Exercice N°1 : vérification de l'égalité de deux relations logiques :

1. $\mathbf{cd + abc + b\bar{d} = cd + b\bar{d}}$

Dans le premier membre, on multipliant le deuxième membre par $(d + \bar{d})$:

$\mathbf{cd + abc(d + \bar{d}) + b\bar{d}}$ **(Complémentation)**

$= \mathbf{cd + abcd + acb\bar{d} + b\bar{d}}$ **(Distributivité)**

$= \mathbf{cd(1 + ab) + b\bar{d}(1 + ac)}$ **(Distributivité et élément absorbant)**

$= \mathbf{cd + b\bar{d}}$

Donc Les deux relations sont identiques**.**

2. $\mathbf{(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) = (a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c})}$

On développe le terme commun dans les deux membres:

$(a + \bar{b})(a + b) = aa + ab + a\bar{b} + \bar{b}b$ **(Distributivité, complémentation et idempotence)**

$= a + a(b + \bar{b}) + 0$ **(Distributivité et complémentation)**

$= a + a = \mathbf{a}$ **(Idempotence)**

Le premier membre : $(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c}) = a(\bar{b} + \bar{c}) = a\bar{b} + a\bar{c}$ (1) **(Distributivité)**

Le deuxième membre : $(a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c}) = a(a + \bar{c}) = a + a\bar{c}$ **(2) (Distributivité)**

Donc $\mathbf{(a + \bar{b})(a + b)(\bar{b} + \bar{c}) \neq (a + \bar{b})(a + b)(a + \bar{c})}$ Les deux relations ne sont pas identiques

3. $\mathbf{ab + ac + bc = (a + b)(b + c)(c + a)}$

On développe le deuxième membre:

$(a + b)(b + c)(c + a) = (ab + ac + bb + bc)(c + a)$ (Distributivité)

$= [ab + ac + b(1 + c)](c + a)$ (Distributivité et élément absorbant)

$= (b(a + 1) + ac)(c + a)$ (Distributivité et élément absorbant)

$= (b + ac)(c + a) = bc + ba + acc + aac$ (Distributivité et idempotence)

$= bc + ab + ac + ac$ (Idempotence)

$= bc + ab + ac$

Donc $ab + ac + bc = (a + b)(b + c)(c + a)$ Les deux relations sont identiques

Exercice N°2 :

Conversion d'une forme standard à la forme canonique :

1. la fonction : $\mathbf{f_1(a, b, c, d) = \bar{b}c + a\bar{b}d + a\bar{c}d + \bar{a}c\bar{d}}$

1.1. Première forme canonique:

1ere méthode graphique (tableau de Karnaugh)

1. $\mathbf{f_1(a, b, c, d) = \bar{b}c + a\bar{b}d + a\bar{c}d + \bar{a}c\bar{d}}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 (0)	0 (4)	0 (12)	0 (8)
01	0 (1)	0 (5)	1 (13)	1 (9)
11	1 (3)	0 (7)	0 (15)	1 (11)
10	1 (2)	1 (6)	0 (14)	1 (10)

En traçant le tableau de Karnaugh on trouve sept termes.

$$f_1(a, b, c, d) = \underbrace{a\bar{b}cd}_{11} + \underbrace{a\bar{b}c\bar{d}}_{10} + \underbrace{\bar{a}\bar{b}cd}_{3} + \underbrace{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}}_{2} + \underbrace{a\bar{b}\bar{c}d}_{9} + \underbrace{ab\bar{c}d}_{13} + \underbrace{\bar{a}bc\bar{d}}_{6}$$

2ième méthode algébrique (Théorème de Shannon)

$f_1(a, b, c, d) = \bar{b}c(a + \bar{a}) + a\bar{b}d(c + \bar{c}) + a\bar{c}d(b + \bar{b}) + \mathbf{\bar{a}c\bar{d}}(b + \bar{b})$

$f_1(a, b, c, d) = a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}cd + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$

$f_1(a, b, c, d) = a\bar{b}c(d + \bar{d}) + \bar{a}\bar{b}c(d + \bar{d}) + a\bar{b}cd + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$

$f_1(a, b, c, d) = a\bar{b}cd + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}cd + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$

$$f_1(a, b, c, d) = \underbrace{a\bar{b}cd}_{11} + \underbrace{a\bar{b}c\bar{d}}_{10} + \underbrace{\bar{a}\bar{b}cd}_{3} + \underbrace{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}}_{2} + \underbrace{a\bar{b}\bar{c}d}_{9} + \underbrace{ab\bar{c}d}_{13} + \underbrace{\bar{a}bc\bar{d}}_{6}$$

2. Deuxième forme canonique: on peut utiliser le tableau de Karnaugh ou bien la table de vérité

$$\overline{f_1(a, b, c, d)} = \underbrace{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{0} + \underbrace{\bar{a}\bar{b}\bar{c}d}_{1} + \underbrace{\bar{a}b\bar{c}\bar{d}}_{4} + \underbrace{\bar{a}b\bar{c}d}_{5} + \underbrace{\bar{a}bcd}_{7} + \underbrace{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{8} + \underbrace{ab\bar{c}\bar{d}}_{12} + \underbrace{abc\bar{d}}_{14} + \underbrace{abcd}_{15}$$

$$f_1(a, b, c, d) = (a + b + c + d)(a + b + c + \bar{d})(a + \bar{b} + c + d)(a + \bar{b} + c + \bar{d})(a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + b + c + d)$$
$$(\bar{a} + \bar{b} + c + d)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$$

2. la fonction : $\mathbf{f_2(a,b,c,d) = (a+\bar{b}+\bar{c})(a+\bar{b})(a+\bar{c}+\bar{d})(\bar{a}+b+c+\bar{d})(b+\bar{c}+\bar{d})}$

2.1. Première forme canonique:

<u>1[ere] méthode graphique (tableau de Karnaugh)</u>

$\mathbf{\overline{f_2(a,b,c,d)} = \bar{a}.b.c+\bar{a}.b+\bar{a}.c.d+a.\bar{b}.\bar{c}.d+\bar{b}.c.d}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	*0* 1	*4* 0	*12* 1	*8* 1
01	*1* 1	*5* 0	*13* 1	*9* 0
11	*3* 0	*7* 0	*15* 1	*11* 0
10	*2* 1	*6* 0	*14* 1	*10* 1

$$f_2(a,b,c,d) = \underbrace{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{0}+\underbrace{\bar{a}\bar{b}\bar{c}d}_{1}+\underbrace{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}}_{2}+\underbrace{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{8}+\underbrace{a\bar{b}c\bar{d}}_{10}+\underbrace{ab\bar{c}\bar{d}}_{12}+\underbrace{ab\bar{c}d}_{13}+\underbrace{abc\bar{d}}_{14}+\underbrace{abcd}_{15}$$

<u>2.2. Deuxième forme canonique:</u>

<u>1[ère] méthode (tableau de Karnaugh)</u>

$$\overline{f_1(a,b,c,d)} = \underbrace{\bar{a}\bar{b}cd}_{3}+\underbrace{\bar{a}b\bar{c}\bar{d}}_{4}+\underbrace{\bar{a}b\bar{c}d}_{5}+\underbrace{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{6}+\underbrace{\bar{a}bcd}_{7}+\underbrace{a\bar{b}\bar{c}d}_{9}+\underbrace{a\bar{b}cd}_{11}+\underbrace{a\bar{b}c\bar{d}}_{10}$$

$$f_2(a,b,c,d) = \left(a+b+\bar{c}+\bar{d}\right)\left(a+\bar{b}+c+d\right)\left(a+\bar{b}+c+\bar{d}\right)(\bar{a}+b+c+d)\left(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}\right)\left(\bar{a}+b+c+\bar{d}\right)$$
$$\left(\bar{a}+b+\bar{c}+\bar{d}\right)(\bar{a}+b+\bar{c}+d)$$

<u>2[ième] méthode (algébrique):</u>

$$f_2(a,b,c,d) = (a+\bar{b}+\bar{c})(a+\bar{b})(a+\bar{c}+\bar{d})(\bar{a}+b+c+\bar{d})(b+\bar{c}+\bar{d})$$
$$f_2(a,b,c,d) = (a+\bar{b}+\bar{c}+d.\bar{d})(a+\bar{b}+c\bar{c})(a+\bar{c}+\bar{d}+b\bar{b})(\bar{a}+b+c+\bar{d})(b+\bar{c}+\bar{d}+a\bar{a})$$
$$f_2(a,b,c,d) = \left(a+\bar{b}+\bar{c}+d\right)\left(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}\right)\left(a+\bar{b}+c+d.\bar{d}\right)\left(a+\bar{b}+\bar{c}+d.\bar{d}\right)\left(a+\bar{c}+\bar{d}+b\right)(a+\bar{c}+\bar{d}+\bar{b})$$
$$(\bar{a}+b+c+\bar{d})(b+\bar{c}+\bar{d}+a)(b+\bar{c}+\bar{d}+\bar{a})$$
$$f_2(a,b,c,d) = \left(a+\bar{b}+\bar{c}+d\right)\left(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}\right)\left(a+\bar{b}+c+d\right)\left(a+\bar{b}+c+\bar{d}\right)\left(a+\bar{b}+\bar{c}+d\right)\left(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}\right)$$
$$\left(a+b+\bar{c}+\bar{d}\right)\left(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}\right)(\bar{a}+b+c+\bar{d})\left(a+b+\bar{c}+\bar{d}\right)\left(\bar{a}+b+\bar{c}+\bar{d}\right)$$

3. la simplification de f_3 en utilisant la méthode de Karnaugh :

$$f_3 = \underbrace{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{\substack{0000\\0}}+\underbrace{\bar{a}b\bar{c}\bar{d}}_{\substack{0100\\4}}+\underbrace{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{\substack{1000\\8}}+\underbrace{\bar{a}b\bar{c}d}_{\substack{0101\\5}}+\underbrace{ab\bar{c}d}_{\substack{1101\\13}}+\underbrace{abc\bar{d}}_{\substack{1110\\14}}+\underbrace{ab\bar{c}d}_{\substack{1101\\13}}+\underbrace{\bar{a}bcd}_{\substack{0111\\7}}+\underbrace{abcd}_{\substack{1111\\15}}+\underbrace{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}}_{\substack{0010\\2}}+\underbrace{\bar{a}bc\bar{d}}_{\substack{0110\\6}}+\underbrace{\bar{a}bc\bar{d}}_{\substack{0110\\10}}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	*0* 1	*4* 1	*12* 0	*8* 1
01	*1* 0	*5* 1	*13* 1	*9* 0
11	*3* 0	*7* 1	*15* 1	*11* 0
10	*2* 1	*6* 1	*14* 0	*10* 1

$F = b\bar{d} + \bar{a}b + bd$

4. Le logigramme de f_3