$\frac{0.4 - 0.1}{8.4} = \frac{y_1 - 0.1}{(8.4 - 0.25)} \Rightarrow y_1 = 0.391 \quad ; \quad \frac{0.3}{8.4} = \frac{y_2 - 0.1}{(8.4 - 2.25)} \Rightarrow y_2 = 0.320$$

$$\frac{0.3}{8.4} = \frac{y_3 - 0.1}{(8.4 - 2.75)} \Rightarrow y_3 = 0.302 \quad ; \quad \frac{0.3}{8.4} = \frac{y_4 - 0.1}{(8.4 - 4.75)} \Rightarrow y_4 = 0.230$$

$$M_2(x) = 11308.175 \times \frac{(0.391 + 0.320 + 0.302 + 0.230)}{4} \Rightarrow M_2(x) = 3514.015 \text{ KN} \cdot \text{m}$$



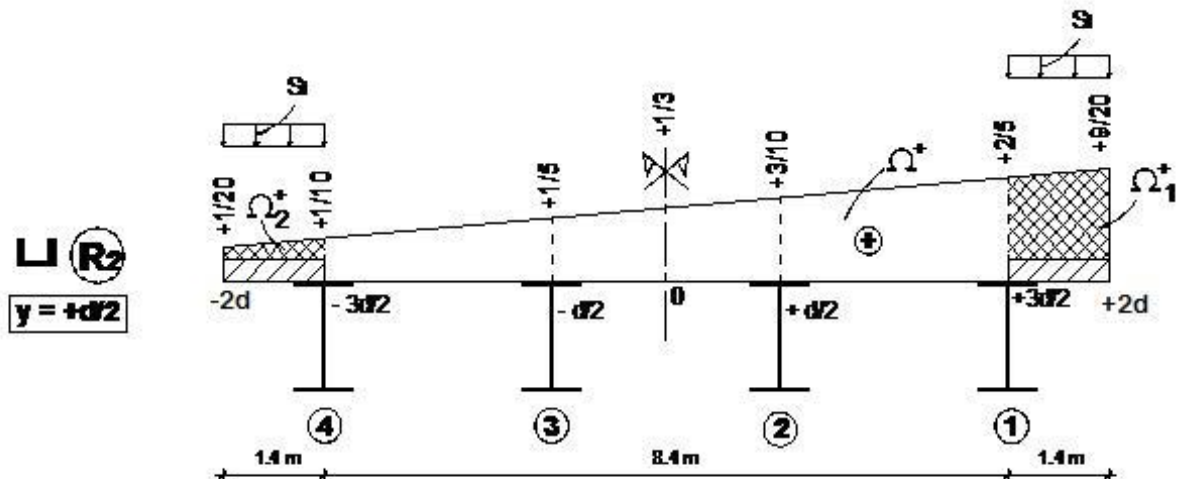
Surcharge du trottoir St : On charge les deux trottoirs.

$$\Omega_1^+ = \frac{1}{2}(0.45 + 0.4) \times 1.4 \Rightarrow \Omega_1^+ = 0.595$$

$$\Omega_2^+ = \frac{1}{2}(0.1 + 0.05) \times 1.4 \Rightarrow \Omega_2^+ = 0.105$$

$$M_2(x) = M(x) \cdot \frac{(\Omega_1^+ + \Omega_2^+)}{(L_{c1} + L_{c2})}$$

$$M_2(x) = 840 \times \frac{(0.595 + 0.105)}{(1.4 \times 2)} \Rightarrow M_2(x) = 210 \text{ KN} \cdot \text{m}$$



N.B : Pour la poutre 2 le chargement des trottoirs est symétrique par rapport à l'axe du pont ($e=0$), d'où $\Delta_2 = 1$, soit en utilisant l'équation (91)

$$M_2(x) = M(x) \cdot \frac{I}{4I} \cdot \Delta_2 \Rightarrow \boxed{M_2(x) = \frac{M(x)}{4}} = \frac{840}{4} = 210 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

3-4 Effort tranchant dans les poutres

3-4-1 Cas d'une charge répartie

L'effort tranchant dans la poutre (i) est directement lié à sa réaction R_i sur l'entretoise.

$$\left. \begin{aligned} T_i(x) &= T(x) \cdot \frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i \\ \Delta_i &= 1 + \frac{\sum_{j=1}^n I_j \cdot e \cdot y_j}{\sum_{j=1}^n I_j y_j^2} \end{aligned} \right\} \text{ avec } \quad (93)$$

En utilisant l'équation (90), on peut écrire

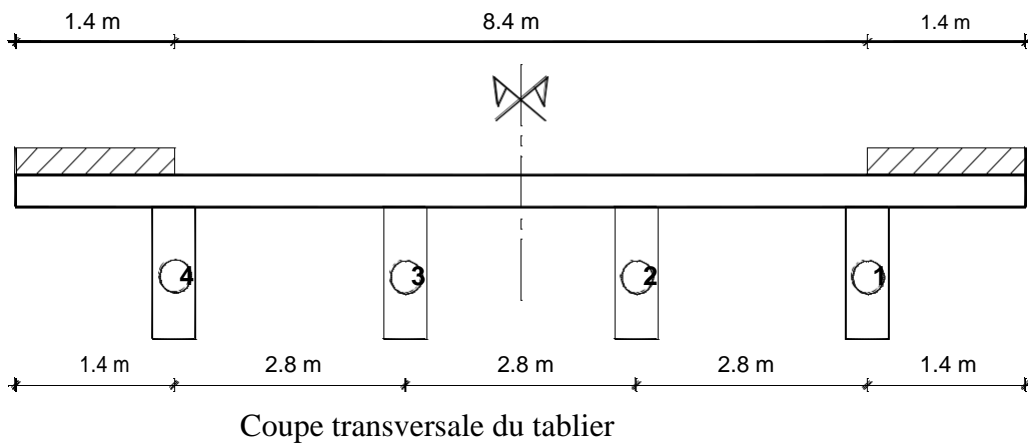
$$T_i(x) = T(x) \cdot \frac{\Omega}{L_c} \quad (94)$$

Exercice 4 (suite de l'exercice 3)

Calculer l'effort tranchant maximal dans les poutres, à l'abscisse $x = 5\text{m}$, sous l'effet du système $A(l)$ appliqué sur une seule voie le long du tablier.

Données : $A_2(l) = 8.5 \text{ KN/m}^2$.

Solution



A- Calculons l'effort tranchant dans le tablier à l'abscisse $x = 5\text{m}$, sous l'effet du système

$$A(l). v = Lc/2$$

$$v = 8.4/2 \longrightarrow v = 4.2 \text{ m}$$

$$q_{A(l)} = A_2(l) \cdot v$$

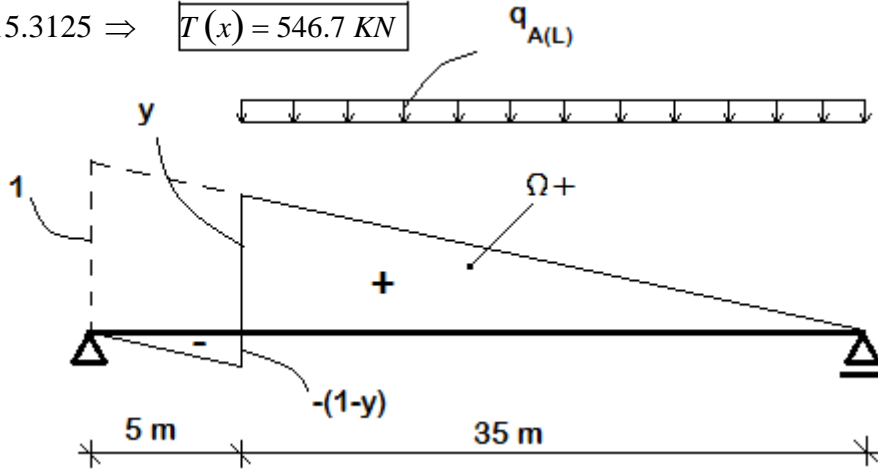
$$q_{A(l)} = 8.5 \times 4.2 \longrightarrow q_{A(l)} = 35.7 \text{ KN/ml}$$

$$T(x) = q_{A(l)} \cdot \Omega^+$$

$$\frac{1}{40} = \frac{y}{35} \Rightarrow y = 0.875$$

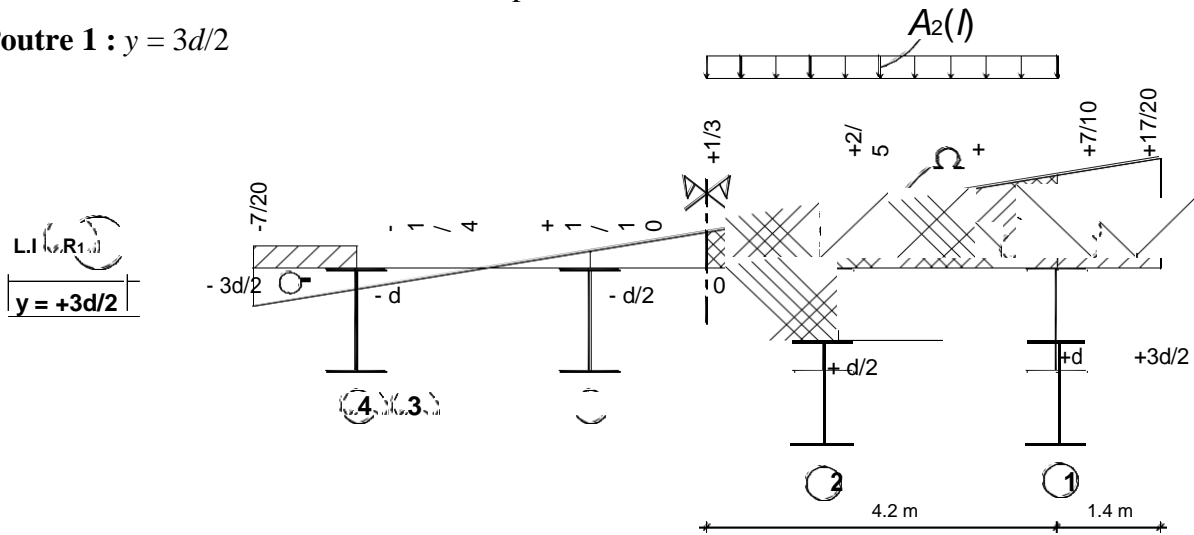
$$\Omega^+ = \frac{1}{2} \times 35 \times 0.875 = 15.3125$$

$$T(x) = 35.7 \times 15.3125 \Rightarrow T(x) = 546.7 \text{ KN}$$



B- Calculons les efforts tranchants dans les poutres à l'abscisse $x = 5\text{m}$.

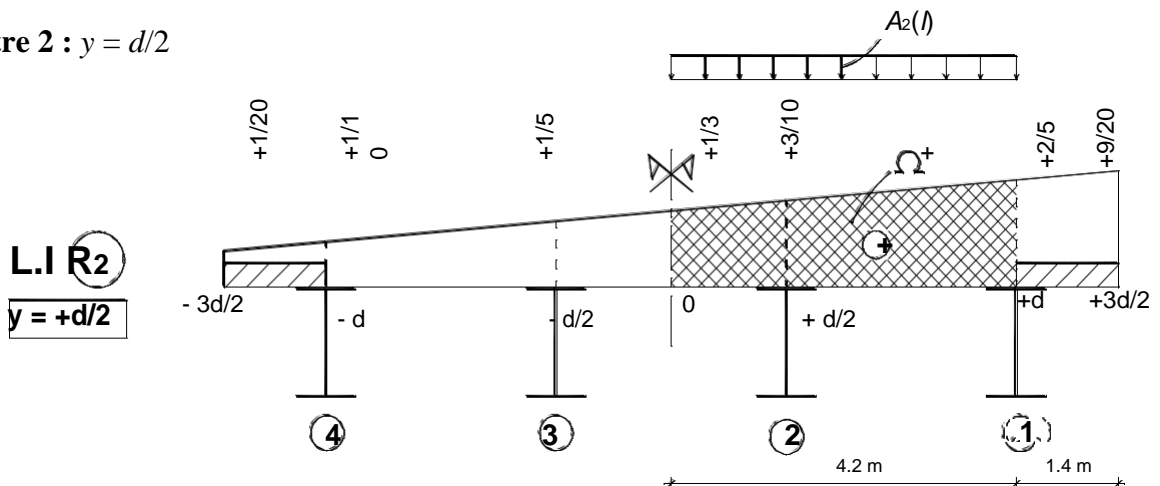
Poutre 1 : $y = 3d/2$



$$\Omega^+ = \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{3} \right) \times 4.2 \Rightarrow \Omega^+ = 2.17$$

$$T(x) = T(x) \cdot \frac{\Omega^+}{L_c} : T(x) = 546.7 \times \frac{2.17}{4.2} \Rightarrow T(x) = 282.5 \text{ KN}$$

Poutre 2 : $y = d/2$



$$\Omega^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) \times 4.2 \Rightarrow \Omega^+ = 1.54$$

$$T_2(x) = T(x) \cdot \frac{\Omega^+}{L_c} : T_2(x) = 546.7 \times \frac{1.54}{4.2} \Rightarrow \boxed{T_2(x) = 200.5 \text{ KN}}$$

N.B : Si on charge les 2 voies on aurait $T_1(x) = T_2(x)$ car la charge srait centrée ($e=0$).

3-4-2 Cas de charges concentrées

- En travée l'effort tranchant dans la poutre (i) est directement lié à sa réaction R_i sur l'entretoise.
- En voisinage de l'appui les flèches et les courbures des poutres tendent vers 0. Dans ces conditions on ne pourra plus négliger les déformations des entretoises devant celles des poutres. Le rôle répartiteur des entretoises va diminuer pour s'annuler complètement sur l'appui. On découpera le tablier en deux zones (fig. 31).

Zone 1 : (Entre l'appui et la première entretoise)

Le rôle répartiteur des entretoises est partiel.

Zone 2 : (Entre la première entretoise et l'autre appui)

Le rôle répartiteur des entretoises est total.

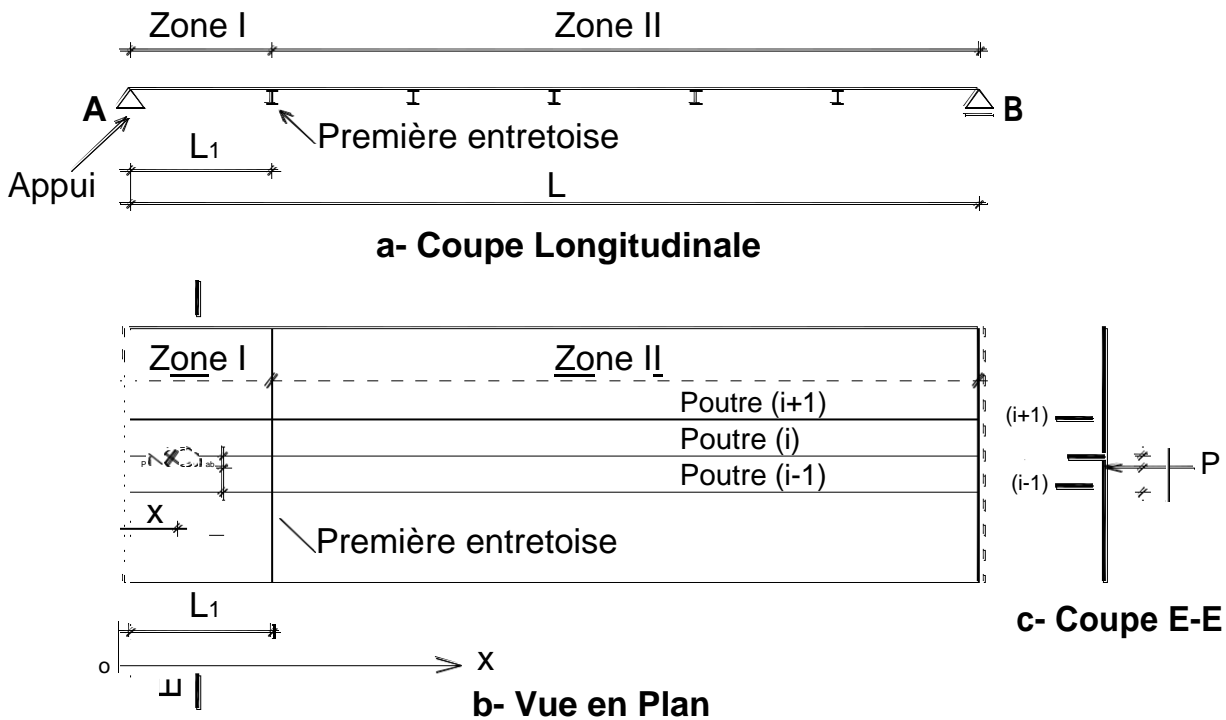


Fig. 31 Découpage du tablier en 2 zônes ; selon le rôle répartiteur des entretoises vis-à-vis l'effort tranchant

3-4-2- a/ Effort tranchant dans la zone 1

Le rôle répartiteur de l'entretoise est :

- Nul au niveau de l'appui A ($x = 0$).
- Total au niveau de la 1^{ère} entretoise ($x = L_1$).

- Intermédiaire dans l'intervalle $0 < x < L_1$.

A1/ Hypothèse de répartition nulle

Dans l'intervalle $0 < x < L_1$, en appliquant l'hypothèse de répartition nulle, on peut admettre que l'hourdis est simplement appuyé sur les poutres. En utilisant la figure 31-c, la réaction de la poutre (i) se calcule par

$$R''_i = \frac{P \cdot b}{(a + b)} \quad (95)$$

En utilisant la figure 32, on peut écrire

$$R_A = \frac{R''_i \cdot (L - x)}{L} \quad (96)$$

L'effort tranchant dans la poutre (i) sous l'effet de la réaction R''_i se calcule par

$$T''_i(x) = R_A = \frac{R''_i \cdot (L - x)}{L} \quad (97)$$

En remplaçant l'équation (95) dans (97), il résulte : $T''_i(x) = \frac{P \cdot b}{(a + b)} \cdot \frac{(L - x)}{L}$

Ou bien

$$T''_i(x) = \frac{P \cdot b}{(a + b)} \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (98)$$

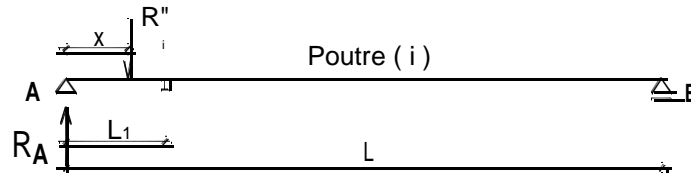


Fig. 32 Charges revenant à la poutre (i)

A2/ Hypothèse de répartition totale

Sous la charge concentrée P appliquée dans l'intervalle $0 < x < L_1$ (fig. 33), on a

$$T'_i(x) = T(x) \cdot \frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i \quad (99)$$

avec

$$\Delta_i = 1 + \frac{\sum_{j=1}^n I_j \cdot e \cdot y_j}{\sum_{j=1}^n I_j \cdot y_j^2}$$

et

$$T(x) = P \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (100)$$

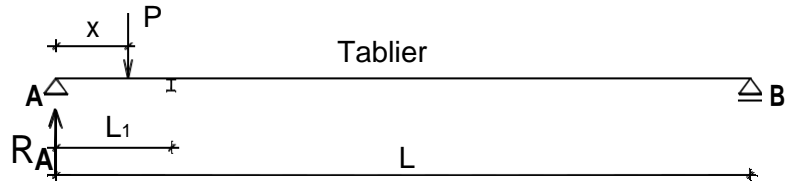


Fig. 33 Charges revenants au tablier

A3/ Hypothèse de répartition intermédiaire (cas réel)

L'effort tranchant revenant à la poutre (i) s'écrit sous la forme

$$T_i(x) = a(x) \cdot x + b(x) \quad (101)$$

Où $a(x)$ et $b(x)$ sont 2 fonctions de l'abscisse x .

$$x = 0 \rightarrow \text{Répartition nulle} \rightarrow T_i(x) = T'_i(x) = b(x)$$

d'où

$$b(x) = T''_i(x) \quad (102)$$

$$x = L_1 \rightarrow \text{Répartition totale} \rightarrow T_i(x) = T'_i(x) = a(x) \cdot L_1 + b(x)$$

Soit en remplaçant l'équation (102)

$$T'_i(x) = a(x) \cdot L_1 + T''_i(x)$$

d'où

$$a(x) = \frac{T'_i(x) - T''_i(x)}{L_1} \quad (103)$$

En remplaçant les équations (102) et (103) dans (101), il en résulte

$$T_i(x) = \frac{(T'_i(x) - T''_i(x))}{L_1} \cdot x + T''_i(x) \quad (104)$$

Ou bien

$$T_i(x) = \frac{x}{L_1} \cdot T'_i \left(\frac{x}{L_1} \right) + T''_i(x) \quad (105)$$

En récapitulant, on peut écrire

$$T_i(x) = \frac{x}{L_1} \cdot T_i' \left(\left. \begin{matrix} x \\ \left(\frac{x}{L_1} \right) \cdot Ti''(x) \end{matrix} \right\} \right.$$

$$\text{avec : } T_i'(x) = T(x) \cdot \frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i \quad (106)$$

$$\text{et : } Ti''(x) = \frac{P \cdot b}{(a+b)} \cdot \left(\left. \begin{matrix} 1 - \frac{x}{L} \end{matrix} \right\} \right.$$

Remarques

- 1- Pour $x = 0$; $T_i(x) = Ti''(x)$
- 2- Pour $x = L_1$; $T_i(x) = T_i'(x)$
- 3- L'effet de $Ti''(x)$ ne s'applique que si la charge P se trouve dans les deux panneaux d'hourdis qui encadrent la poutre (i), sinon $Ti''(x) = 0$.

3-4-2-b / Effort tranchant dans la zone 2

La répartition transversale des charges est reprise totalement par les entretoises. On peut écrire

$$T_i(x) = T(x) \cdot \frac{I_i}{\sum_{j=1}^n I_j} \cdot \Delta_i \quad (107)$$

avec

$$T(x) = P \cdot \left(\begin{matrix} - \frac{x}{L} \end{matrix} \right)$$

Exercice 5 (suite de l'exercice 3)

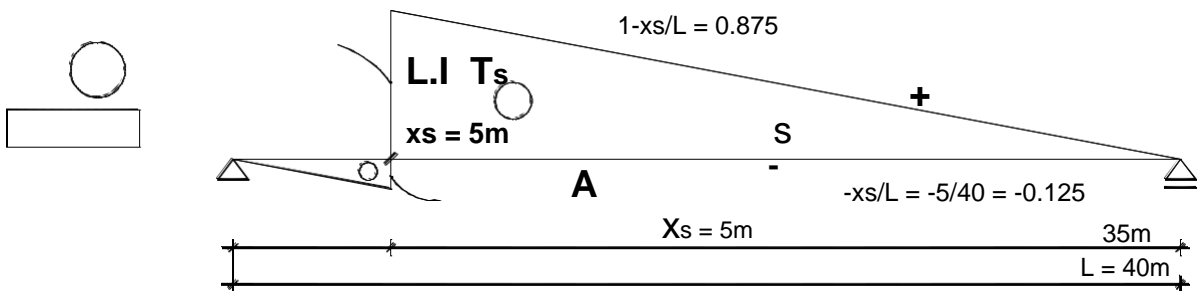
Calculer l'effort tranchant maximal dans la poutre intermédiaire du au système B_t $x = 5m$ et $x = 10m$.

Données : $b_t = 1.0$; $\delta_{B_t} = 1.13$

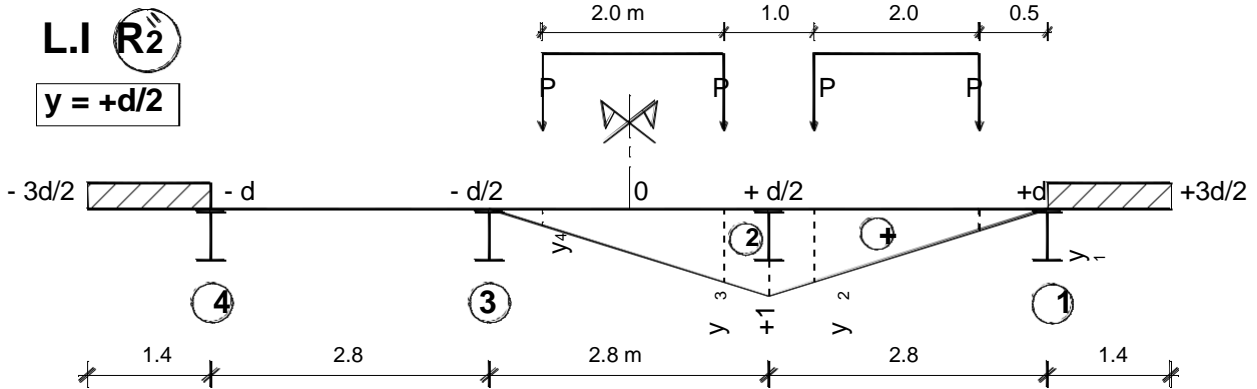
Solution

1) $0 < x = 5m < L_1 = 8m$ (Zone 1)

A- Traçons les lignes d'influence de l'effort tranchant à l'abscisse $x_s = 5m$.



B- Calculons la réaction R_2 de la poutre 2 qui est la poutre intermédiaire, sous l'effet des charges B_t situées sur les panneaux encadrant la poutre 2.



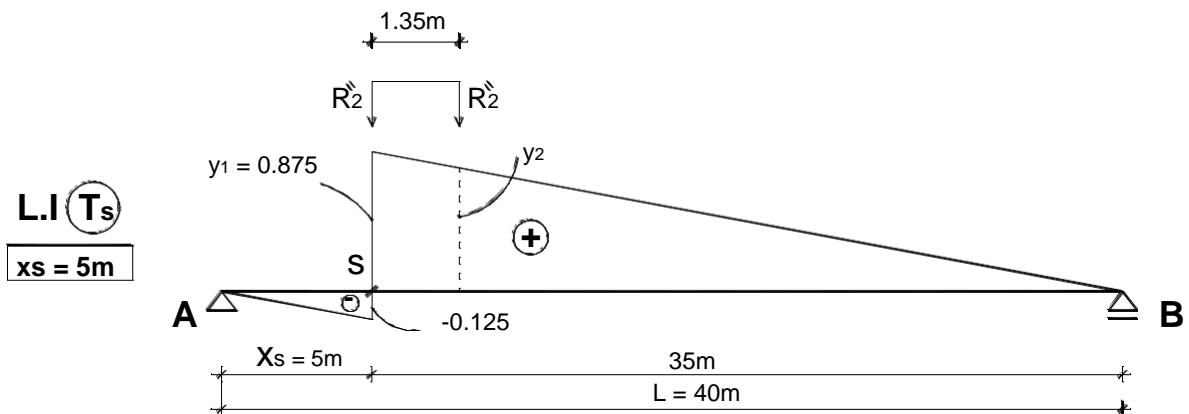
$$\frac{1}{2.8} = \frac{y_1}{0.5} \Rightarrow y_1 = 0.179 \quad ; \quad \frac{1}{2.8} = \frac{y_2}{2.5} \Rightarrow y_2 = 0.893$$

$$\frac{1}{2.8} = \frac{y_3}{2.1} \Rightarrow y_3 = 0.75 \quad ; \quad \frac{1}{2.8} = \frac{y_4}{0.1} \Rightarrow y_4 = 0.036$$

$$R_2'' = P \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$R_2'' = 80 \times (0.179 + 0.893 + 0.75 + 0.036) \Rightarrow R_2'' = 148.64 \text{ KN}$$

C- Calcul de T_2 : chargeons la ligne d'influence T_s de la poutre 2 par les réactions R_2 .

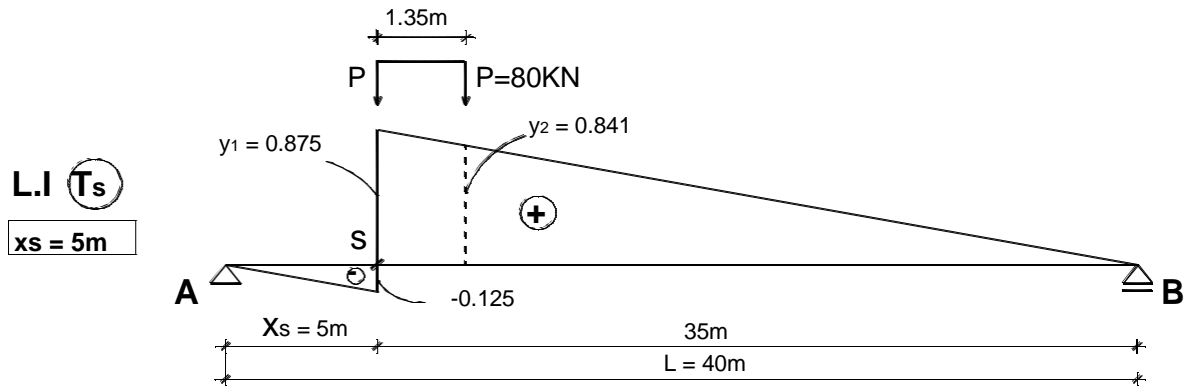


$$\frac{0.875}{35} = \frac{y_2}{(35 - 1.35)} \Rightarrow y_2 = 0.841$$

$$T_2 = R_2 \cdot b \cdot \delta_{Bi} \cdot (y_1 + y_2)$$

$$T_2 = 148.64 \times 1.0 \times 1.13 \times (0.875 + 0.841) \Rightarrow T_2 = 288.225 \text{ KN}$$

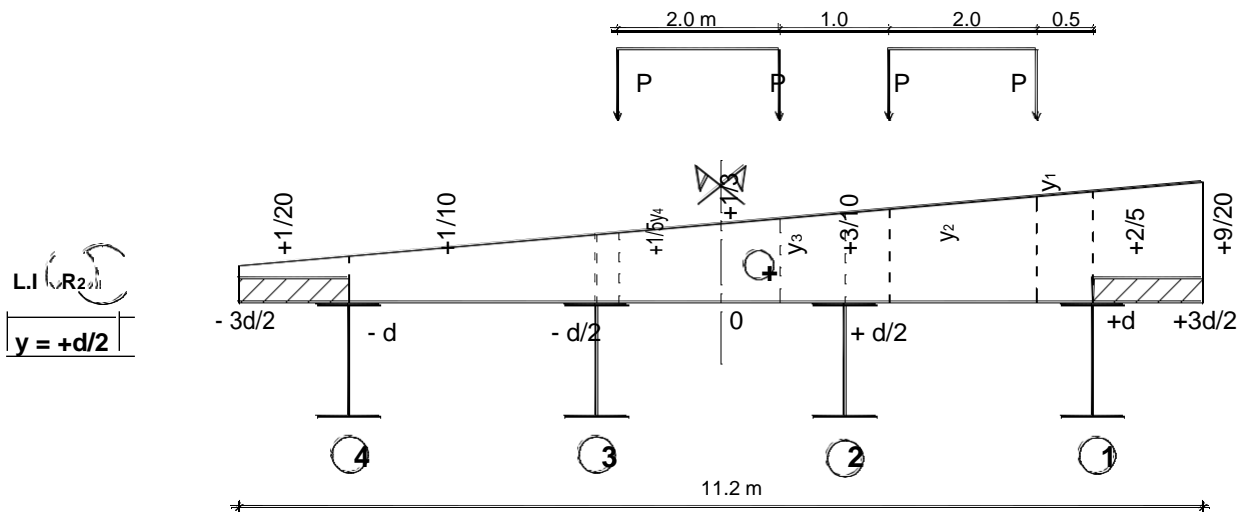
D- Calcul de T^{max} du au système B_t en chargeant la ligne d'influence T_s .



$$T^{max} = n \times 2 \times P \times b \times \delta \times (y_1 + y_2)$$

$$T^{max} = 2 \times 2 \times 80 \times 1 \times 1.13 \times (0.875 + 0.841) \Rightarrow T^{max} = 620.506 \text{ KN}$$

E- Calcul de T' en chargeant la ligne d'influence R_2 par le système B_t .



$$\frac{\frac{9}{20} - \frac{1}{20}}{11.2} = \frac{0.4}{11.2} = \frac{y_1 - \frac{1}{20}}{(11.2 - 1.9)} \Rightarrow y_1 = 0.382 \quad ; \quad \frac{0.4}{11.2} = \frac{y_2 - 0.05}{(11.2 - 3.9)} \Rightarrow y_2 = 0.311$$

$$\frac{0.4}{11.2} = \frac{y_3 - 0.05}{(11.2 - 4.9)} \Rightarrow y_3 = 0.275 \quad ; \quad \frac{0.4}{11.2} = \frac{y_4 - 0.05}{(11.2 - 6.9)} \Rightarrow y_4 = 0.204$$

$$T'_2 = T^{max} \cdot \frac{\sum_{k=1}^4 P_k \cdot y_k}{\left(\sum_{k=1}^4 P_k \right)} \Rightarrow T'_2 = T^{max} \cdot \frac{P \cdot \sum_{k=1}^4 y_k}{4P} \Rightarrow$$

$$T'_2 = T^{max} \cdot \frac{\sum_{k=1}^4 y_k}{4}$$

$$T_2' = 620.506 \times \frac{(0.382 + 0.311 + 0.275 + 0.204)}{4} \Rightarrow T_2' = 181.808 \text{ KN}$$

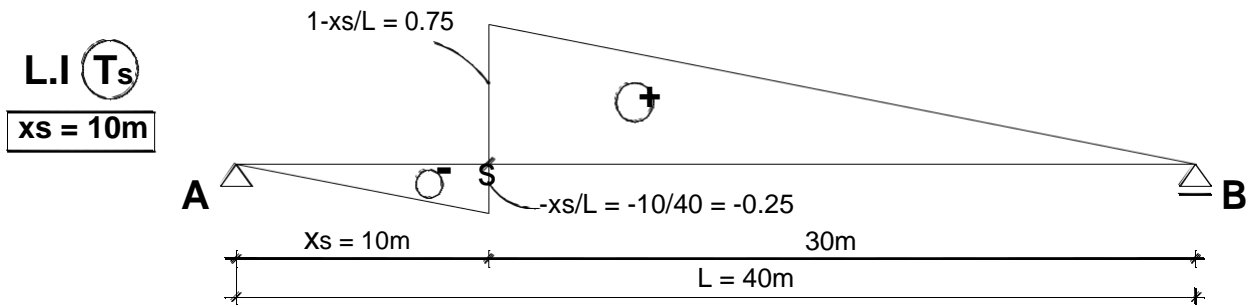
F- Calcul de T_2

$$T_2 = \frac{x}{L_1} \cdot T_2' + \left(1 - \frac{x}{L_1}\right) T_2''$$

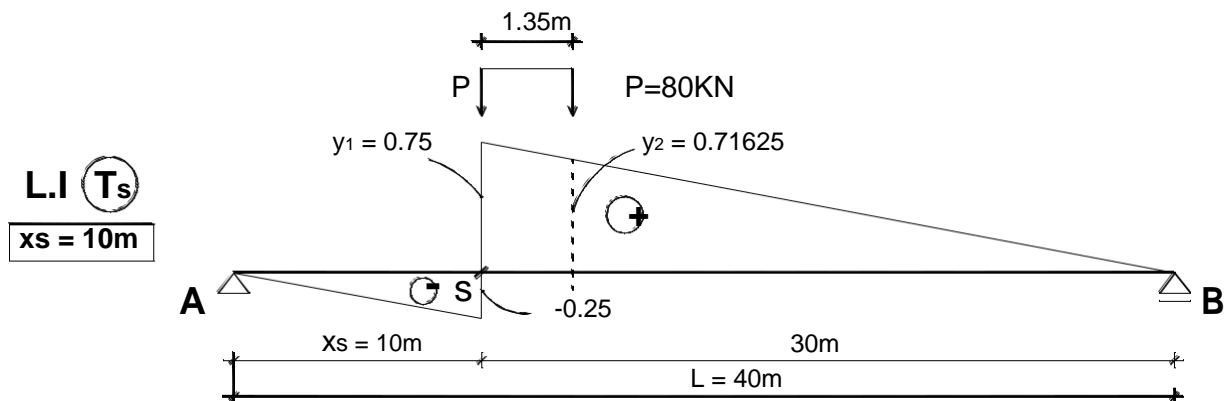
$$T_2 = \frac{5}{8} \times 181.808 + \left(1 - \frac{5}{8}\right) \times 288.225 \Rightarrow T_2 = 221.714 \text{ KN}$$

2) $x = 10\text{m} > L_1 = 8\text{m}$ (Zone 2)

A- Traçons les lignes d'influence de l'effort tranchant à l'abscisse $x_s = 10\text{m}$.



B- Calcul de T^{\max} du au système B_t en chargeant la ligne d'influence T_s .



$$T^{\max} = n \times 2 \times P \times b \times \delta \times (y_1 + y_2)$$

$$T^{\max} = 2 \times 2 \times 80 \times 1 \times 1.13 \times (0.75 + 0.71625) \Rightarrow T^{\max} = 530.196 \text{ KN}$$

C- Calcul de T_2 en chargeant la ligne d'influence R_2 par le système B_t .

$$T_2 = T_2^{\max} \cdot \frac{\sum_{k=1}^4 y_k}{4}$$

$$T_2 = 530.196 \times \frac{(0.382 + 0.311 + 0.275 + 0.204)}{4} \Rightarrow T_2 = 155.347 \text{ KN}$$

3-5 Calcul des entretoises

On opère pour une entretoise donnée de la façon suivante :

- 1- Rechercher la position longitudinale du convoi qui donne la réaction R_E maximale de l'entretoise.
- 2- Rechercher la position transversale du convoi la plus défavorable qui donne l'effet maximal recherché dans une section donnée de l'entretoise.

Dans une section S de l'entretoise d'abscisse y_S (fig. 34), l'effort tranchant T_S et le moment fléchissant M_S se calculent à partir des forces situées à gauche de la section S.

$$\left. \begin{aligned} T_S &= \sum_g R_i - \sum_g P_k \\ M_S &= \sum_g R_i (y_S - y_i) - \sum_g P_k (y_S - e_k) \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

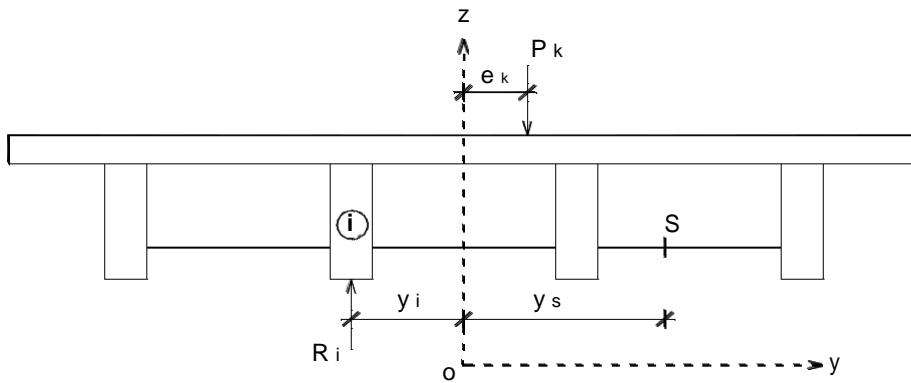


Fig. 34 Bilan des forces dans une entretoise

Exercice 6 (suite de l'exercice 3)

- 1) Tracer les lignes d'influence :
 - du moment fléchissant M_S au milieu de l'entretoise.
 - de l'effort tranchant T_S dans l'entretoise à la droite de la poutre 3.
- 2) Calculer M_S^{\max} et T_S^{\max} dus au convoi D240.

Solution

1) D'après l'exercice 4, on a :

$$R_1 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{e}{d} \right) \quad ; \quad R_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{e}{d} \right)$$

La poutre 3 est symétrique à la poutre 2 par rapport à l'axe oz ; l'expression de R_3 s'écrit à partir de celle de R_2 en changeant le terme de l'excentricité (e) par (-e), soit

$$R_3 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{e}{d} \right)$$

De même pour la poutre 4 qui est symétrique à la poutre 1, l'expression de R_4 s'écrit

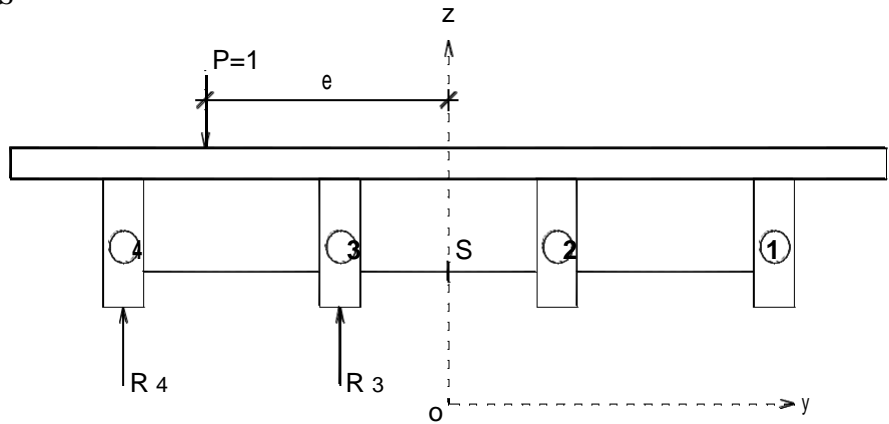
$$R_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{6}{5} \cdot \frac{e}{d} \right)$$

A- Traçons les lignes d'influence du moment fléchissant M_S au milieu de l'entretoise ($y_S=0$).

$$-2d \leq e \leq 0 \Rightarrow M_s = -1 \times (-e) + R_4 \times \frac{3d}{2} + R_3 \times \frac{d}{2}$$

$$\text{Soit : } M_s = e + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{e}{d} \right) \times \frac{3d}{2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{e}{d} \right) \times \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{M_s = \frac{1}{2}(e+d)}$$

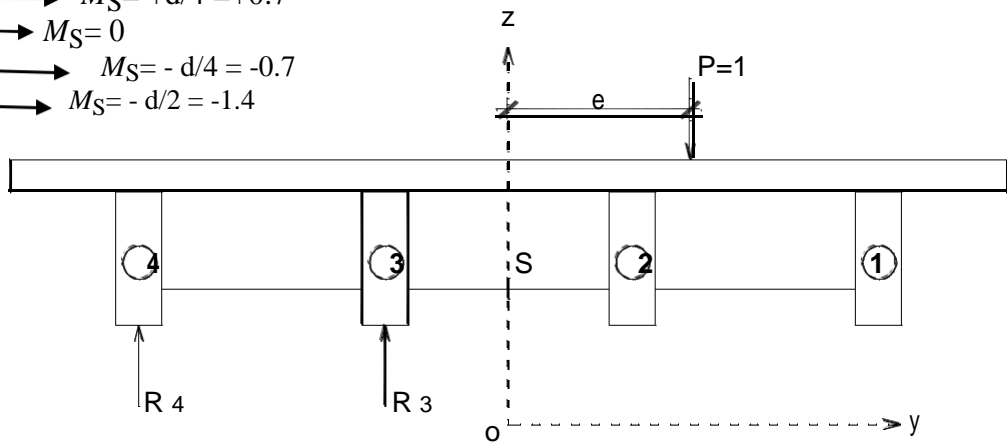
- $e = -2d \longrightarrow M_s = -d/2 = -1.4$
- $e = -3d/2 \longrightarrow M_s = -d/4 = -0.7$
- $e = -d \longrightarrow M_s = 0$
- $e = -d/2 \longrightarrow M_s = +d/4 = +0.7$
- $e = 0 \longrightarrow M_s = +d/2 = +1.4$

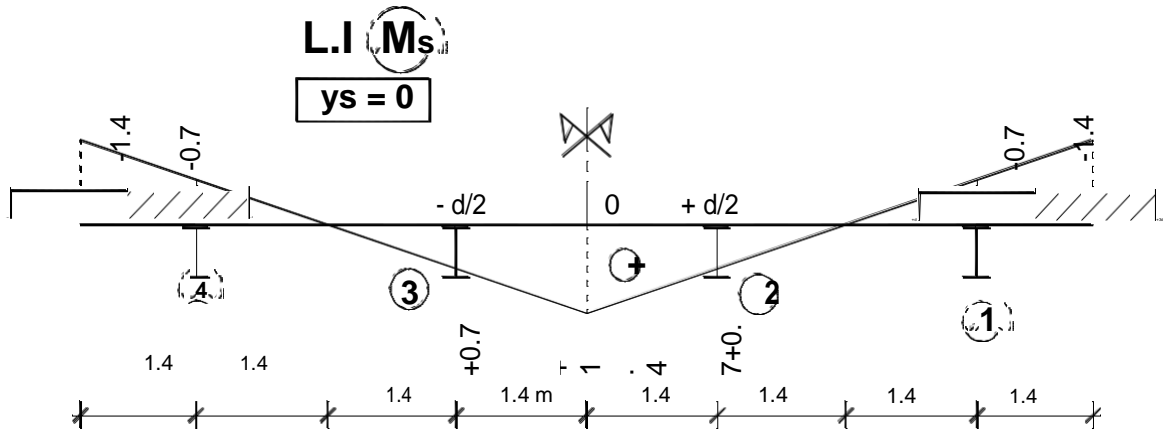


$$0 \leq e \leq 2d \Rightarrow M_s = R_4 \times \frac{3d}{2} + R_3 \times \frac{d}{2}$$

$$\text{Soit : } M_s = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{e}{d} \right) \times \frac{3d}{2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{e}{d} \right) \times \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{M_s = \frac{1}{2}(d-e)}$$

- $e = 0 \longrightarrow M_s = +d/2 = +1.4$
- $e = +d/2 \longrightarrow M_s = +d/4 = +0.7$
- $e = +d \longrightarrow M_s = 0$
- $e = +3d/2 \longrightarrow M_s = -d/4 = -0.7$
- $e = +2d \longrightarrow M_s = -d/2 = -1.4$



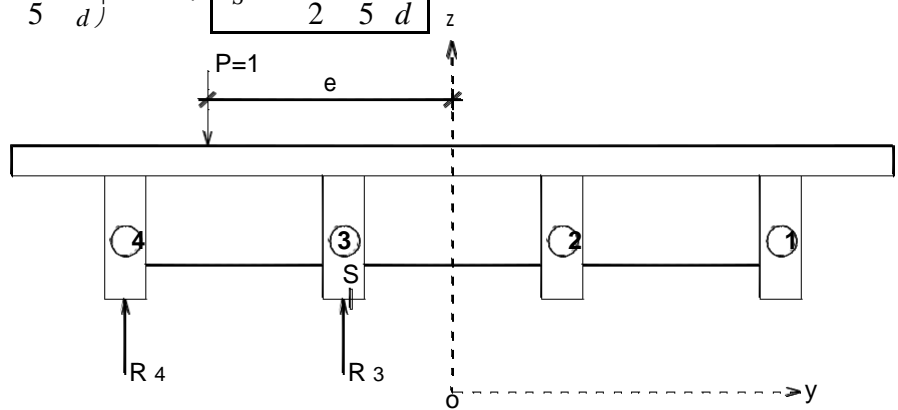


B- Traçons les lignes d'influence de l'effort tranchant T_S à la droite de l'abscisse ($y_s = -d/2$).

$$-2d \leq e \leq -d/2 \Rightarrow T_S = R_4 + R_3 - 1$$

$$\text{Soit : } T_S = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{6e}{5d} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2e}{5d} \right) - 1 \Rightarrow T_S = -\frac{1}{2} - \frac{2e}{5d}$$

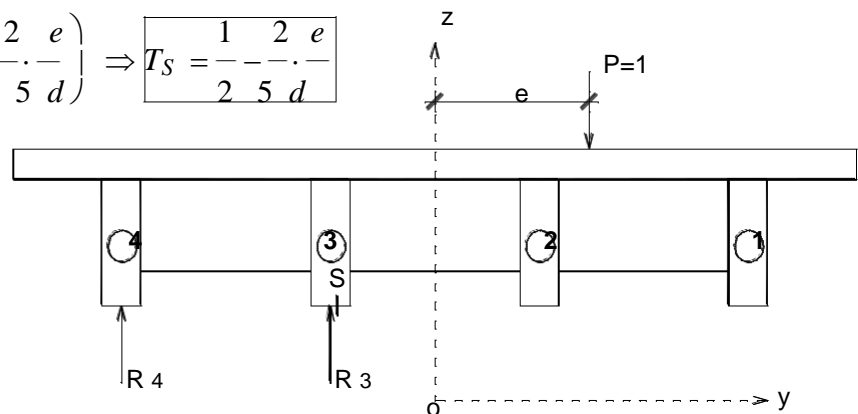
- $e = -2d \rightarrow T_S = 3/10$
- $e = -3d/2 \rightarrow T_S = 1/10$
- $e = -d/2 \rightarrow T_S = -3/10$
- $T_S = 0 \rightarrow e = -5d/4 = -3.5$

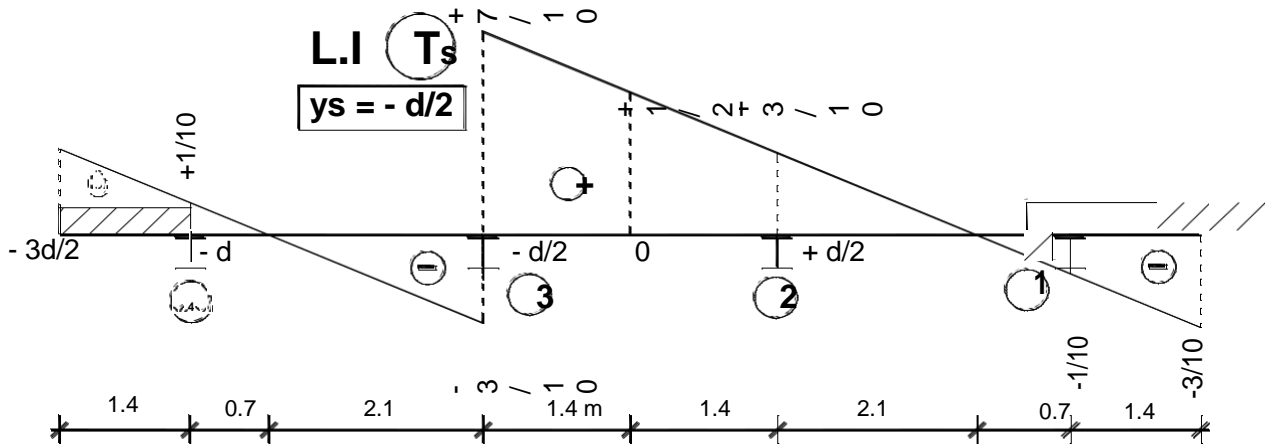


$$-d/2 \leq e \leq +2d \Rightarrow T_S = R_4 + R_3$$

$$\text{Soit : } T_S = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{6e}{5d} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2e}{5d} \right) \Rightarrow T_S = \frac{1}{2} - \frac{2e}{5d}$$

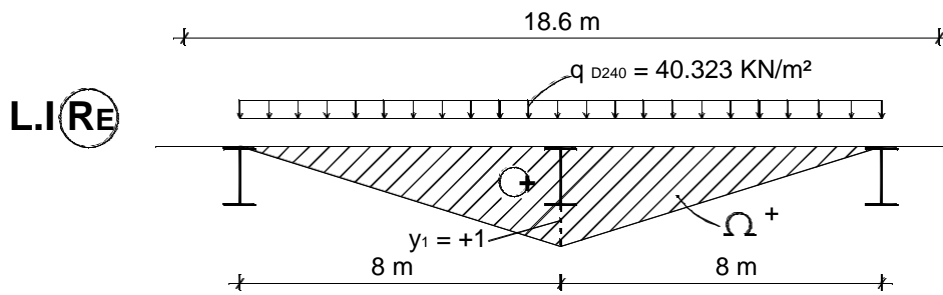
- $e = -d/2 \rightarrow T_S = +7/10$
- $e = 0 \rightarrow T_S = 1/2$
- $e = +d/2 \rightarrow T_S = 3/10$
- $T_S = 0 \rightarrow e = -5d/4 = +3.5$
- $e = +3d/2 \rightarrow T_S = -1/10$
- $e = +2d \rightarrow T_S = -3/10$





2) A- Chargeons la ligne d'influence de la réaction R_E de l'entretoise par le système D240 appliqué sur une bande de largeur 1 ml.

$$q_{D240} = \frac{2400}{(18.6 \times 3.2)} \Rightarrow q_{D240} = 40.323 \text{ KN/m}^2$$

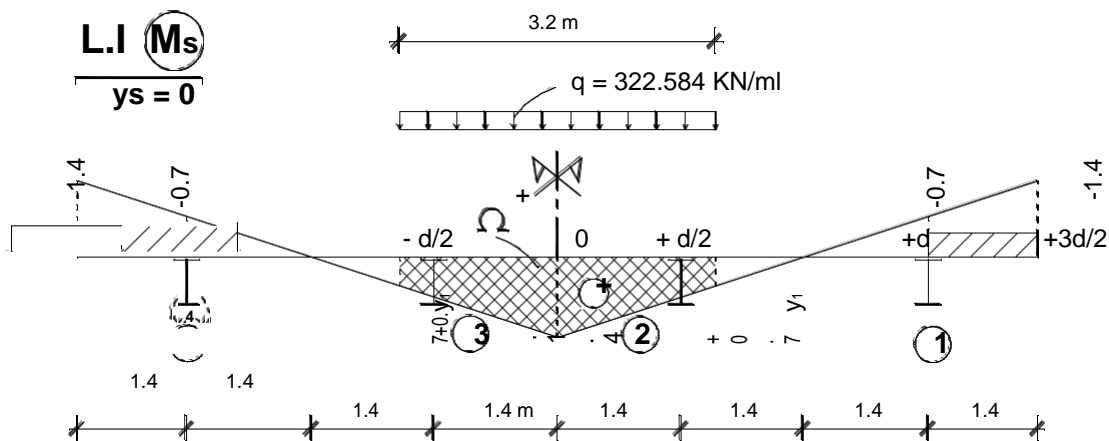


$$\Omega^+ = \frac{1}{2} \times 16 \times 1 \Rightarrow \Omega^+ = 8$$

$$R_E = q_{D240} \times \Omega^+$$

$$R_E = 40.323 \times 8 \Rightarrow R_E = 322.584 \text{ KN/ml} = q$$

B- Calcul de M_s^{\max} sous l'effet du système D240 : Chargeons la ligne d'influence de M_s ($y_s = 0$).



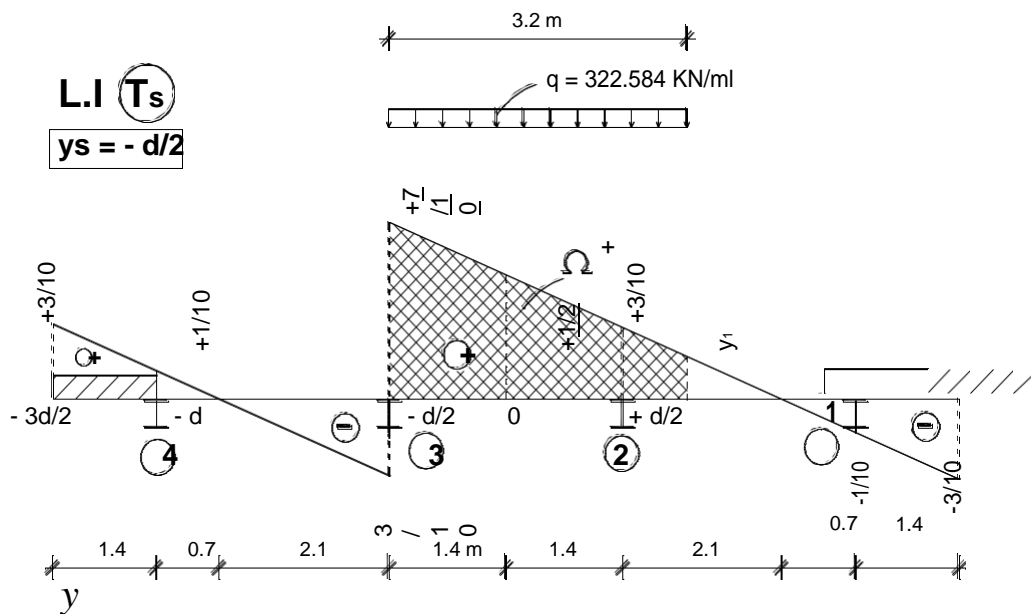
$$\frac{1.4}{2.8} = \frac{y_1}{(2.8 - 1.6)} \Rightarrow y_1 = 0.6$$

$$\Omega^+ = \frac{(1.4 + 0.6)}{2} \times 1.6 \times 2 \Rightarrow \Omega^+ = 3.2$$

$$M_S^{\max} = q \cdot \Omega^+$$

$$M_S^{\max} = 322.584 \times 3.2 \Rightarrow \boxed{M_S^{\max} = 1032.269 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

C- Calcul de T_S^{\max} sous l'effet du système D240 : Chargeons la ligne d'influence de T_S ($y_s = -d/2$).



$$\frac{3/20}{2.1} = \frac{y_1}{(2.4 - 0.4)} \Rightarrow y_1 = 0.243$$

$$\Omega^+ = \frac{(0.7 + 0.243)}{2} \times 3.2 \Rightarrow \Omega^+ = 1.509$$

$$T_S^{\max} = q \cdot \Omega^+$$

$$T_S^{\max} = 322.584 \times 1.509 \Rightarrow \boxed{T_S^{\max} = 486.779 \text{ KN}}$$

4 CONCLUSION

Les méthodes de Guyon-Massonet et de Courbon sont les méthodes les plus utilisées pour le calcul du tablier, cela est dû à la facilité de leurs manipulations par les bureaux d'études. Cependant, plusieurs autres méthodes peuvent être appliquées, telle que :

- La méthode des appuis élastiques des entretoises sur les poutres (méthode des 5 moments).
- La méthode de la matrice de transfert.
- L'analyse à partir de la torsion non uniforme.
- La méthode des éléments finis.

Par ailleurs, le cas des caissons uni et multi cellulaire suscite une étude particulière qui exploite la théorie des parois minces.