

9

STATIQUE PAR LES TORSEURS

OBJECTIFS

- Définir la notion de systèmes statiquement équivalents et la notion de torseurs d'actions mécaniques.
- Donner la méthode permettant d'écrire un torseur en différents points.
- Décrire les opérations sur les torseurs, les propriétés principales et les torseurs particuliers : glisseur, torseur-couple et torseur-nul.
- Donner un nouvel énoncé au principe fondamental de la statique.
- Indiquer les torseurs d'interefforts des liaisons usuelles.

Les torseurs sont des outils de modélisation analogues aux vecteurs, utilisés pour représenter des actions mécaniques, des vitesses et diverses autres grandeurs. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des torseurs d'actions mécaniques (ou système force-couple), les propriétés abordées pourront être généralisées aux autres torseurs. Les torseurs (ou équivalents) sont des outils appréciés par l'enseignement supérieur et dans les études longues. Leur domaine d'emploi privilégié concerne les études de mécanismes dans l'espace faisant intervenir des liaisons mécaniques complexes et nécessitant des analyses détaillées en statique, cinématique et cinétique.

Remarque : d'un formalisme rigoureux, les torseurs sont des outils exigeants sur le plan mathématique, les habitudes de calcul et nécessitent du temps et de l'expérience pour être opérationnel.

Suggestion : avant d'aborder ce chapitre, il est préférable d'avoir assimilé les notions de produit vectoriel, de vecteurs-moments, de vecteurs-couples, d'isolement d'un solide, de calculs vectoriels dans l'espace et le principe fondamental de la statique.

I - Systèmes de forces statiquement équivalents

Cette notion est particulièrement utile pour comprendre les torseurs.

1. Déliniion

Deux systèmes de forces sont statiquement équivalents s'ils ont même somme vectorielle et même moment résultant en **tout** point.

Propriété : dans tout problème de statique, un système de forces pourra toujours être remplacé par un autre système de forces qui lui est statiquement équivalent : les systèmes sont interchangeables. Autrement dit, l'utilisation de l'un ou l'autre système ne modifie ni les équilibres, ni les mouvements, ni les résultats obtenus.

2. Exemples

Exemple 1 : une force \vec{F} appliquée en un point A et ses composantes au même point ? _____

Fig. 1

Remarque : inversement, la résultante de deux forces est statiquement équivalente à celles-ci. Mêmes remarques pour les diverses résultantes définies au chapitre 4.

Exemple 2 : un couple C est statiquement équivalent à deux forces \vec{F} et $-\vec{F}$ égales et opposées, distantes de a' ($C = Fd$). Une infinité de solutions sont possibles.

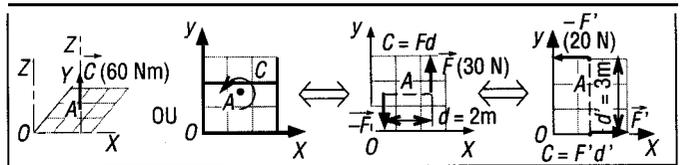


Fig. 2

Exemple 3 : une force \vec{F} peut être remplacée en n'importe quel point A par un système force (\vec{F}) plus couple (M_A) qui lui est statiquement équivalent.

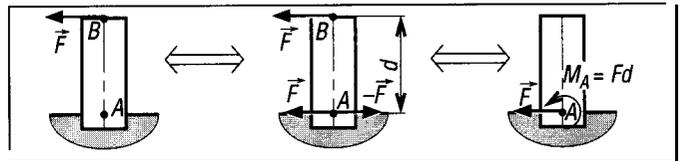


Fig. 3

Exemple 4 : tout système de n forces ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) dans l'espace est statiquement équivalent (autrement dit peut se réduire) en tout point A à un système force (\vec{S}) plus couple (\vec{M}_A) tel que : $\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ et $\vec{M}_A = \vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_A(\vec{F}_n)$.

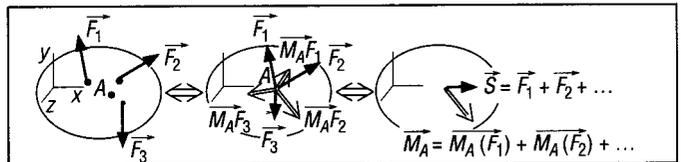


Fig. 4

Remarque : il suffit de répéter n fois le raisonnement de l'exemple 3, puis de faire les sommes vectorielles respectives.

Exemple 5 : dans le cas des liaisons mécaniques usuelles (pivot, rotule, etc.), en procédant de la même manière que pour l'exemple 4, l'infinité des petites forces de contact ($\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$) en

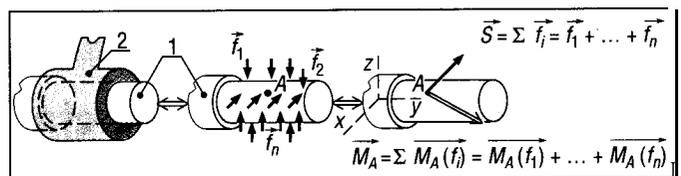


Fig. 5

tant les actions exercées entre les solides (1) et (2) est statiquement équivalente en tout point A à un système force ($\vec{S} = \vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_n$) plus couple [$\vec{M}_A = \vec{M}_A(\vec{f}_1) + \dots + \vec{M}_A(\vec{f}_n)$] encore appelé torseur des actions de contact.

Remarque : si \vec{S} ne dépend pas du point A choisi, il n'en va pas de même pour le moment résultant \vec{M}_A .

II - Définitions et notations

Défini en un point donné (A), un torseur d'action mécanique est un système force-couple constitué de deux grandeurs :

- une force ou somme vectorielle \vec{S} , indépendante du point choisi.
- un couple ou moment résultant \vec{M}_A , fonction du point A choisi.

Notation : $\left\{ \begin{array}{l} \text{torseur} \\ \text{en A} \end{array} \right\} = {}_A\{T_A\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X \ L_A \\ Y \ M_A \\ Z \ N_A \end{array} \right\}_{(x,y,z)}$ ou $\{T_A\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$

Remarque 1 : dans le repère (x, y, z), \vec{S} et \vec{M}_A s'écrivent :

$$\vec{S} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \text{ et } \vec{M}_A = L_A\vec{i} + M_A\vec{j} + N_A\vec{k}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïtés, l'indication du repère (x, y, z) peut être omise de l'écriture.

Remarque 2 : \vec{S} et \vec{M}_A sont appelés les éléments de réduction du torseur. \vec{S} encore notée \vec{R} est aussi appelée résultante générale du torseur (en remarquant que \vec{S} n'a pas toutes les propriétés des résultantes du chapitre 4).

Exemple : action de contact, en A et B, exercée par un solide 1 sur un solide 2.

$$\left\{ T_{1/2} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{S}_{1/2} \\ \vec{M}_{A1/2} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{1/2} \ L_{A1/2} \\ Y_{1/2} \ M_{A1/2} \\ Z_{1/2} \ N_{A1/2} \end{array} \right\}_A ; \left\{ T_{1/2} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{S}_{1/2} \\ \vec{M}_{B1/2} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} X_{1/2} \ L_{B1/2} \\ Y_{1/2} \ M_{B1/2} \\ Z_{1/2} \ N_{B1/2} \end{array} \right\}_B$$

III - Écriture d'un torseur en différents points

Un torseur (T) étant connu en un point A, déterminons sa valeur en un point B.

Principe

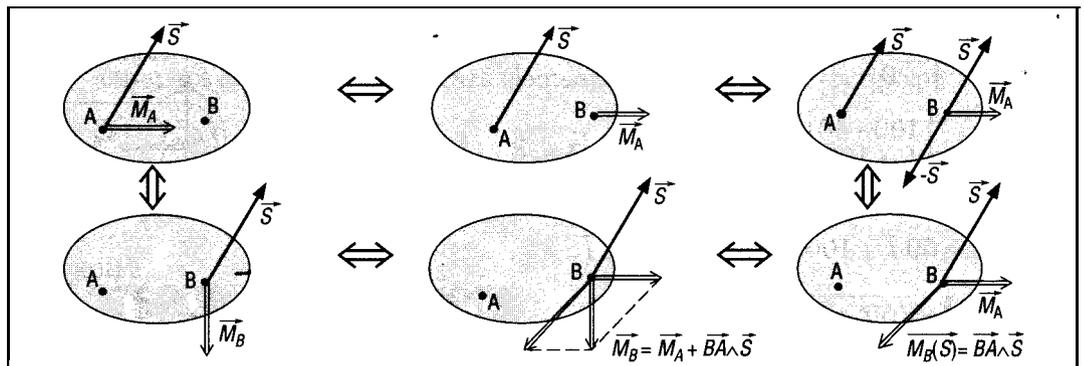


Fig. 6

- La somme vectorielle \vec{S} du torseur a même valeur en tout point, elle est invariable.
- \vec{M}_A étant connu, la valeur du moment en B, \vec{M}_B , est obtenue par la relation :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S} = \vec{M}_A + \vec{M}_B^s(\vec{S})$$

Remarque 1 : de manière générale, si 0 est l'origine du repère de calcul (0, x, y, z), les coordonnées de A, B et \overrightarrow{BA} sont :

$$\overrightarrow{OA} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{OB} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{BA} \begin{bmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{bmatrix}$$

Le moment $\overrightarrow{M_B}$ est alors égal à :

$$\overrightarrow{M_B} = \begin{pmatrix} L_B \\ M_B \\ N_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{S}$$

et

$$\begin{aligned} L_B &= L_A + Z(y_A - y_B) - Y(z_A - z_B) \\ M_B &= M_A - Z(x_A - x_B) + X(z_A - z_B) \\ N_B &= N_A + Y(x_A - x_B) - X(y_A - y_B) \end{aligned}$$

Remarque 2 : on notera que toutes les écritures sont statiquement équivalentes (l'écriture en A est statiquement équivalente à celle en B). De ce fait, on peut choisir n'importe quel point pour écrire le torseur des actions exercées. Les diverses écritures sont comparables aux différentes photos possibles d'un même individu.

Exemple : reprenons l'exemple 5 du paragraphe 1 ; les actions exercées par le solide (2) sur le solide (1) sont schématisées par :

$$\{T_{1/2}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S} \\ \overrightarrow{M_A} \end{array} \right\} \text{ avec } \overrightarrow{S} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000N \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{M_A} \begin{bmatrix} 100Nm \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{S} = 1000\vec{k} \\ M_A = 100\vec{i} \end{array} \right\}$$

Coordonnées de A (origine), B et \overrightarrow{BA}

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 0,1m \\ 0,04 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{BA} \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,04 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{S}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_B} &= \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,04 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 100 - 40 \\ 0 + 100 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

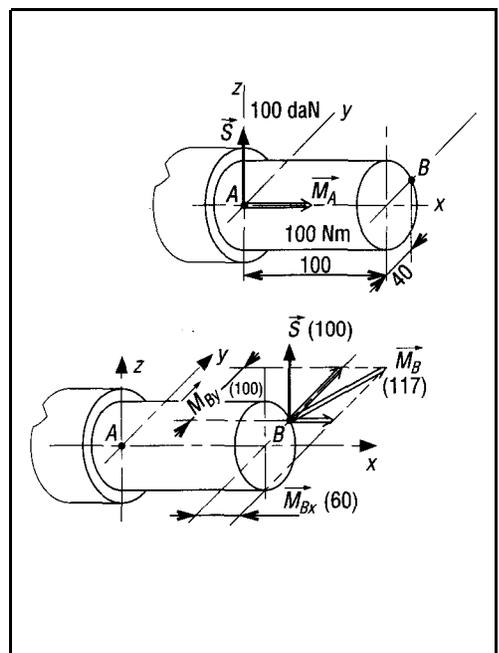
$$\overrightarrow{M_B} = 60\vec{i} + 100\vec{j} = M_{Bx}\vec{i} + M_{By}\vec{j}$$

$$|\overrightarrow{M_B}| = \sqrt{60^2 + 100^2} \approx 117Nm$$

Résultats

$$\{T_{1/2}\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 100 \\ 0 & 0 \\ 1000 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\{T_{1/2}\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 60 \\ 0 & 100 \\ 1000 & 0 \end{array} \right\}$$



ig. 7

IV • Opérations sur les torseurs

1. Addition ou somme de torseurs

Condition impérative : la somme de n torseurs $\{T_1\}, \{T_2\}, \dots, \{T_n\}$ n'est possible que si tous les torseurs de la somme sont écrits au même point.

$$\{T_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_1 \\ \vec{M}_{1A} \end{array} \right\} ; \quad \{T_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_2 \\ \vec{M}_{2A} \end{array} \right\} ; \quad \dots ; \quad \{T_n\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_n \\ \vec{M}_{nA} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\} + \dots + \{T_n\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \dots + \vec{S}_n \\ \vec{M}_A = \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A} + \dots + \vec{M}_{nA} \end{array} \right\}}$$

Pour effectuer la somme, il faut additionner d'un côté les n sommes vectorielles et de l'autre, les n moments écrits au même point A. L'addition se résume à deux sommes de vecteurs.

2. Multiplication par un scalaire

Si a est un scalaire (nombre) quelconque et $\{T\}$ un torseur, le produit de a par $\{T\}$ revient à ajouter k fois le torseur $\{T\}$ avec lui-même.

$$a \cdot \{T\} = (a \cdot T) = a \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} a \cdot \vec{S} \\ a \cdot \vec{M}_A \end{array} \right\}$$

3. Torseurs égaux

Deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ sont égaux s'ils ont même somme \vec{S} et même moment \vec{M}_A au point A, autrement dit s'ils ont les mêmes éléments de réduction en tout point.

$$\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_1 \\ \vec{M}_{1A} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_2 \\ \vec{M}_{2A} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_1 = \vec{S}_2 \\ \vec{M}_{1A} = \vec{M}_{2A} \end{array} \right\}$$

V • Torseurs particuliers

1. Torseur nul

Cas où \vec{S} et \vec{M}_A sont nuls, exemple de notation :

$$\boxed{\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ en tout point}}$$

Remarque : le torseur est nul en tout point de l'espace.

2. Torseur couple

Cas où s'est nulle et \vec{M}_A non nul :

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \text{ en tout point}$$

Remarque : la relation $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S}$ donne, dans la mesure où S'est nulle : $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{0} = \vec{M}_A = \vec{M}$. Autrement dit, le moment a même valeur \vec{M} en tout point et le torseur couple $\{C\}$ même écriture en tout point de l'espace.

Exemple

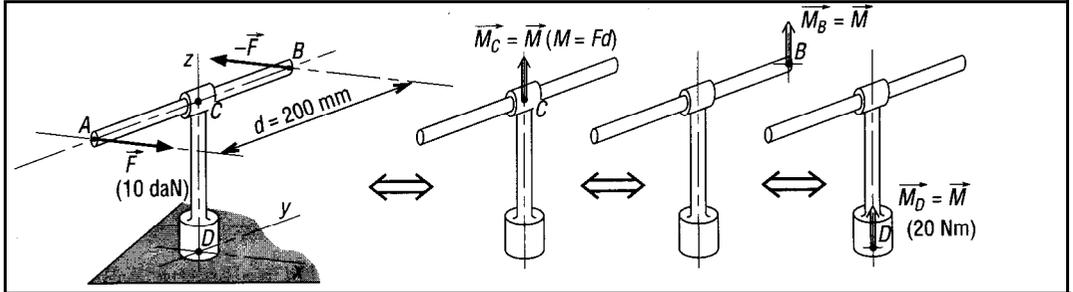


Fig. 8

L'ensemble des deux forces \vec{F} et $(-\vec{F})$ est statiquement équivalent au couple $\vec{M}_C = \vec{M}$ en C de module $M = F \cdot a' = 100 \times 0,2 = 20 \text{ Nm}$. Le couple a même valeur en tout point de la clé $\vec{M}_B = \vec{M}_D = \vec{M}_C = \vec{M}$. Il en résulte que le couple de serrage exercé sur l'écrou en D est \vec{M} (20 Nm) d'axe z.

Le torseur couple s'écrit : $\{C\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 20\vec{k} \end{Bmatrix}$ en tout point.

3. Glisseur

Cas où, en un point, le torseur se réduit à une somme \vec{S} non nulle et à un moment \vec{M}_A

$$\text{nul : } \{G\} = \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Remarque : les forces ou les vecteurs-forces usuels, les résultantes des chapitres précédents, ont tous comme image, ou sont tous schématisés, par des glisseurs.

À la ligne d'action de la force correspond l'axe du glisseur. Si A est un point de cette ligne, le moment en A du glisseur est nul ($\vec{M}_A = \vec{0}$).

En un point I éloigné de la direction de l'axe du glisseur, le moment \vec{M}_I n'est pas nul :

$$\vec{M}_I = \vec{M}_A + \vec{IA} \wedge \vec{S} = \vec{0} + \vec{IA} \wedge \vec{S}$$

$$\vec{M}_I = \text{moment en I de } \vec{S} \text{ en A} = \vec{IA} \wedge \vec{S}$$

\vec{M}_I est perpendiculaire à \vec{IA} et à \vec{S} , il en résulte la propriété :

$$\vec{M}_I \cdot \vec{S} = 0$$

Le produit scalaire de \vec{M}_I par \vec{S} est toujours nul dans le cas d'un glisseur. Cette propriété, propre aux glisseurs, permet de les distinguer des autres torseurs.

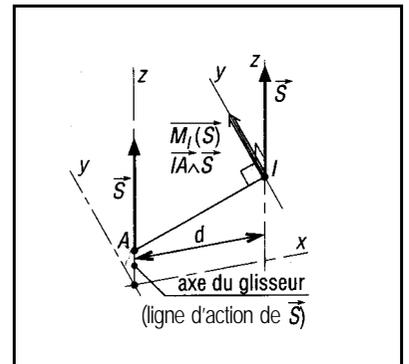


Fig. 9

Évolution des écritures d'un même glisseur et propriétés

$$\vec{F} = 100\vec{k}$$

$$\{G\}_A = \{G\}_D = \begin{pmatrix} 100\vec{k} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\{G\}_B = \{G\}_E = \begin{pmatrix} 100\vec{k} \\ 200\vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{F} = 200\vec{j}$$

$$\{G\}_C = \{G\}_H = \begin{pmatrix} 100\vec{k} \\ 500\vec{j} \end{pmatrix}$$

Remarque :

$$\frac{M_B}{AB} = \frac{M_C}{AC} = \frac{200}{2} = 100$$

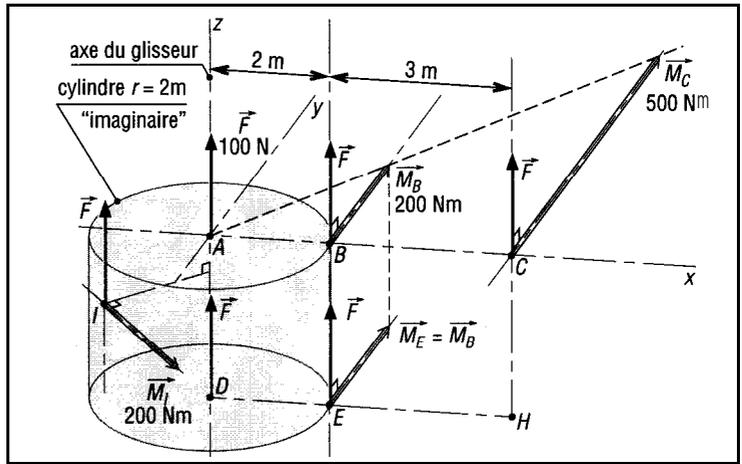


Fig. 10

L'écriture du glisseur est la même pour tous les points (A, D, etc.) de son axe. L'écriture du glisseur est la même pour tous les points (B, E, etc.) appartenant à une droite parallèle à son axe ou à sa résultante ($\vec{F} = \vec{S}$).

Tous les points (B, E, I, etc.) appartenant à la périphérie d'un cylindre d'axe l'axe du glisseur ont des moments de même module : $M_B = M_E = M$, = 200 Nm.

VI - Propriétés des torseurs dans le cas général

Dans le cas général, $\vec{S} \neq \vec{0}$; $\vec{M}_A \neq \vec{0}$ et $\vec{M}_A \cdot \vec{S} \neq 0$ (le torseur n'est pas un glisseur).

1. Équiprojectivité des moments

$$\text{Soit : } \{T\} = \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \vec{M}_B \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S}$$

Multiplications scalairement

les deux membres par \vec{BA}

$$\begin{aligned} \vec{M}_B \cdot \vec{BA} &= \vec{M}_A \cdot \vec{BA} + (\vec{BA} \wedge \vec{S}) \cdot \vec{BA} \\ &= \vec{M}_A \cdot \vec{BA} + 0 \end{aligned}$$

Remarque : $\vec{BA} \wedge \vec{S}$ est un vecteur perpendiculaire à la fois à \vec{BA} et à \vec{S} . Il en résulte que $(\vec{BA} \wedge \vec{S}) \cdot \vec{BA} = 0$

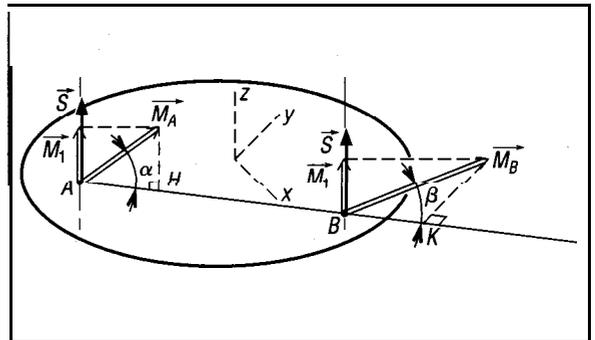


Fig. 11

$$\vec{M}_B \cdot \vec{AB} = \vec{M}_A \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AH} = \vec{BK}$$

La projection de \vec{M}_A sur \vec{AB} est égale à la projection de \vec{M}_B sur \vec{AB} quels que soient les points A et B choisis, autrement dit : $\vec{M}_A \cdot \vec{AB} = \vec{M}_B \cdot \vec{AB}$.

On dit qu'il y a équiprojectivité du champ (de l'ensemble) des moments du torseur.

Remarque : de façon analogue, la projection des moments sur la direction de la résultante \vec{S} donne toujours la même valeur M_1 .

2. Évolution des écritures d'un même torseur et propriétés

Pour tout point (A, D) de l'axe central :

$$\{T\}_A = \{T\}_D = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \vec{k} \\ 150 \vec{k} \end{pmatrix}$$

Pour tous points (B, E, etc.) appartenant à une droite parallèle à \vec{S} , l'écriture est la même :

$$\{T\}_E = \{T\}_B = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_B \end{pmatrix}$$

Même remarque en C et H sur CH

$$\{T\}_C = \{T\}_H = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_C \end{pmatrix}$$

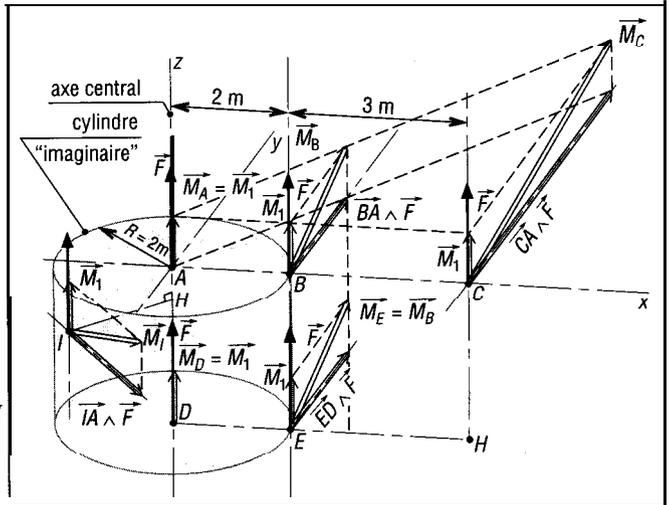


Fig. 12

Tous les points (B, E, I, etc.) appartenant à la périphérie d'un cylindre d'axe, l'axe central du torseur, ont des moments de même module : $M_E = M_B = M_I = \sqrt{150^2 + 200^2} = 250 \text{ Nm}$.

Remarque : tous les torseurs ont un axe central ; de plus cet axe central est unique.

Sur l'axe central, la somme \vec{S} et le moment \vec{M}_I sont colinéaires (même ligne d'action).

La combinaison particulière \vec{S} avec \vec{M}_I est appelée visseur. Ce type d'action se rencontre par exemple dans le cas d'un foret réalisant le perçage d'une pièce.

VII • Principe fondamental de la statique

Énoncé : un solide (S), en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques ${}_A\{T_{1/S}\}, {}_B\{T_{2/S}\}, \dots, {}_N\{T_{n/S}\}$ reste en équilibre si la somme des n torseurs, tous écrits au même point I, est égale au torseur nul $\{0\}$: ${}_A\{T_{1/S}\} + {}_B\{T_{2/S}\} + \dots + {}_N\{T_{n/S}\} = \{0\}$

Le principe fondamental a déjà été énoncé une fois en statique plane et une fois en statique dans l'espace. L'énoncé précédent utilise une autre écriture mais n'en diffère pas fondamentalement. Les moments sont exprimés sous forme vectorielle. Les autres principes restent inchangés : principe des actions mutuelles, principe de transmissibilité des forces ou des glisseurs, isolement d'un solide, méthode générale de résolution d'un problème de statique, application aux ensembles de solides (voir statique plane).

Remarques : $\{T_{1/S}\} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{1/S} \\ \vec{M}_{A1/S} \end{pmatrix}_A$; $\{T_{2/S}\} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{2/S} \\ \vec{M}_{B2/S} \end{pmatrix}_B$; ... ; $\{T_{n/S}\} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{n/S} \\ \vec{M}_{Nn/S} \end{pmatrix}_N$

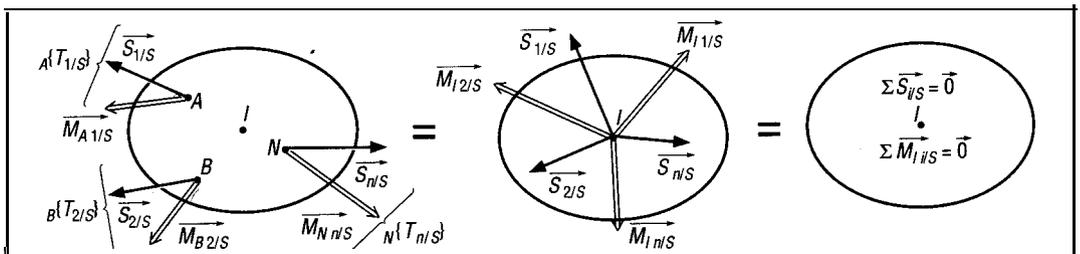


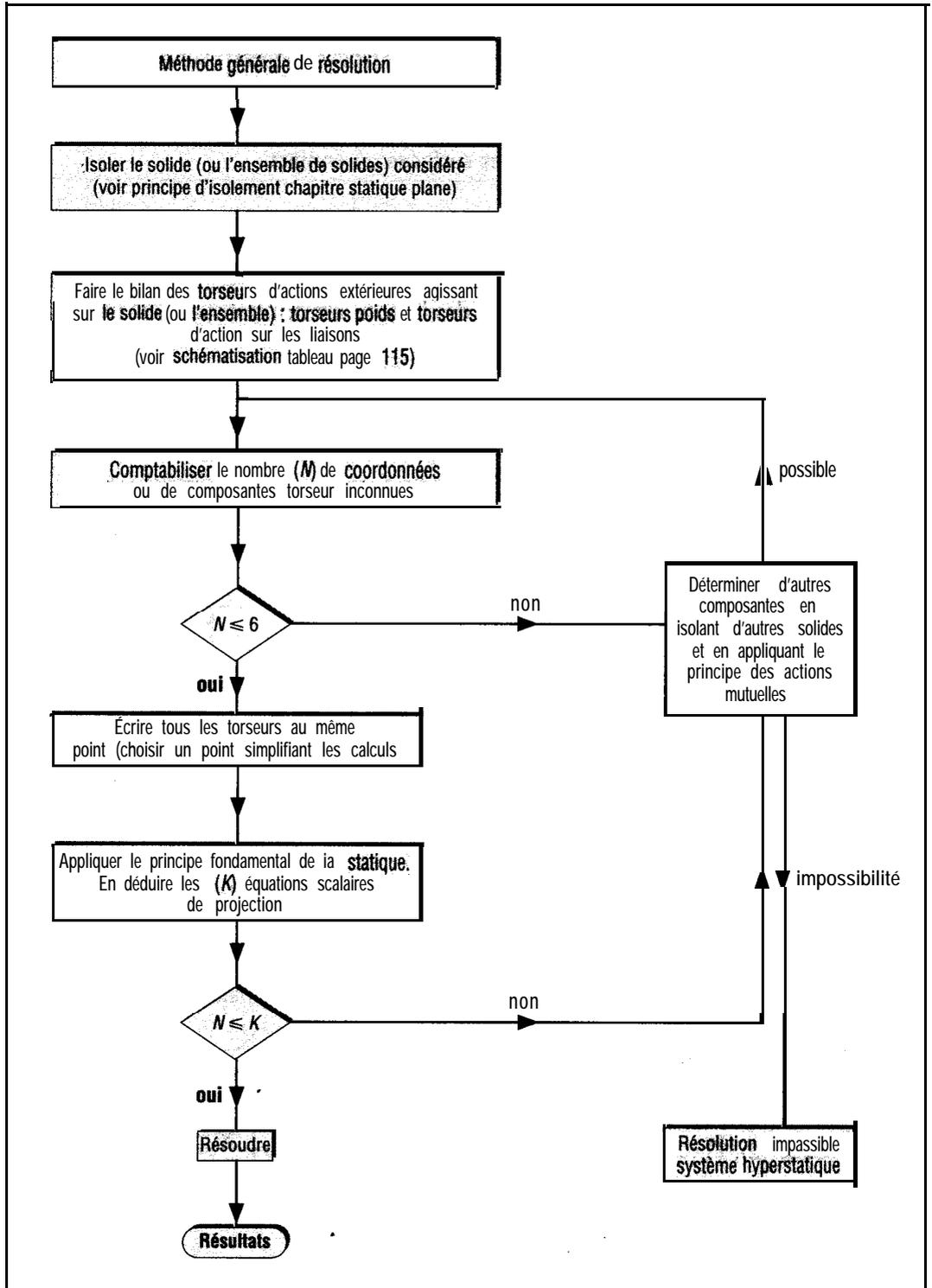
Fig. 13

L'addition des n torseurs se ramène à deux équations vectorielles dans l'espace :

a) $\Sigma \vec{S}_{i/S} = \vec{S}_{1/S} + \vec{S}_{2/S} + \dots + \vec{S}_{n/S} = \vec{0}$ (donne trois équations scalaires de projection sur les axes x, y, z).

b) $\Sigma \vec{M}_{I_1/S} = \vec{M}_{I_1/S} + \vec{M}_{I_2/S} + \dots + \vec{M}_{I_n/S} = \vec{0}$ (donne trois équations scalaires de projection sur les axes x, y, z).

Pour la résolution, on dispose, au plus, de six équations pour déterminer six coordonnées inconnues au maximum (coordonnées sur x, y, z des vecteurs somme $\vec{S}_{i/S}$ et moment $\vec{M}_{I_1/S}$).



VIII - Torseurs d'actions exercées par les liaisons usuelles

C'est lorsque les liaisons mécaniques et les actions entre solides sont définies de manière détaillée que les torseurs montrent tout leur intérêt.

1. Liaison parfaite

Une liaison définie comme parfaite vérifie les trois conditions suivantes :

- les surfaces de contact sont géométriquement parfaites,
- le contact est supposé réalisé sans jeu (ajusté sans jeu),
- il n'y a pas de frottement entre les surfaces en contact.

2. Schématisation des liaisons

La schématisation ou la modélisation des liaisons est normalisée et est indiquée dans les tableaux suivants.

Remarque : les jeux internes aux liaisons réelles peuvent parfois amener plusieurs interprétations possibles et des choix différents pour une modélisation.

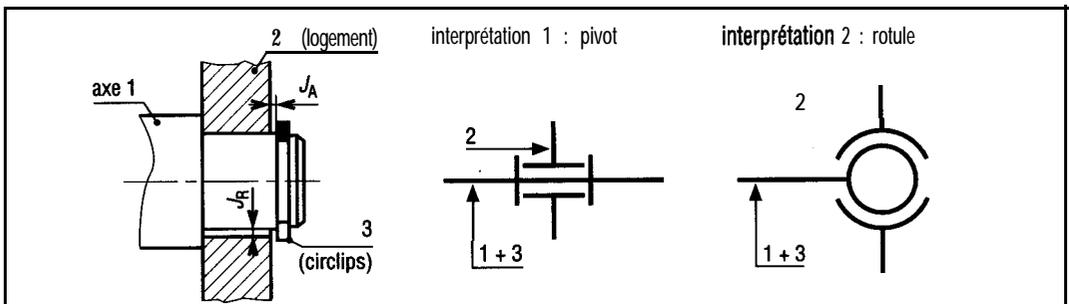


Fig. 14

Pour l'exemple proposé et suivant la valeur des jeux radial (J_R) et axial (J_A), plusieurs schématisations sont possibles : pivot (J_A et J_R faibles) ; rotule (J_A et J_R assez grands) ; appui plan (épaulement entre 1 et 2 grand) ; etc.

Le choix définitif retenu peut conduire à un problème isostatique (calculable en statique) ou à un problème hyperstatique (non calculable à partir des seules équations de la statique) et conditionne le succès de l'étude envisagée. Une certaine expérience est nécessaire et on met ici en évidence l'une des difficultés de l'application des torseurs.

3. Torseurs d'actions (interefforts) des liaisons usuelles

Pour le solide (1) en liaison avec le solide (2), $\{T_{1/2}\}$ est le torseur des actions exercées par 1 sur 2 au point 0 choisi (voir tableaux).

X, Y, Z, L, M et N sont les coordonnées du torseur.

$$\{T_{1/2}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{S}_{1/2} \\ \vec{M}_{O1/2} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{O1/2} \\ Y_{1/2} & M_{O1/2} \\ Z_{1/2} & N_{O1/2} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

$$\vec{S}_{1/2} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k} ; \vec{M}_{O1/2} = L \cdot \vec{i} + M \cdot \vec{j} + N \cdot \vec{k}$$

Remarques : suivant la nature de la liaison, certaines coordonnées seront nulles. L'ensemble des coordonnées non nulles caractérise l'effort transmissible par la liaison. Les mouvements possibles du solide (2) par rapport au solide (1) sont indiqués par $R_x, R_y, R_z, T_x, T_y, T_z$. R_x indique une rotation possible autour de l'axe x et T_z une translation possible dans la direction z. Il y a au plus six mouvements possibles, trois rotations et trois translations, correspondant à six degrés de liberté.

Si une rotation est possible suivant l'axe x (R_x), dans le même temps, il n'y a pas de couple transmissible suivant cet axe ; autrement dit : $L = 0$. Même remarque avec les translations, si T_y existe alors $Y = 0$, etc.

Dans le cas particulier de la liaison-glissière hélicoïdale (vis-écrou), les coordonnées X et L dépendent l'une de l'autre ($X = kL$), de la même façon que la rotation R_x et la translation T_x sont liées par le pas. Si X est connu, L est lui aussi connu et inversement : c'est le principe de la clé dynamométrique.

Nom de la liaison	translations			Représentation plane (orthogonale)	Représentation en perspective	Torseur d'inter-effort $T_{1/2}$	Exemple	Action sur le solide 2 isolé
	T_x	T_y	T_z					
Encastrement ou liaison fixe	0	0	0	<p>variante 1 variante 2</p>		$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$	<p>soudure</p>	
Pivot (axe O, x)	0	R_x	1			$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$		
Glissière (axe O, x)	T_x	0	1			$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$		
Hélicoïdale (axe O, x)	$T_x + R_x$	1	combinées fonction du pas			$\begin{Bmatrix} k.L & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$	<p>1 écrou 2 vis</p>	
Pivot glissant (axe O, x)	T_x	R_x	2			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$		

Nom de la liaison	translations		rotations		Représentation plane (orthogonale)	Représentation en perspective	Torseur d'inter-effort $T_{1/2}$	Exemple	Action sur le solide 2 isolé	
	0	R_y	R_z	2						
Rotule à doigt (doigt 0, z)	0	R_y	R_z	2			$\begin{pmatrix} X & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix}$			
Rotule ou sphérique (centre 0)	0	R_x	R_y	R_z	3			$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix}$		
Appui plan normale 0, z	T_x	T_y	R_z	3			$\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{pmatrix}$			
Linéaire rectiligne (normale 0, z)	T_x	T_y	R_x	R_z	4			$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \\ Z & 0 \end{pmatrix}$		
Linéaire annulaire (axe 0, x)	T_x	T_y	R_y	R_z	4			$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix}$		
Ponctuelle (direction 0, z)	T_x	T_y	R_y	R_z	5			$\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix}$		

Fig. 15 (liaison linéaire annulaire ou sphère cylindre, ponctuelle ou sphère plan)

EXERCICES RÉSOLUS

1 L'hélicoptère proposé évolue horizontalement à vitesse constante suivant l'axe $(0, x)$; l'axe $(0, z)$ est vertical. \vec{F} et \vec{M} schématisent les actions exercées par l'air sur les pales du rotor principal. \vec{M}_Q et \vec{Q} sont les actions sur le rotor anti-couple, \vec{R} est la résistance de l'air sur l'ensemble de l'appareil et \vec{P} le poids total. Écrire les torseurs correspondant aux actions précédente. Isoler l'hélicoptère ; appliquer le principe fondamental de la statique ; en déduire \vec{R} , \vec{Q} et \vec{F} .

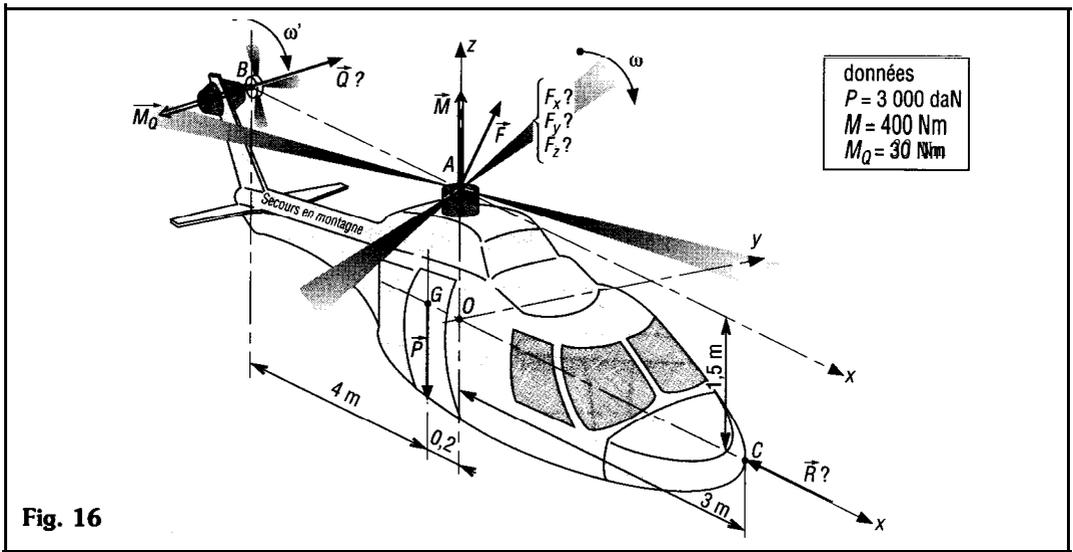


Fig. 16

Résolution : isolons l'ensemble de l'hélicoptère et appliquons le principe fondamental. L'hélicoptère est soumis à l'action de quatre torseurs d'actions extérieures :

a) action du poids :
$$\left\{ \mathcal{F}_P \right\} = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,2P \\ -P & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{avec } \overline{M}_A(\vec{P}) = \overline{M}_G(\vec{P}) + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0 \\ -1,5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2P \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) résistance de l'air :
$$\left\{ \mathcal{F}_R \right\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 1,5R \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{avec } \overline{M}_A(\vec{R}) = \overline{M}_C(\vec{R}) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1,5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5R \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) action du rotor de queue :
$$\left\{ \mathcal{F}_B \right\} = \begin{Bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{M}_Q \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & -4,2Q \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{avec } \overline{M}_A(\vec{Q}) = \overline{M}_B(\vec{Q}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_Q \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_Q \\ -4,2Q \end{bmatrix}$$

d) action du rotor principal :
$$\left\{ \mathcal{F}_A \right\} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M \end{Bmatrix}_A$$

Écrivons le principe fondamental au point A :

$$\left\{ \mathcal{F}_A \right\} + \left\{ \mathcal{F}_B \right\} + \left\{ \mathcal{F}_R \right\} + \left\{ \mathcal{F}_P \right\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & -4,2Q \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 1,5R \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,2P \\ -P & 0 \end{Bmatrix}_A = \{0\}$$

On obtient les équations :

$$F_x - R = 0 \quad (1) \quad 0 = 0 \quad (4)$$

$$F_y + Q = 0 \quad (2) \quad -M_Q + 1,5R - 0,2P = 0 \quad (5)$$

$$F_z - P = 0 \quad (3) \quad M - 4,2Q = 0 \quad (6)$$

(3) donne $F_z = P = 3000 \text{ daN}$; (6) donne $Q = \frac{M}{4,2} = \frac{40}{4,2} = 9,5 \text{ daN}$;

(5) donne $R = \frac{M_Q + 0,2P}{1,5} = 402 \text{ daN}$; (1) donne $F_x = R = 402 \text{ daN}$;

(2) donne $F_y = -Q = -9,5 \text{ daN}$.

□ L'ensemble proposé représente, en coupe et sous forme schématique, l'une des roulettes d'un patin à roulettes en ligne (Roller blade). Le guidage en rotation entre la roulette (1) et le patin (2) est réalisé par deux roulements à billes à contact radial, étanches des deux côtés. La liaison entre (1) et (2) est une liaison pivot d'axe x , les poids des pièces sont négligés. Le glisseur $\vec{B}_{0/1}$ (100 N) schématise l'action exercée par le sol (0) sur la roulette (1). Déterminer le torseur des actions exercées entre (1) et (2).

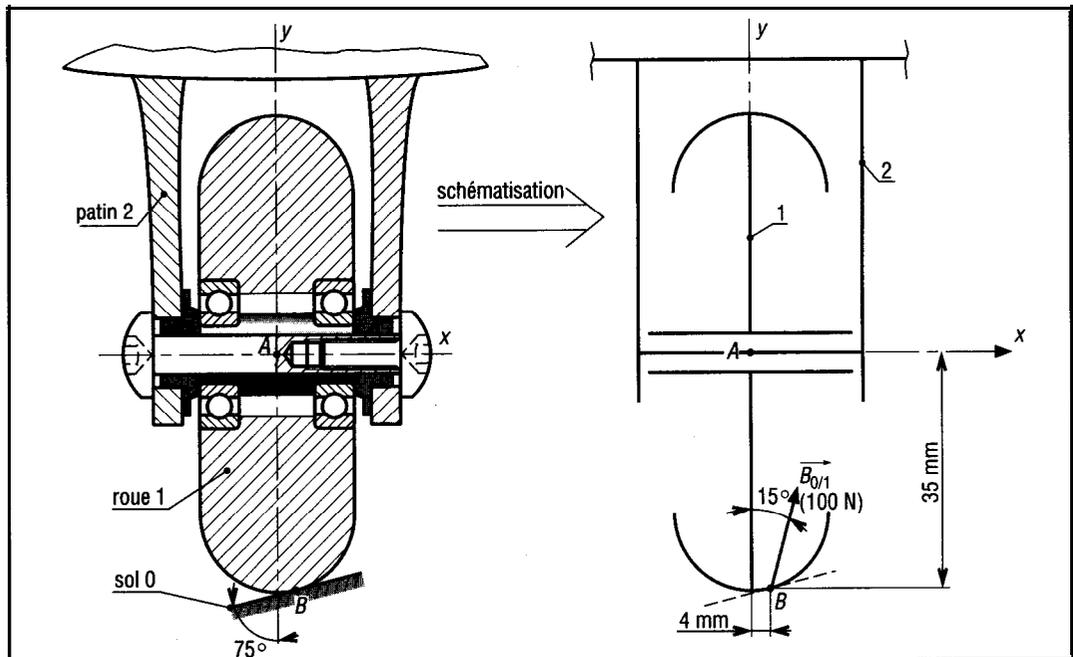


Fig. 17

Résolution

Isolons la roulette (1), le poids étant négligé, celle-ci est soumise à l'action de deux torseurs d'action.

$$\text{a) action au sol : } \left\{ \mathcal{T}_{0/1} \right\} = \begin{Bmatrix} \vec{B}_{0/1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} B_{0/1} \cdot \sin 15^\circ & 0 \\ B_{0/1} \cdot \cos 15^\circ & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 25,88 \text{ N} & 0 \\ 96,59 \text{ N} & 0 \\ 0 & 1,29 \text{ Nm} \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{avec } \vec{M}_A(\vec{B}_{0/1}) = \vec{M}_B(\vec{B}_{0/1}) + \vec{AB} \wedge \vec{B}_{0/1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} + 0,004 \\ -0,035 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 25,88 \\ 96,59 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,29 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) action sur la liaison pivot : } \left\{ \mathcal{T}_{2/1} \right\} = \begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_A$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à la roulette.

$$\left\{ \mathcal{T}_{0/1} \right\}_A + \left\{ \mathcal{T}_{2/1} \right\}_A = \{0\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \mathcal{T}_{2/1} \right\}_A = - \left\{ \mathcal{T}_{0/1} \right\}_A = \begin{Bmatrix} - 25,88 & 0 \\ - 96,59 & 0 \\ 0 & - 1,29 \end{Bmatrix}$$

Résultats

$$X_{2/1} = - 25,88 \text{ N} ; Y_{2/1} = - 96,59 \text{ N} ; N_{2/1} = - 1,29 \text{ Nm} ; Z_{2/1} = 0 \quad M_{2/1} = 0$$

3 L'ensemble proposé en coupe longitudinale et partiellement sous forme schématique est une pompe (ou moteur) hydraulique à cylindrée constante. L'huile hydraulique est aspirée en P puis refoulée en E (400 bars maximum) par le mouvement de va-et-vient d'une série de pistons (4). Chaque piston est manoeuvré en B par une biellette (3) articulée en A sur le rotor de commande (1).

Les poids des pièces et les frottements sont négligés. L'étude est limitée au piston (diamètre $a' = 30$ mm) en fin d'échappement et occupant la position indiquée par les figures.

Déterminons les actions exercées sur les liaisons $L_{1/3}$, $L_{3/4}$ et $L_{4/2}$.

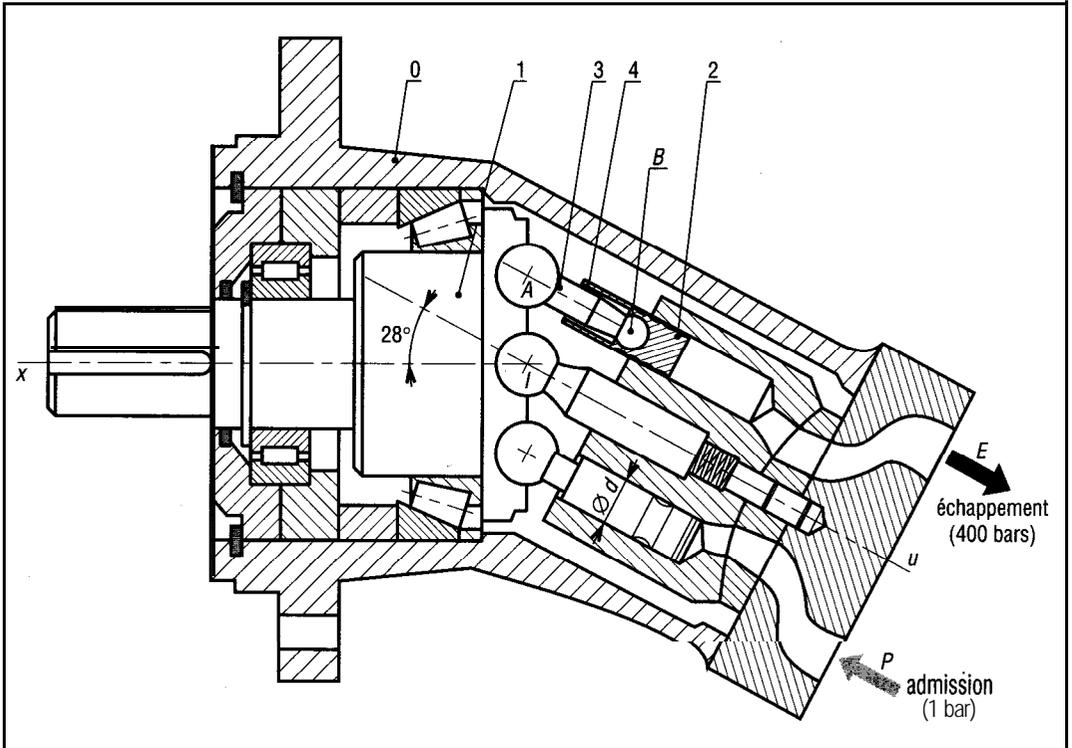


Fig. 18

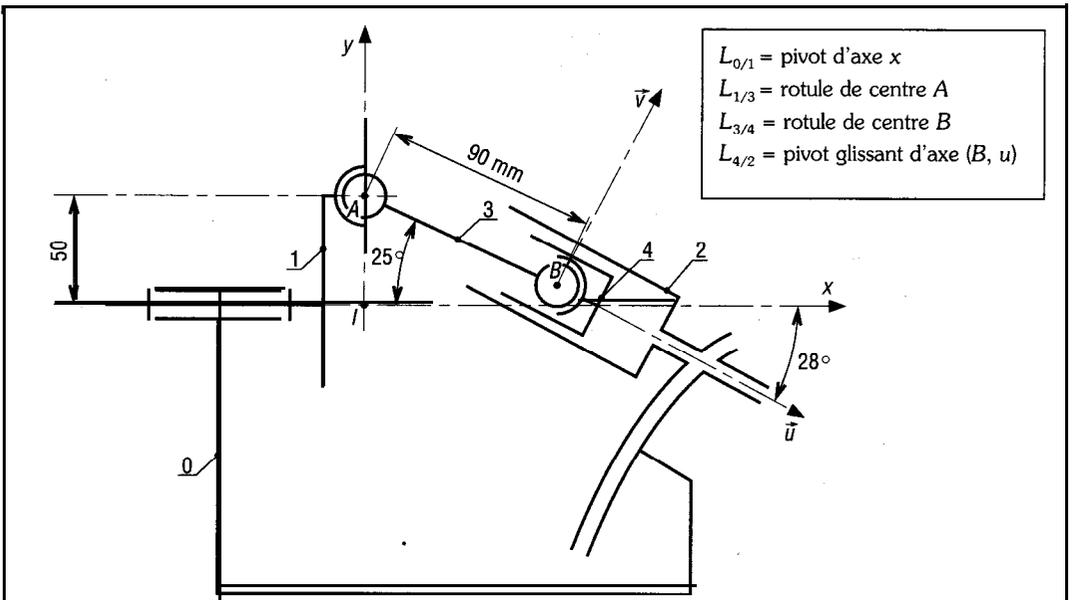


Fig. 19

Résolution

a) Isolons la biellette (3)

Le poids étant négligé, la biellette est soumise à l'action des deux torseurs $\{\mathcal{T}_{1/3}\}$ et $\{\mathcal{T}_{4/3}\}$ engendrés par les liaisons rotules en A et B.

$$\text{en A : } \{\mathcal{T}_{1/3}\} = \begin{Bmatrix} X_{1/3} & 0 \\ Y_{1/3} & 0 \\ Z_{1/3} & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overline{S}_{1/3} = X_{1/3} \cdot \overline{i} + Y_{1/3} \cdot \overline{j} + Z_{1/3} \cdot \overline{k}$$

$$\text{en B : } \{\mathcal{T}_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} X_{4/3} & 0 \\ Y_{4/3} & 0 \\ Z_{4/3} & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overline{S}_{4/3} = X_{4/3} \cdot \overline{i} + Y_{4/3} \cdot \overline{j} + Z_{4/3} \cdot \overline{k}$$

Écrivons le principe fondamental en A :

$$\overrightarrow{M_A(S_{4/3})} = \overrightarrow{M_B(S_{4/3})} + \overrightarrow{AB} \wedge \overline{S}_{4/3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,09 \cos 25^\circ \\ -0,09 \sin 25^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_{4/3} \\ Y_{4/3} \\ Z_{4/3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,09 Z_{4/3} \sin 25^\circ \\ -0,09 Z_{4/3} \cos 25^\circ \\ 0,09 Y_{4/3} \cos 25^\circ + 0,09 X_{4/3} \sin 25^\circ \end{bmatrix}$$

$${}_A \{\mathcal{T}_{1/3}\} + {}_A \{\mathcal{T}_{4/3}\} = \{0\} = \begin{Bmatrix} X_{1/3} & 0 \\ Y_{1/3} & 0 \\ Z_{1/3} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_{4/3} & -0,09 Z_{4/3} \sin 25^\circ \\ Y_{4/3} & -0,09 Z_{4/3} \cos 25^\circ \\ Z_{4/3} & 0,09 [Y_{4/3} \cos 25^\circ + X_{4/3} \sin 25^\circ] \end{Bmatrix}$$

On obtient les équations d'équilibre :

$$X_{1/3} + X_{4/3} = 0 \quad (1) \quad -0,09 Z_{4/3} \sin 25^\circ = 0 \quad (4)$$

$$Y_{1/3} + Y_{4/3} = 0 \quad (2) \quad -0,09 Z_{4/3} \cos 25^\circ = 0 \quad (5)$$

$$Z_{1/3} + Z_{4/3} = 0 \quad (3) \quad 0,09 [Y_{4/3} \cos 25^\circ + X_{4/3} \sin 25^\circ] = 0 \quad (6)$$

Les équations (4), (5) et (3) donnent : $Z_{4/3} = 0 = Z_{1/3}$.

Les équations (6), (1) et (2) donnent : $\frac{Y_{4/3}}{X_{4/3}} = -\tan 25^\circ = \frac{X_{1/3}}{Y_{1/3}}$

Remarque : on retrouve le cas déjà abordé en statique plane, si un solide est soumis à l'action de deux glisseurs, ceux-ci sont égaux et opposés et ont même ligne d'action : $\overline{S}_{1/3} = -\overline{S}_{4/3}$ (ligne d'action AB).

$$X_{1/3} = \overline{S}_{1/3} \cos 25^\circ \text{ et } Y_{1/3} = -\overline{S}_{1/3} \sin 25^\circ.$$

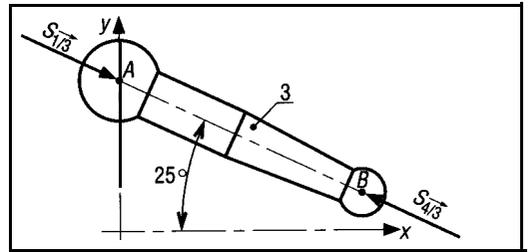


Fig. 20

b) Isolons le piston (4)

Le poids étant négligé, le piston est soumis à l'action de trois torseurs : $\{\mathcal{T}_{2/4}\}$, $\{\mathcal{T}_{3/4}\}$ et $\{\mathcal{T}_{H/4}\}$ l'action de l'huile. Travaillons avec les axes (u, v, z) plus pratiques dans ce cas.

Action de l'huile :

$$pS = (400 \text{ bars}) \times (\pi \times 1,5^2 \text{ cm}^2) = 2827 \text{ daN}$$

$$\{\mathcal{T}_{H/4}\} = \begin{Bmatrix} -pS & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2827 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(u, v, z)}$$

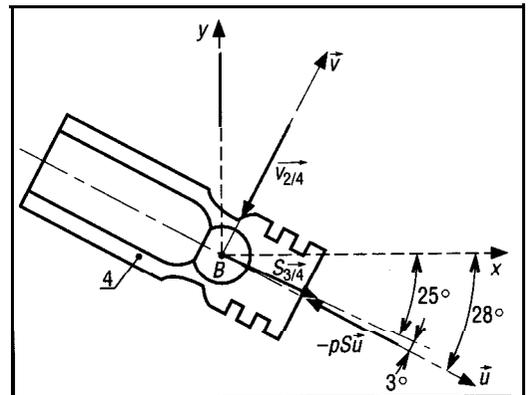


Fig. 21

Action du cylindre 2 :
(la liaison entre 4 et 2. est un pivot
glissant d'axe u)

$$\{ \mathcal{F}_{2/4} \} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_{2/4} & M_{V_{2/4}} \\ Z_{2/4} & N_{2/4} \end{Bmatrix}_{(u, v, z)}$$

Action de la biellette 3 :
 ${}_B \{ \mathcal{F}_{3/4} \} = -{}_B \{ \mathcal{F}_{4/3} \}$ d'après le
principe des actions mutuelles.

$$\{ \mathcal{F}_{3/4} \} = \begin{Bmatrix} S_{3/4} \cos 3^\circ & 0 \\ S_{3/4} \sin 3^\circ & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(u, v, z)}$$

Appliquons le principe fondamental en B :

$${}_B \{ \mathcal{F}_{H/4} \} + {}_B \{ \mathcal{F}_{2/4} \} + {}_B \{ \mathcal{F}_{3/4} \} = \begin{Bmatrix} -2827 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_{2/4} & M_{V_{2/4}} \\ Z_{2/4} & N_{2/4} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_{3/4} \cos 3^\circ & 0 \\ S_{3/4} \sin 3^\circ & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Équations d'équilibre et résultats :

$$S_{3/4} \cos 3^\circ - 2827 = 0 \Rightarrow S_{3/4} = 2827 / \cos 3^\circ = 2831 \text{ daN} \quad (1) \quad M_{V_{2/4}} = 0 \quad (4)$$

$$V_{2/4} + S_{3/4} \sin 3^\circ = 0 \Rightarrow V_{2/4} = -S_{3/4} \sin 3^\circ = -148 \text{ daN} \quad (2) \quad N_{2/4} = 0 \quad (5)$$

$$Z_{2/4} = 0 \quad (3)$$

EXERCICES À RÉSOUDRE

4 Une transmission se compose d'une poulie entraînée par trois courroies trapézoïdales. Le plan (0, Y, Z) est le plan de symétrie de l'ensemble et (0, X) l'axe de rotation. Le diamètre d'enroulement des courroies est de 400 mm. Chaque courroie supporte les tensions \vec{T} (1 500 N, brin tendu) et \vec{t} (300 N, brin mou). a) Écrire les trois tensions \vec{T} sous forme d'un même torseur agissant en A. Même chose pour les trois tensions \vec{t} en B. b) Écrire les deux torseurs précédents au centre O de la liaison. c) En déduire le torseur résultant en ce point.

Réponse

$$X_0 = 0; Y_0 = 5318 \text{ N}; Z_0 = -625 \text{ N}; L_0 = -720 \text{ Nm}; M_0 = N_0 = 0.$$

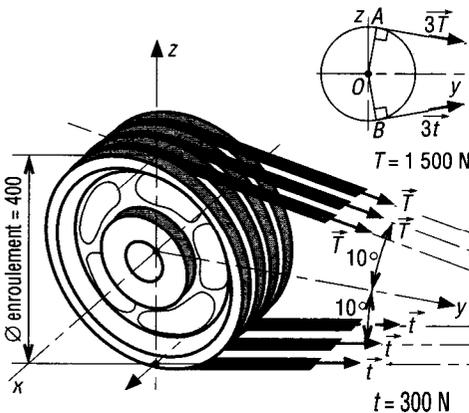


Fig. 22

5 Une roue dentée à denture hélicoïdale supporte au point A, exercée par une autre roue dentée, une action dont les composantes sont \vec{F}_A (200 daN, charge axiale), \vec{F}_R (100 daN, charge radiale) et \vec{F}_T (400 daN, charge tangentielle). a) Écrire le torseur correspondant à ces actions au point A. b) Écrire le torseur en O et B.

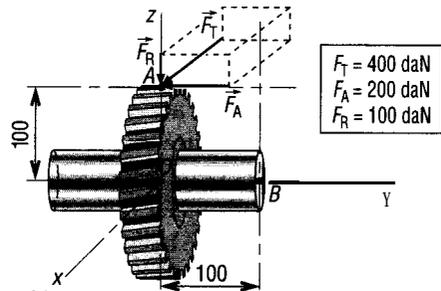


Fig. 23

6 Unbrotoi à cinq axes supporte en A la charge \vec{F} (200 N) et le couple \vec{M}_A (50 Nm) indiqués sur la figure. Écrire le torseur correspondant à ces deux actions en A, B, C et O.

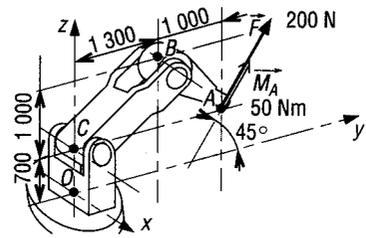


Fig. 24

Les hélices d'un avion bimoteur sont supposées tourner en sens inverse l'une de l'autre. $\vec{F} = 3\,000 \vec{i}$ (N) et $\vec{M}_A = 40 \vec{i}$ (Nm) schématisent les actions exercées par l'air sur l'hélice A. \vec{F} et $\vec{M}_B = -40 \vec{i}$ (Nm) schématisent les actions sur l'hélice B.

a) Déterminer le torseur résultant des actions en A et B au centre de gravité G.

b) Que devient ce torseur lorsque les hélices tournent dans le même sens ?

Lorsqu'un des deux moteurs tombe en panne ?

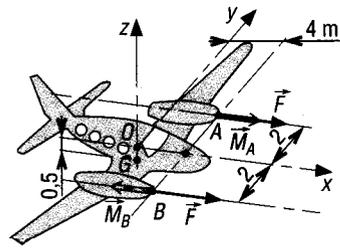


Fig. 25i

Les forces \vec{F} et $-\vec{F}$ (module 150 N) schématisent les actions exercées par l'opérateur sur une clé en croix. L'ensemble occupe la position de la figure, on est en phase desserrage, \vec{F} et $-\vec{F}$ sont dans le plan (A, y, z).

a) Écrire \vec{F} sous forme de torseur en C et $-\vec{F}$ sous forme de torseur en D.

b) Écrire les deux torseurs en A ; en déduire la valeur du torseur résultant en ce point.

c) Écrire le torseur résultant en B, C et D. Quelle est la nature des torseurs ?

d) Quel est le couple de desserrage (Cd) exercé sur l'écrou ?

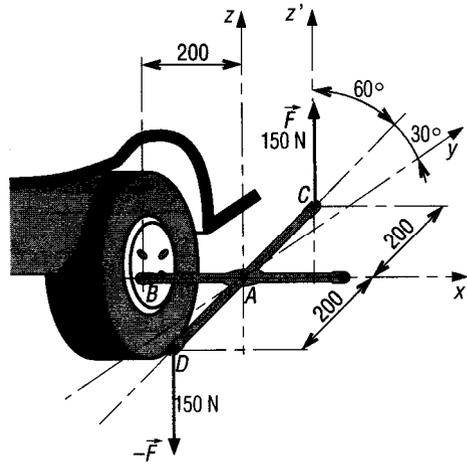


Fig. 26

Réponse

Torseurs couples $\{C_B\} = \{C_C\} = \{C_D\} = \{C_A\}$. $X = Y = Z = 0$;
 $M = N = 0$; $C_d = L = 52 \text{ Nm}$.

9 Pour la perceuse sans fil proposée, la force \vec{F} (5 daN) et le couple C (10 Nm, axe x) schématisent les actions exercées par le mur à percer sur l'extrémité B du foret.

a) Écrire les deux actions précédentes sous forme de torseur au point B. Valeurs du torseur en O et A ?

b) Si le poids de la perceuse est négligé, déterminer les actions exercées en A par la main de l'opérateur.

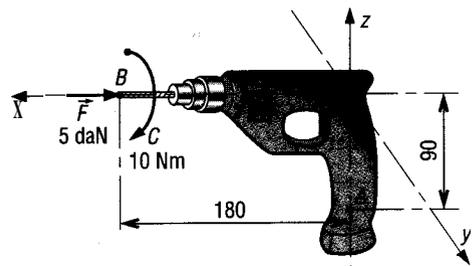


Fig. 27

10 Un renvoi d'angle supporte les couples $\vec{C}_m = 1\,000 \vec{j}$ (Nm) exercé en A par un moteur et $\vec{C}_R = 1\,000 \vec{i}$ (Nm) exercé en B par le récepteur. Les poids sont négligés.

Déterminer le torseur d'encastrement en K $\{T_{O/1}\}$ exercé par le support (0) sur le renvoi.

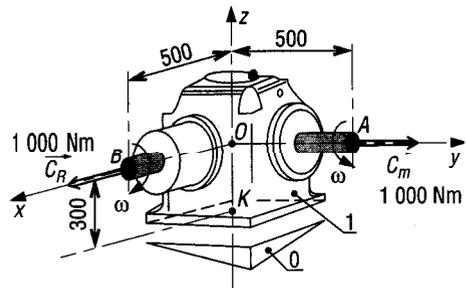


Fig. 28

Réponse

$X = 0$; $Y = 0$; $Z = 0$; $L = -1\,000 \text{ Nm}$;
 $M = -1\,000$; $N = 0$.

11 Reprendre l'exercice 10 avec le réducteur proposé à trois arbres ; $\vec{C}_c = 600 \vec{i}$ (Nm) ; $\vec{C}_B = -400 \vec{i}$ et $\vec{C}_m = 300 \vec{j}$.
Déterminer l'effort d'encastrement en D.

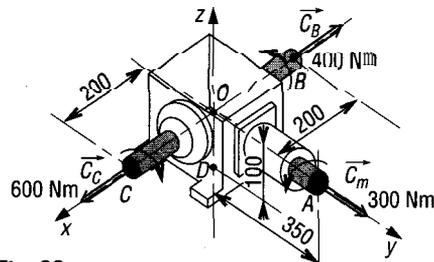


Fig. 29

□ Pour la transmission par cardan proposée, \vec{F} et $-\vec{F}$ (2 000 N) en A et B schématisent les actions exercées par la chape (3) sur le croisillon (2). La liaison entre la chape (1) et le bâti (0) est un pivot de centre M. Isoler l'ensemble (1 + 2) ; en déduire le torseur d'action $\{T_{0/1}\}$ et le couple transmis par l'arbre (1) (\vec{F} et $-\vec{F}$ parallèles à o,x,y).

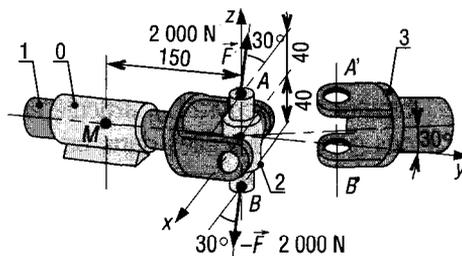


Fig. 30

□ Une clé (1) est utilisée pour desserrer une vis bloquée sur un bâti (0). L'effort \vec{F} exercé par la main de l'opérateur a pour coordonnées : $F_x = 60 \text{ N}$; $F_y = 200$; $F_z = 40$. Si l'ensemble reste en équilibre, déterminer le torseur d'encastrement exercé en A entre (0) et (1) et le couple de desserrage (C_d) appliqué à l'écrou. Le poids de la clé est négligé.

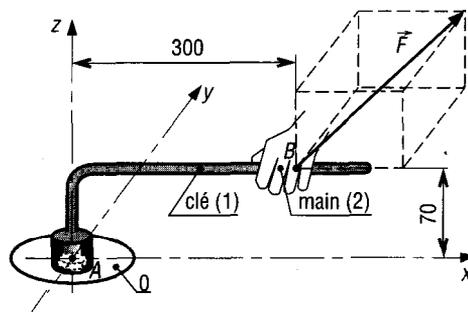


Fig. 31

Réponse
 $X_A = -60 \text{ N}$; $Y_A = -200$; $Z_A = -40$;
 $L_A = +14 \text{ Nm}$; $M_A = +7,8$; $N_A = -60 = -C_d$.

14 Un couvercle (1) de canalisation est ouvert en position horizontale. Le couvercle est maintenu en C par une barre (2) ou BC. La liaison en A entre la canalisation (0) et le couvercle est un pivot d'axe (A, x). \vec{P}_1 , 80 daN, vertical (z) en G schématisse le poids du couvercle. Déterminer les actions exercées en A, B et C.

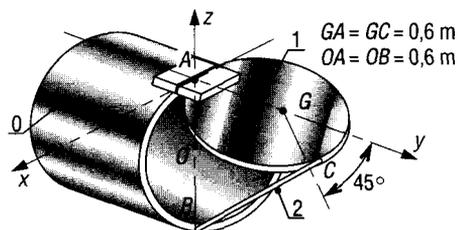


Fig. 32

15 Une roue pivotante est guidée par des roulements à billes. \vec{F} (200 \vec{k} daN) schématisse l'action exercée par le sol. a) Écrire le torseur correspondant à \vec{F} en C. Valeurs du torseur en 0, A et B ? b) Déterminer les actions exercées par les deux liaisons pivots, $L_{2/1}$ en A et $L_{0/1}$ en B si les poids sont négligés.

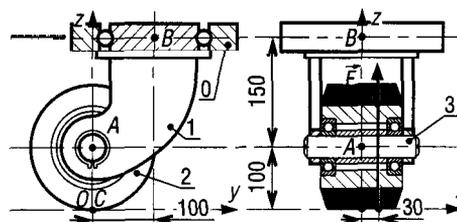


Fig. 33

16 Un arc se compose de trois parties démontables (1), (2) et (3). Après assemblage par vis, l'ensemble est parfaitement solide. Si le tireur exerce un effort \vec{F} de 180 N sur la corde, déterminer le torseur d'encastrement exercé entre (1) et (2) au point A.

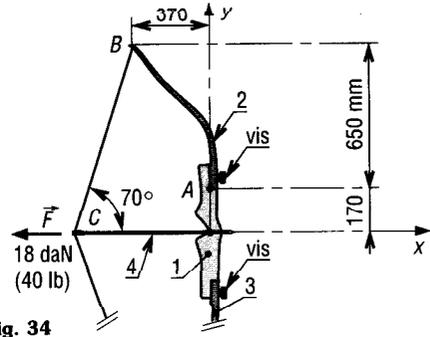


Fig. 34

Réponse
 $X = 9$; $Y = 24,7$ daN ; $Z = 0$; $L = M = 0$; $N = -150$ Nm.

17 Une porte de coffre-fort se compose d'un bras de manœuvre (1), articulé en A et B sur des gonds (0) scellés dans un mur en béton armé, et d'une porte (2) articulée sur le bras précédent. \vec{P}_1 (10 kN) schématise le poids du bras de manœuvre et \vec{P}_2 (20 kN) le poids de la porte. La liaison en B entre (0) et (1) est une rotule de centre B, celle en A une liaison linéaire annulaire. Déterminer les torseurs exercés sur les liaisons en A et B.

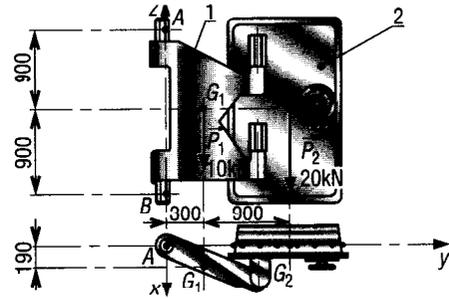


Fig. 35

18 Un arbre de transmission (1) est guidé en rotation par deux roulements à rouleaux coniques. La liaison entre (1) et le bâti (0) est un pivot d'axe y. La partie pignon conique de l'arbre supporte en A la charge \vec{F} telle que : $\vec{F} = 2\,500 \vec{i} + 1\,500 \vec{j} - 1\,000 \vec{k}$ (N). Les poids sont négligés. Déterminer le torseur d'action $\{T_{0/1}\}$ supporté par la liaison pivot et le couple C_m transmis par la partie C de l'arbre.

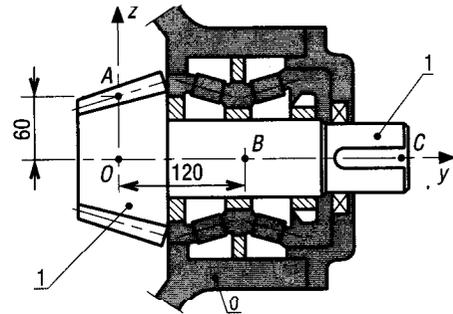


Fig. 36

Réponse
 $X = -2\,500$ N ; $Y = -1\,500$; $Z = 1\,000$; $L = -30$ Nm ; $M = 0$; $N = -300$; $C_m = 150$.

19 L'ensemble proposé représente schématiquement une pédale de commande. L'action du pied sur la pédale 1, en B, permet de relever la tige de commande 2. La pédale est articulée (liaison pivot de centre A) sur le bâti 0, de même la liaison entre 1 et 2 est une liaison pivot de centre C. \vec{T} [10 daN, direction (C, Z)] schématise la tension de la tige et \vec{F} (direction B, Z) l'action du pied. $L_{2/1}$ = pivot d'axe (C,x). L'ensemble de la pédale étant en équilibre, déterminer \vec{F} et le torseur d'action de la liaison pivot en A ($T_{0/1}$).

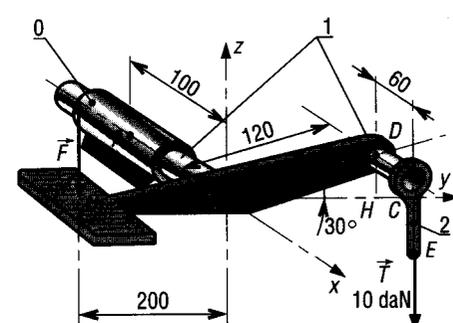


Fig. 37

Réponse
 $\vec{F} = -5,2 \vec{k}$ (daN) ; $X = Y = 0$;
 $Z = 15,2$ daN ; $L = N = 0$;
 $M = -21,2$ Nm.

□  support proposé assure le maintien de trois câbles dont les tensions sont \vec{F}_A [1 000 N, plan (0, Y, Z)], \vec{F}_B [600 N, plan (0, X, Y)] et \vec{F}_C (700 N). Le support 1 est fixé dans le mur 0 (liaison encastrement de centre E). a) Écrire pour chaque tension le torseur correspondant. b) Isoler le support ; en déduire le torseur d'encastrement entre 0 et 1 en E.

Réponse

$$X_{0/1} = -788 \text{ N} ; Y_{0/1} = -1\,810 ; Z_{0/1} = -204 ; \\ L_{0/1} = 15,5 \text{ Nm} ; M_{0/1} = 23 ; N_{0/1} = 25,2.$$

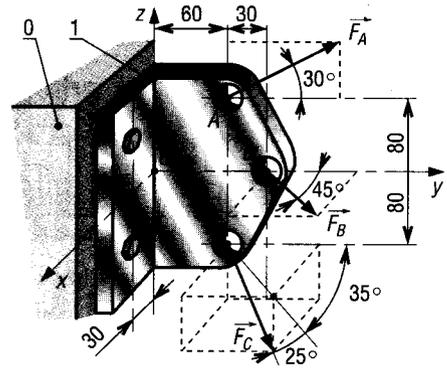


Fig. 38

□ Une potence articulée se compose d'un socle 0 solidaire d'une colonne 1 (liaison encastrement de centre 0), d'une flèche articulée 2 [pivot de centre A et d'axe (0, Z)], d'une contre-flèche articulée (3) [pivot de centre B et d'axe (C, Z)] et d'un palan 4 fixé à l'extrémité D. \vec{P} schématise le poids de la charge à manœuvrer. Al3 et CD se déplacent dans des plans horizontaux parallèles à (0, X, Y). AO, BC et DE sont verticales (parallèles à 0, Z). Écrire le torseur correspondant à la charge \vec{P} en E, D, C, B, A et 0. Supposer α variable. Déterminer les torseurs d'action sur les liaisons pivots (en A entre 1 et 2, en B entre 2 et 3) et sur la liaison encastrement (en 0 entre 0 et 1). Les poids sont négligés.

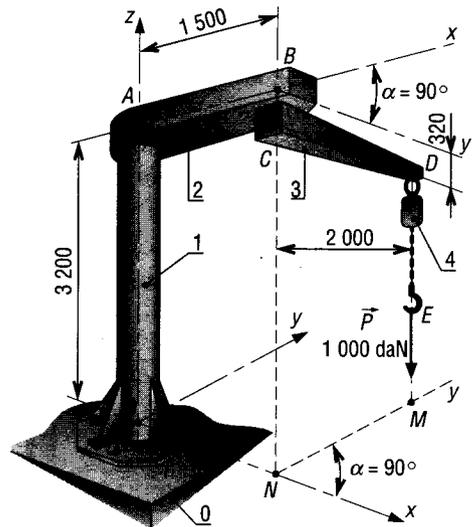


Fig. 39

22 Une unité de fraisage est intégrée dans une chaîne de fabrication automatisée. La force \vec{F} et le couple \vec{M} schématisent les efforts de coupe sur la fraise (3) en A. La liaison entre l'arbre porte-fraise 2 et le bâti (1) est une liaison pivot de centre 0 et d'axe (0, Y), la liaison entre (1) et la semelle fixe 0, une glissière de centre B et d'axe (B, X). \vec{T} schématise l'action du dispositif de mise en translation intégré à la semelle (vérin, vis..). Déterminer \vec{T} et le torseur d'action sur la liaison glissière en B entre (0) et (1).

$$M = 50 \text{ Nm} \\ \vec{M} = -50 \vec{j} \\ \vec{F} \begin{cases} F_x = 60 \text{ daN} \\ F_y = 20 \text{ daN} \\ F_z = -30 \text{ daN} \end{cases}$$

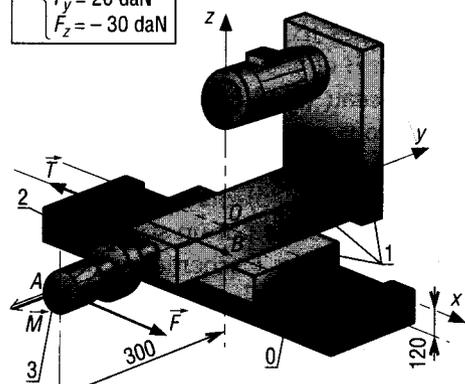


Fig. 40

Réponse

$$T = 60 \text{ daN} ; X = 0 ; Y = -20 \text{ daN} ; \\ Z = 30 ; L = -66 \text{ Nm} ; M = -22 ; \\ N = -180.$$

□ L'arbre de transmission propose est guidé en rotation par deux roulements à billes à contact radial en A et B. L'arbre reçoit en D le couple $\vec{C} = 100 \vec{i}$ (Nm) et entraîne en E une roue dentée (non représentée) qui exerce l'effort \vec{E} ($\vec{E} = 1\,000 \vec{i} - 500 \vec{j} + E_z \vec{k}$).

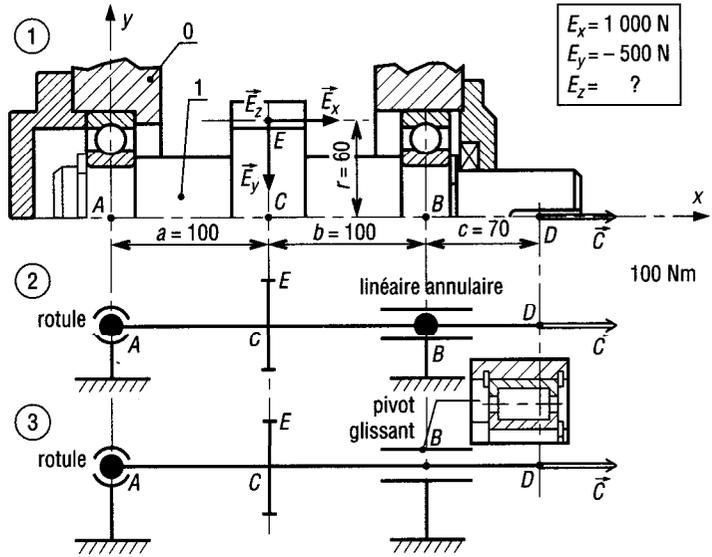


Fig. 41

a) En fonctionnement normal (charges et flexions d'arbre moyennes), la schématisation des liaisons se ramène au cas de la figure 2 : rotule en A et linéaire annulaire en B. Déterminer les torseurs d'actions sur les liaisons en A et B. Calculer E_z . b) Montrer que l'ensemble des deux liaisons en A et B se ramène à une liaison pivot d'axe (A, x). c) Le roulement B est remplacé par un roulement à rouleaux cylindriques les charges et les flexions d'arbres sont supposées plus importantes et la schématisation se ramène au cas de la figure 3 : rotule en A et pivot glissant en B. Reprendre les questions a) et b).

□ Un pont élévateur, de capacité 2 000 daN, est utilisé pour des travaux de maintenance sur véhicules automobiles. Le pont se compose de deux colonnes (1) identiques, équipées chacune de deux paires de bras (3) et (4) articulés (pivots d'axes (B, z) et (C, z) en B et C sur un coulisseau (2). Le coulisseau, en liaison glissante d'axe (0, z) par rapport à la colonne, est manoeuvré (levage ou descente) par une tige filetée (5) entraînée par un motoréducteur (6). Le mouvement est transmis à la deuxième colonne par un système à roues et chaîne.

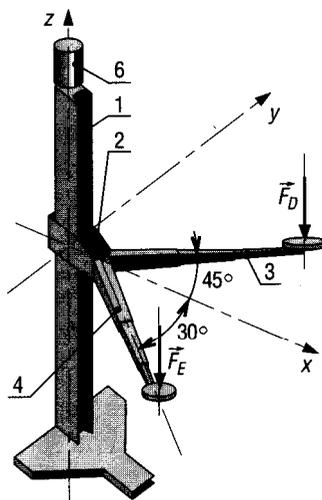


Fig. 42

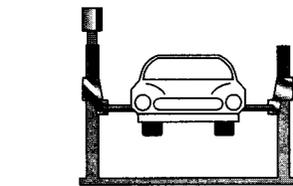


Fig. 43

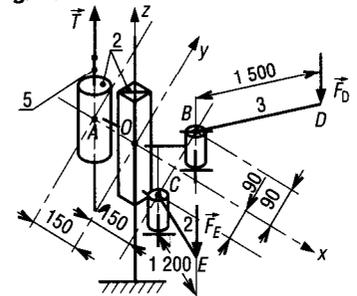


Fig. 44

Le glisseur \vec{T} schématise la tension de la vis, ligne d'action (A, z), $\vec{F}_D = -500 \vec{k}$ (daN) et $\vec{F}_E = -350 \vec{k}$ sont les actions exercées par l'automobile. Les poids et les frottements sont négligés, l'ensemble est en équilibre.

Déterminer les torseurs d'actions $\{T_{1/2}\}_O$, $\{T_{2/4}\}_C$, $\{T_{2/3}\}_B$ et la valeur de \vec{T} .

$T = 850 \text{ daN}$; $X_{1/2} = Y_{1/2} = Z_{1/2} = 0$; $L_{1/2} = 3\,335 \text{ Nm}$; $M_{1/2} = -11490$; $X_{2/3} = Y_{2/3} = 0$; $Z_{2/3} = 500$; $L_{2/3} = -M_{2/3} = 5\,300$; $X_{2/4} = Y_{2/4} = 0$; $Z_{2/4} = 350$; $L_{2/4} = -2\,100$; $M_{2/4} = -3\,640 \text{ Nm}$.

Réponse