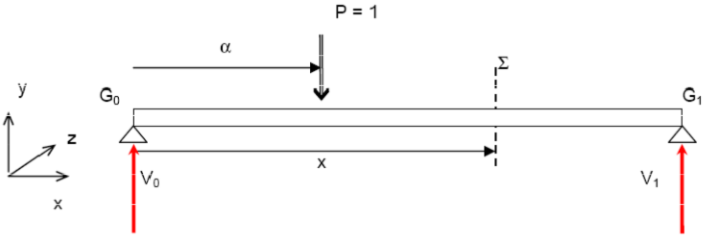
LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

1 DEFINITION

On considère, dans un repère orthonormé ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$), une poutre G_0G_1 plane sur deux appuis simples soumise à une charge ponctuelle unitaire mobile d'abscisse α. On cherche à mesurer dans une section Σ quelconque d'abscisse x l'effet de cette charge mobile.

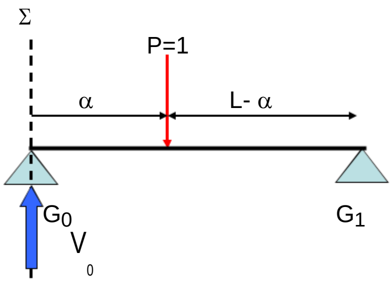


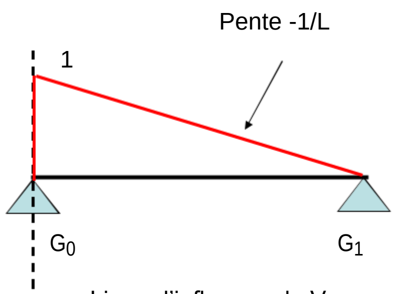
Cet effet $\mathscr{F}$ pourra être l'effort tranchant, le moment fléchissant, ou le déplacement (flèche, rotation) de la section Σ. La courbe représentative de $\mathscr{F}(\alpha)$, lorsque la charge mobile se déplace sur la poutre, est appelée courbe d'influence. Cette courbe d'influence est relative à une section x donnée. Il y a donc autant de courbes d'influences que de sections Σ que l'on considère.

LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

1 DEFINITION

Ligne de d'incluence de la réaction d'appui V_0





Ligne d'influence de V_0

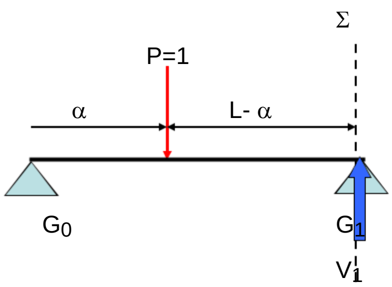
$$\Sigma M_{/B} = 0 \Rightarrow V_0 L - P(L-\alpha) = 0$$

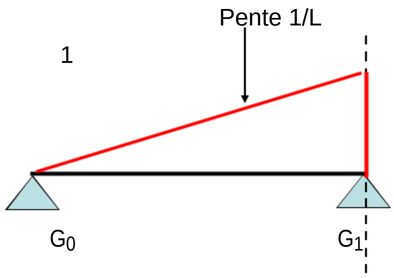
$$\boxed{\Rightarrow V_0 = 1 - \frac{\alpha}{L}}$$

LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

1 DEFINITION

Ligne de d'incluence de la réaction d'appui V_1





Ligne d'influence de V_1

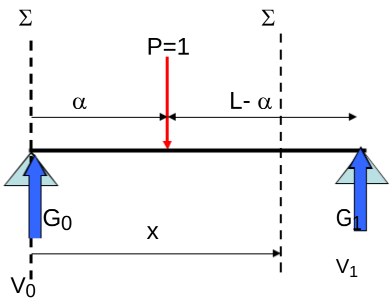
$$\Sigma M_{/A} = 0 \Rightarrow V_1 L - P\alpha = 0$$

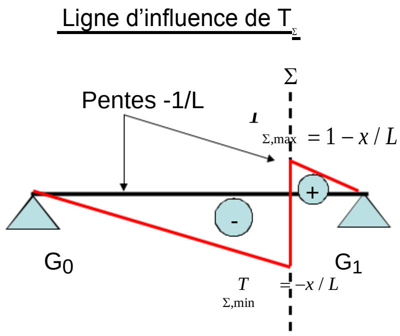
$$\boxed{\Rightarrow V_1 = \frac{\alpha}{L}}$$

LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

1 DEFINITION

Ligne de d'incluence de l'effort tranchant dans une section Σ d'abscisse x





Cas α < x (charge à gauche de Σ)
Coupure par les efforts de droite :

$$\boxed{\Rightarrow T_\Sigma(\alpha) = -V_1 = -\frac{\alpha}{L}}$$

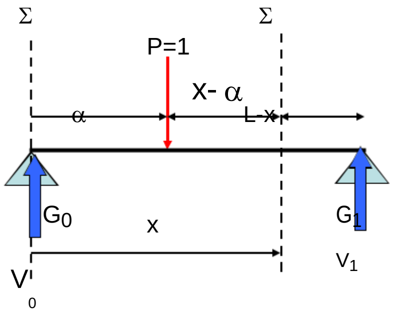
Cas α < x (charge à droite de Σ)
Coupure par les efforts de gauche :

$$\boxed{\Rightarrow T_\Sigma(\alpha) = V_0 = 1 - \frac{\alpha}{L}}$$

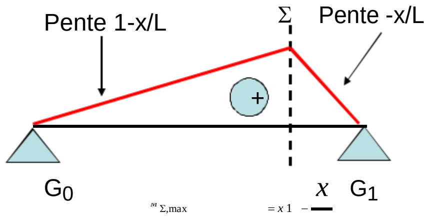
LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

1 DEFINITION

Ligne de d'incluence du moment fléchissant dans une section Σ d'abscisse x



Ligne d'influence de M_Σ



$$M_{\Sigma,max} = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Cas α < x (charge à gauche de Σ)
Coupure par les efforts de droite :

$$\Rightarrow M_\Sigma(\alpha) = V_1(L-x) = \alpha\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

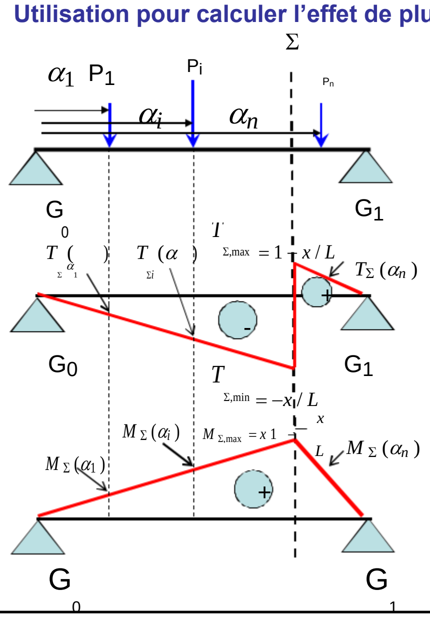
Cas α < x (charge à droite de Σ)
Coupure par les efforts de gauche :

$$\Rightarrow M_\Sigma(\alpha) = V_0\, x = \left(1 - \frac{\alpha}{L}\right) x$$

LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

2 APPLICATIONS

Utilisation pour calculer l'effet de plusieurs charges ponctuelles



Effet dans une section Σ de charges P_1, P_i, P_n placées en α_1, α_i, α_n

$$T_\Sigma = \sum_i P_i \cdot T_\Sigma(\alpha_i)$$

$$M_\Sigma = \sum_i P_i \cdot M_\Sigma(\alpha_i)$$

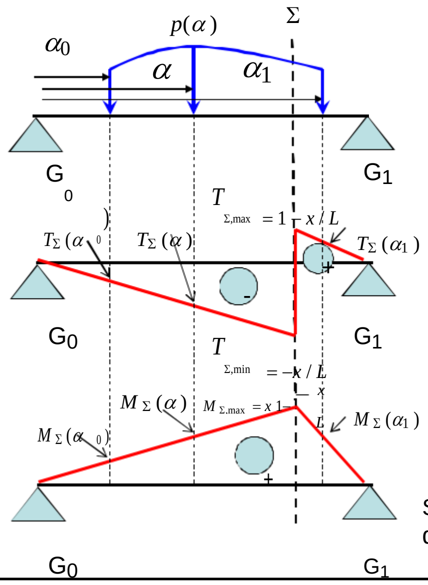
Ligne d'influence de T_Σ

Ligne d'influence de M_Σ

LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

2 APPLICATIONS

Utilisation pour calculer l'effet d'une charge répartie quelconque



Effet dans une section Σ d'une charge répartie quelconque $p(\alpha)$ entre les abscisses α_0 et α_1

$$T_\Sigma = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p(\alpha).T_\Sigma(\alpha)d\alpha$$

Si p est constant, T_Σ correspond à p x l'aire délimitée par la courbe $T_\Sigma(\alpha)$ entre α_0 et α_1

$$M_\Sigma = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p(\alpha).M_\Sigma(\alpha)d\alpha$$

Si p est constant, M_Σ correspond à p x l'aire délimitée par la courbe $M_\Sigma(\alpha)$ α_0 et α_1

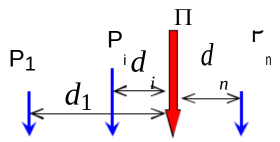
LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

3 EFFET D'UN CONVOI – THEOREME DE BARRE

Définition

Un convoi est un ensemble de charges P_i dont les distances entre elles restent fixes (exemples : camions, trains).

Le convoi peut être caractérisé par sa résultante $\Pi = \sum P_i$



La position de chaque charge P_i peut être caractérisée par sa distance d_i à la résultante Π

Objectif

L'objectif est de déterminer la position du convoi qui donne le moment fléchissant maximal dans la poutre sur 2 appuis simples que parcourt le convoi et la valeur de ce moment maximal.

LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

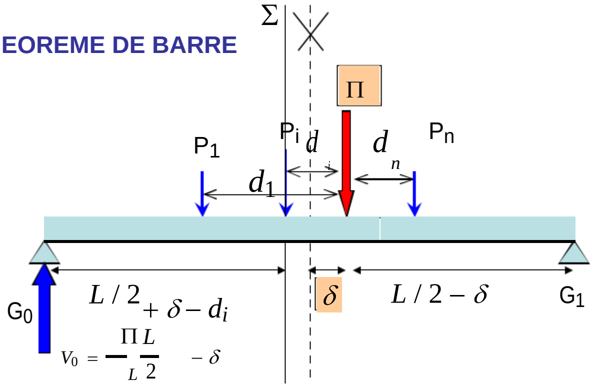
3 EFFET D'UN CONVOI – THEOREME DE BARRE

Démonstration

On note δ la distance de la résultante à l'axe la poutre.

On calcule la réaction d'appui à gauche en écrivant l'équilibre en G_1 :

$$V_0 = \frac{\Pi}{L}\left(\frac{L}{2} - \delta\right)$$



On calcule le moment dans la section Σ au droit de la charge P_i

$$M_\Sigma = V_0\,(L/2+\delta-d_i) - \underbrace{\sum_{P_g} P_g\,(d_g - d_i)}_{\text{Moment des provoqué par les charges à gauche de } P_i \text{ = Constante}} = \frac{\Pi}{L}(L/2-\delta)(L/2+\delta-d_i) - \sum_{P_g} P_g\,(d_g - d_i)$$

M_Σ pour une position du convoi telle que : $\frac{dM_\Sigma}{d\delta} = 0$

LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

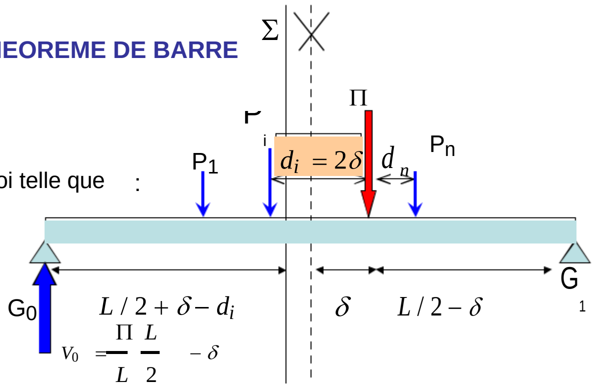
3 EFFET D'UN CONVOI – THEOREME DE BARRE

Démonstration

M_Σ pour une position du convoi telle que :

$$\frac{dM_\Sigma}{d\delta} = 0 \Rightarrow -2\delta + d_i = 0$$

$$\frac{dM_\Sigma}{d\delta} = 0 \Rightarrow \delta = \frac{d_i}{2}$$



$$M_\Sigma = \frac{\Pi}{L}(L/2-\delta)(L/2+\delta-d_i) - \sum_{P_g} P_g\,(d_g - d_i)$$

Le moment est maximum en Σ lorsque la charge P_i et la résultante Π *<u>sont placées de manière symétrique par rapport à l'axe de la poutre</u>*.

Alors, le moment maxi vaut :

$$M_{max} = \frac{\Pi}{L}(L/2 - d_i/2)^2 - \sum_{P_g} P_g\,(d_g - d_i) = \frac{\Pi L}{4}\left(1 - \frac{d_i}{L}\right)^2 - \sum_{P_g} P_g\,(d_g - d_i)$$

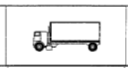
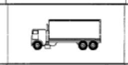
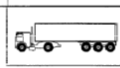
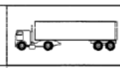
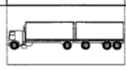
LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

3 EFFET D'UN CONVOI – THEOREME DE BARRE

Exemples de convois (EC1-3)

Convois routiers

Tableau 4.6 : Ensemble de camions "fréquents"

1 SILHOUETTE DU CAMION	2 Espacement des essieux (m)	3 Charge fréquente d'essieux (kN)	4 Type de roue (voir tableau 4.8)
	4,5	90 190	A B
	4,20 1,30	80 140 140	A B B
	3,20 5,20 1,30 1,30	90 180 120 120 120	A B C C C
	3,40 6,00 1,80	90 190 140 140	A B B B
	4,80 3,60 4,40 1,30	90 180 120 110 110	A B C C C

Convoi ferroviaire UIC 71

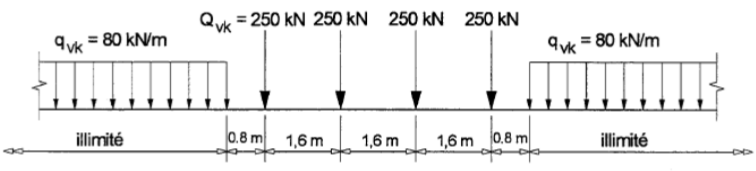


Figure 6.2 : Modèle de charge 71 et valeurs caractéristiques des charges verticales

LIGNE D'INFLUENCE DES POUTRES ISOSTATIQUES

3 EFFET D'UN CONVOI – THEOREME DE BARRE

Exemples de convois (BS)

Position of HB Load to produce Maximum Moment