

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Batna 2



جامعة باتنة 2

Faculté de Technologie

كلية التكنولوجيا

Département du Socle Commun en Sciences et Technologies

قسم الجذع القاعدي في العلوم والتكنولوجيا

**POLYCOPIE PEDAGOGIQUE**

**ELECTRECITE**

**(PHY2)**

Par

Dr. BEDDIAF RAOUF

Maitre de conférences B

*Année universitaire 2017/2018.*

# *Préface*

Ce manuel a été conçu à l'intention des étudiants de la première année des filières techniques des universités et des classes préparatoires aux Grandes Écoles. Il correspond au programme officiel du module d'électricité (PHYS2) dans le cadre de la formation LMD.

Les prérequis de ce module sont les suivants :

- 1) Notions de champ vectoriel et champ scalaire.
- 2) Notions de calcul vectoriel.
- 3) Charge électrique.

Le programme d'électricité du S2 se compose de deux grandes parties :

La première comporte les éléments de base de la théorie électromagnétique ; L'électrostatique que nous présentons aux Chapitres I (champ et potentiel électrostatique), II (les conducteurs) et III (courant électrique).

La seconde partie traite le Magnétostatique dans le Chapitre IV.

La fin de chaque chapitre est illustrée par des exemples et des exercices qui constituent une application, à des problèmes concrets, des lois introduites dans le cours. La résolution de ces exercices permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien assimilé le cours, d'estimer les ordres de grandeur et d'attacher de l'importance à l'analyse dimensionnelle aux unités de mesures et à la précision d'un résultat numérique.

Les objectifs de ce cours sont :

- 1) Identifier les sources des champs électrique et magnétique.
- 2) Calculer et différencier les champs vectoriel et scalaire.
- 3) Calculer le champ et le potentiel électrique produit par une distribution de charge.
- 4) Calculer le champ magnétique produit par un courant électrique.

## Table des matières

1	ÉLECTRISATION – CHARGE ELEMENTAIRE.....	6
1.1.1	Expériences qualitatives.....	6
1.1.2	Particules et charges élémentaires.....	6
1.1.3	Charges ponctuelles.....	6
1.2	Loi de coulomb.....	8
1.2.1	Force d'interaction entre charges statiques.....	8
1.2.2	Champ d'une charge ponctuelle.....	8
1.3	Champ d'une distribution.....	9
1.3.1	Principe de superposition.....	9
1.3.2	Champs créés par des distributions de charges.....	9
1.4	Potentiel électrostatique.....	10
1.4.1	Définition.....	10
1.4.2	Circulation du champ d'une charge ponctuelle.....	10
1.4.3	Champ de gradient.....	10
1.5	Potentiel électrostatique.....	11
1.5.1	Circulation du champ et potentiel.....	11
1.6	Potentiel créé par une distribution de charges.....	12
1.6.1	Superposition des effets.....	12
1.6.2	Expressions du potentiel.....	12
1.7	Énergie potentielle d'interaction électrostatique.....	13
1.7.1	Énergie potentielle d'une charge placée dans un champ.....	13
1.8	Le théorème de Gauss.....	13
1.8.1	Flux du champ d'une charge.....	13
1.8.2	Flux du champ électrostatique.....	14
1.9	Théorème de Gauss.....	15
1.10	Dipôle électrostatique.....	15
1.10.1	Moment dipolaire.....	15
1.10.2	Doublet de charges.....	15
1.10.3	Objets polaires.....	15
1.10.4	Potentiel et champ créés par un dipôle.....	16
1.10.5	Actions d'un champ électrostatique sur un dipôle.....	17
1.11	Applications et exercices.....	18
2	Définition.....	24
2.1	Equilibre électrostatique.....	24

2.1.1	Champ électrique .....	24
2.1.2	Potentiel électrique.....	24
2.2	Répartition des charges.....	25
2.2.1	A l'intérieur du conducteur. ....	25
2.2.2	A la surface du conducteur : Expérience du cylindre de Faraday. ....	25
2.3	Champ au voisinage d'un conducteur : théorème de Coulomb.....	26
2.4	Pression électrostatique.....	27
2.5	Phénomènes d'influence.....	27
2.5.1	Éléments correspondants.....	27
2.5.2	Influence partielle.....	27
2.5.3	Influence totale .....	28
2.6	Conducteur creux .....	29
2.7	Capacité d'un conducteur .....	29
2.7.1	Condensateurs.....	30
2.7.2	Capacité d'un condensateur.....	30
2.7.3	Association de condensateurs.....	31
2.8	Energie.....	32
2.8.1	Energie électrostatique d'un conducteur.....	32
2.8.2	Energie emmagasinée dans un condensateur .....	32
2.9	Applications et exercices.....	33
3	Courants électriques .....	36
3.1.1	Origine du courant électrique .....	36
3.1.2	Courant permanent.....	36
3.1.3	Sens conventionnel du courant.....	36
3.1.4	Intensité du courant .....	37
3.1.5	Vecteur densité de courant.....	37
3.1.6	Mouvement des électrons dans le vide .....	38
3.1.7	Mouvement des électrons dans un conducteur .....	38
3.2	Loi d'ohm.....	39
3.2.1	Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.....	39
3.2.2	Forme locale de la loi d'Ohm.....	39
3.3	Applications et exercices.....	41
4	Introduction.....	43
4.1	Propriétés des aimants.....	43
4.2	Champ magnétique .....	43
4.3	Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une charge électrique. ....	44

4.3.1	Force de Lorentz .....	44
4.4	Action d'un champ magnétique sur un courant électrique. ....	45
4.4.1	Force de Laplace .....	45
4.5	Champ magnétique crée par un courant .....	46
4.5.1	Loi de Biot et Savart.....	46
4.6	Théorème d'ampère.....	46
4.6.1	Vecteur excitation magnétique .....	46
4.6.2	Circulation de l'excitation magnétique le long d'un contour fermé .....	46
4.7	Flux magnétique .....	47
4.7.1	Flux du champ magnétique à travers une surface .....	47
4.8	Les équations de Maxwell .....	48
4.8.1	Enonce des équations.....	48
4.9	Applications et exercices .....	49

## CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

### 1 ÉLECTRISATION – CHARGE ELEMENTAIRE

#### 1.1.1 Expériences qualitatives

Les expériences d'électrisation sont connues depuis l'Antiquité ; celles-ci (vues dans les classes antérieures) mettent en évidence quelques propriétés électriques de la matière :

- certains matériaux (verre, plexiglas...) possèdent, lorsqu'ils ont été frottés avec d'autres matériaux, la propriété d'attirer des corps légers. Nous disons qu'ils ont été électrisés ;
- les interactions observables entre corps électrisés conduisent à distinguer deux types d'électrisation. Deux objets semblablement électrisés se repoussent et, dans le cas contraire, ils s'attirent.

L'étude quantitative des lois d'attraction et de répulsion fut réalisée par A. de Coulomb (1736-1806), qui proposa sa loi d'interaction en 1785.

#### 1.1.2 Particules et charges élémentaires

Des expériences datant de la fin du XIXe siècle (J.-J. Thomson, 1856-1940 et J. Perrin, 1870-1942) conduisent à une interprétation de la matière en termes de corpuscules élémentaires pouvant porter des charges électriques positives ou négatives.

**L'unité de charge est le coulomb, noté C.**

- Les *protons*, chargés positivement, constituent avec les *neutrons*, de charge nulle, les noyaux des atomes.
- Les *électrons*, chargés négativement, constituent l'enveloppe (*nuage électronique*) de ces mêmes atomes.
- La charge de l'électron vaut  $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Fait remarquable, celle du proton lui est exactement opposée ; elle est égale à  $+e$ .

Lors des expériences classiques d'électrisation, les charges positives, liées aux noyaux, restent au sein des supports matériels. On obtient une électrisation positive ou négative des objets utilisés lorsque des électrons sont respectivement arrachés ou apportés.

**Les charges observées sont toujours des multiples entiers de la charge élémentaire  $e$  : la charge électrique est quantifiée.**

#### 1.1.3 Charges ponctuelles

Les lois de l'électromagnétisme donnent une description satisfaisante du comportement des particules chargées tant que les distances mises en jeu restent grandes devant cette distance élémentaire.

Assimiler les particules élémentaires chargées à des points matériels portant une charge constitue ainsi une approximation convenable.

Nous définirons une distribution de  $N$  charges ponctuelles par l'ensemble des positions

$\vec{r}_i = \overrightarrow{OM}_i$  des charges  $q_i$ ,  $i$  variant de 1 à  $N$ .

**1.1.3.1 Charges linéiques**

Lorsque la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est filiforme, nous définirons de façon analogue une distribution linéique de charges le long de la courbe (C) en introduisant une densité linéique  $\lambda$  (Figure 1).

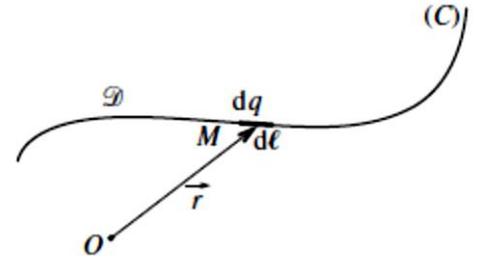


Fig.1a. Charge  $dq = \lambda dl$  en M

**1.1.3.2 Charges surfaciques**

Supposons que la distribution  $\mathcal{D}$  présente l'aspect d'une nappe chargée : la densité volumique de charges est non nulle à l'intérieur d'une écorce d'épaisseur  $h$  très faible à l'échelle macroscopique d'étude (Figure 2a). Pour une surface élémentaire  $dS$  de cette nappe, la charge portée par le volume

$$d\tau = hS \text{ est } dq = \rho d\tau = \rho hS.$$

L'épaisseur  $h$  étant très petite, considérons la représentation limite «  $h$  tend vers zéro à charge  $dq$  constante » pour un élément de surface  $dS$  donné. Le produit  $\rho h$ , que nous noterons  $\sigma$ , doit être maintenu constant en considérant cette description limite de la distribution  $\mathcal{D}$  (Figure 2b).

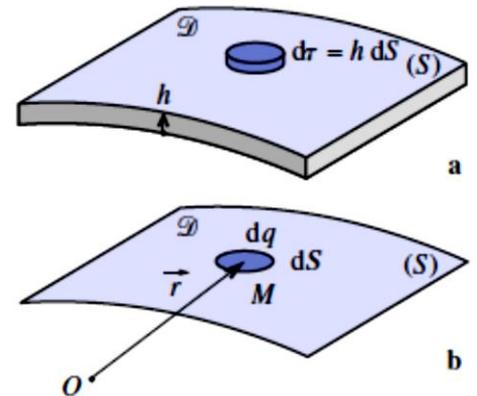


Fig.2. Écorce chargée (a) et modélisation surfacique (b).

**1.1.3.3 Charges volumiques**

La présence de charges dans un milieu est en général modélisée par une charge délocalisée, nivelée, décrite par la charge volumique . Pour un milieu chargé de volume  $V$ , la distribution de charges  $\mathcal{D}$  est définie par la donnée de  $\rho$  à l'intérieur de la surface  $S$  contenant  $V$  (Figure 3).

**La charge contenue dans un volume élémentaire  $d\tau$  (petit à l'échelle macroscopique et de l'ordre de  $l^3$ ) est :**

$$dq = \rho d\tau .$$

**La densité volumique  $\rho$  est mesurée en  $C \cdot m^{-3}$  .**

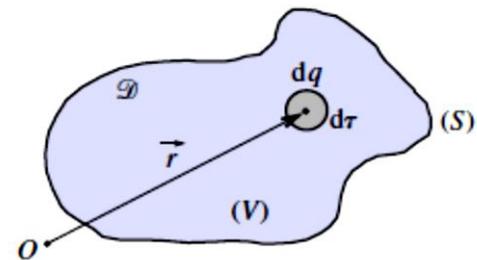


Fig.3. Distribution volumique de charges.

## 1.2 Loi de coulomb

### 1.2.1 Force d'interaction entre charges statiques

Deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$ , immobiles aux points  $M_1$  et  $M_2$ , exercent l'une sur l'autre une force :

- proportionnelle au produit des charges ;
- inversement proportionnelle au carré de la distance les séparant ;
- dirigée parallèlement à  $M_1M_2$ .

Cette force est répulsive si les charges sont de même signe, attractive sinon.

La force de Coulomb exercée par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$  (les deux charges étant dans le vide) est :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{1 \rightarrow 2}}{(M_1 M_2)^2}$$

$\vec{e}_{1 \rightarrow 2}$  désigne le vecteur unitaire dirigé de  $M_1$  vers  $M_2$  (figure.4)

Elle est opposée à la force exercée par  $q_2$  sur  $q_1$  :

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ ; elle obéit au principe de l'action et de la réaction. La constante  $\epsilon_0$ , permittivité électrique du vide, est voisine de  $\frac{1}{36\pi 10^9}$  et se mesure en  $F \cdot m^{-1}$ , F désignant le farad (unité de capacité). La permittivité électrique  $\epsilon$  de l'air étant très voisine de ( $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ ), avec ( $\epsilon_r = 1,0006$ ), la loi de Coulomb reste valable dans l'air.

### 1.2.2 Champ d'une charge ponctuelle

La force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  se met sous la forme :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1(M_2), \text{ avec } \vec{E}_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{(M_1 M_2)^3}$$

$\vec{E}_1(M_2)$  est le champ électrostatique créé par la charge  $q_1$  (charge source) au point  $M_2$  dans le vide (ou dans l'air).

Le champ créé par  $q_1$  caractérise l'influence de celle-ci sur l'espace qui l'entoure.

Ainsi, le champ électrostatique créé dans l'espace par une particule de charge  $q$ , immobile au point origine O du repère de coordonnées sphériques, a pour expression

La force de Coulomb exercée par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$  (les deux charges étant dans le vide) est :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

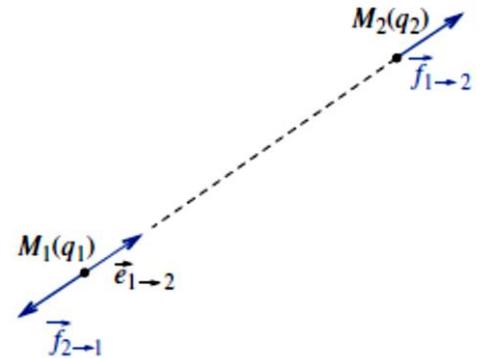


Fig.4. Forces d'interaction électrostatique entre deux charges statiques  $q_1 q_2 > 0$

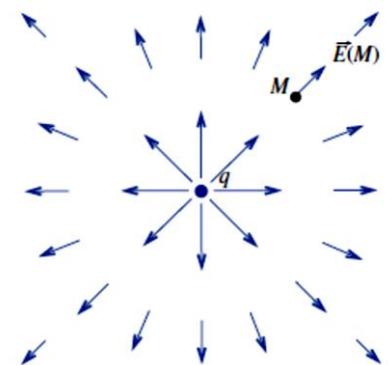


Fig.5. Champ d'une charge ponctuelle  $q_1 q_2 > 0$

### 1.3 Champ d'une distribution

#### 1.3.1 Principe de superposition

L'expérience conduit à postuler que les interactions électrostatiques ont des effets linéaires.

Par exemple, la force subie par une charge  $q$  de la part d'un ensemble de  $N$  charges  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , est la somme des  $N$  forces  $q$  exercent individuellement les charges  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) lorsqu'elles sont mises seules en présence de la charge  $q$ . Le champ créé par les  $N$  charges est donc la somme des  $N$  champs créés par chaque charge.

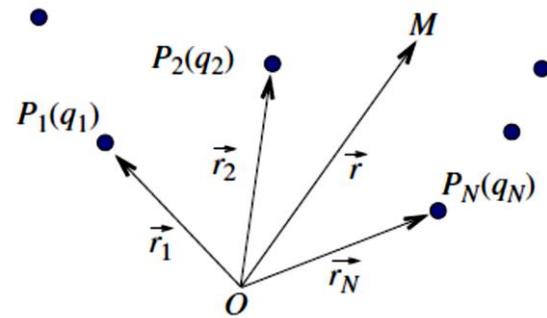


Fig.6. Distribution de charges ponctuelles.

#### 1.3.2 Champs créés par des distributions de charges

##### 1.3.2.1 Charges ponctuelles

Utilisant le principe de superposition, nous avons immédiatement :

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé en  $M$  par diverses charges  $q_i$  situées aux points  $p_i$  est donné par :

$$\vec{E}_{q_i (i=1, \dots, N)}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$

##### 1.3.2.2 Distribution linéique

Une longueur élémentaire  $dl$  contient une charge :

$$dq = \lambda dl$$

Soit

$$\vec{E}_D(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \lambda(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} dl.$$

##### 1.3.2.3 Distribution surfacique

Une surface élémentaire  $dS$  contient une charge :

$$dq = \sigma dS$$

et le champ créé en  $M$  par  $D$  est :

$$\vec{E}_D(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \sigma(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} dS.$$

##### 1.3.2.4 Distribution volumique

Un volume élémentaire  $d\tau$  contient une charge :

$$dq = \rho d\tau$$

nous écrivons donc :

$$\vec{E}_D(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau.$$

## 1.4 Potentiel électrostatique

### 1.4.1 Définition

Considérons une courbe  $\Gamma$  liant deux points A et B. La circulation  $C$  d'un champ de vecteurs  $\vec{E}$ , sur cette courbe, de A à B, est définie par  $C_{AB(\Gamma)} = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , où  $d\vec{l}$  désigne le déplacement élémentaire le long de la courbe  $\Gamma$  (Figure.7)

### 1.4.2 Circulation du champ d'une charge ponctuelle

#### 1.4.2.1 Conservation de la circulation du champ

Le champ  $\vec{E}$  créé par une charge ponctuelle  $q$  placée au point O, que nous prendrons comme origine, est en

coordonnées sphériques.  $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ .

La circulation élémentaire  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  associée à un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  est :

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(-\frac{1}{r}\right).$$

La circulation de A à B sur la courbe  $\Gamma$  (ne passant pas par O) s'écrit donc :

$$\int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Elle ne dépend pas du choix du chemin  $\Gamma$  (ne passant pas par O) suivi pour aller de A à B. La circulation du champ, d'un point A à un point B, se conserve lorsque nous passons d'un chemin  $\Gamma$  à un chemin  $\Gamma'$  reliant ces deux points : la circulation du champ créée par une charge est conservative :  $C_{AB(\Gamma)} = C_{AB(\Gamma')}$ .

### 1.4.3 Champ de gradient

#### 1.4.3.1 Circulation conservative du champ

Le principe de superposition nous permet d'obtenir le champ créé par une distribution en effectuant l'addition des champs créés par chacune des parties élémentaires de la distribution.

En conséquence, la circulation  $\int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$  a la même valeur pour tous les chemins reliant A à B, ce qui signifie que :

**La circulation du champ électrostatique est conservative.**

Ou, ce qui est équivalent :

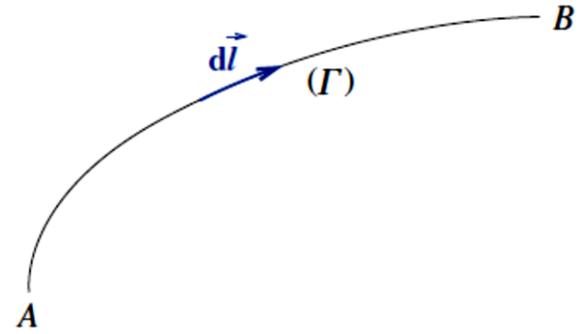


Fig.7. courbe  $\Gamma$  liant deux point A et B.

La circulation du champ électrostatique sur un contour (courbe fermée) est nulle :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Le résultat est indépendant du contour.

## 1.5 Potentiel électrostatique

### 1.5.1 Circulation du champ et potentiel

#### 1.5.1.1 Fonction potentiel

La circulation du champ électrostatique étant conservative, nous pouvons définir, indépendamment du chemin suivi pour calculer la circulation du champ de A à B, la grandeur  $C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Nous pouvons de même définir la fonction  $V(\vec{r})$  par

$$V_B = V_A + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

la valeur de cette fonction au point A pouvant être fixée arbitrairement (constante d'intégration).

Nous conviendrons d'appeler la grandeur V fonction potentiel électrostatique, définie à une constante près.

La différence de potentiel entre deux points A et B est :

$$V_B = V_A + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ainsi, l'expression du potentiel V(M) (s'annulant à l'infini) créée par une charge ponctuelle q en O est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le champ électrostatique est un champ de gradient s'écrivant :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

Nous pouvons ainsi remarquer :

Un champ de vecteur  $\vec{E}$  à circulation conservative est un champ de gradient.

## 1.6 Potentiel créé par une distribution de charges

### 1.6.1 Superposition des effets

L'opérateur gradient étant un opérateur linéaire, nous pouvons aussi obtenir le potentiel électrostatique d'une distribution, par superposition des potentiels créés par les charges élémentaires  $\delta q_P$  de la distribution :

$$\delta V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q_P}{PM}$$

(Référence de potentiel nulle à l'infini).

L'expression intégrale du potentiel, s'annulant à l'infini, créé par une distribution de charges  $\mathcal{D}$  d'extension finie est de la forme :

$$\delta V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q_P}{PM}$$

L'élément de charge reste à préciser pour le type de la distribution  $\mathcal{D}$  considérée, et nous utiliserons selon le cas envisagé l'une des expressions suivantes donnant, à une constante près, le potentiel électrostatique créé par  $\mathcal{D}$ .

### 1.6.2 Expressions du potentiel

#### ➤ Ensemble de charges ponctuelles

Pour des charges  $q_i$  placées en des points  $p_i$  :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M}$$

#### ➤ Distribution linéique de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \lambda(P) \frac{dl_P}{PM}$$

#### ➤ Distribution surfacique de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{\sigma(P)dS}{PM}$$

#### ➤ Distribution volumique de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{\rho(P)dS}{PM}$$

## 1.7 Énergie potentielle d'interaction électrostatique

### 1.7.1 Énergie potentielle d'une charge placée dans un champ

#### 1.7.1.1 Travail de la force électrostatique

Le travail élémentaire de la force  $\vec{F} = q\vec{E}$  lors d'un déplacement  $d\vec{M}$  de celle-ci est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = q\vec{E} \cdot d\vec{M} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V d\vec{M} = -q dV = -d(qV).$$

Le travail de cette force correspondant à un déplacement de la charge  $q$  d'un point A à un point B est ainsi  $W_{AB} = -q(V_B - V_A)$ .

#### 1.7.1.2 Énergie potentielle

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi et s'identifie à la variation d'une fonction d'état qui ne dépend que de la position de la particule.

**L'énergie potentielle d'interaction entre une charge  $q$  et un champ électrostatique  $\vec{E}$  créant le potentiel  $V$  est  $E_P = qV$ .**

La force de Coulomb  $\vec{F} = q\vec{E}$  exercée par le champ électrostatique dérive de cette énergie potentielle, définie (comme le potentiel électrostatique) à une constante près :

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q \overrightarrow{\text{grad}} E_P$$

Ainsi, ce champ de force est un champ de gradient et, à ce titre, la force électrostatique est une force conservative : son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi.

En effet, le travail élémentaire est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle

$$\vec{F} \cdot d\vec{M} = q\vec{E} \cdot d\vec{M} = -q dE_P$$

Le travail de la force électrostatique entre A et B est :

$$W_{AB} = -E_{P(B)} - E_{P(A)} = -\Delta E_P$$

## 1.8 Le théorème de Gauss

### 1.8.1 Flux du champ d'une charge

#### 1.8.1.1 Vecteur surface

Considérons une surface élémentaire « plane »  $dS$  contenant le point  $M$ . Elle possède deux faces (l'une d'entre elle sera nommée face négative et l'autre face positive) et une orientation bien définie dans l'espace.

Pour décrire complètement une telle surface, nous devons distinguer ses deux faces et indiquer son orientation. Pour ce faire, nous associerons à tout élément de surface  $dS$  un vecteur unitaire  $\vec{n}(M)$  dont la direction est normale à la surface  $dS$  et dont le sens est celui qui amène de la face négative à la face positive (Figure.8a.).

Une description plus complète, nous conduit à introduire un vecteur surface élémentaire

$d\vec{S}(M) = \vec{n}(M) \cdot dS$ , dont la norme est égale à l'aire de chacune des faces de  $dS$ .

Lorsque la surface n'est plus élémentaire, les orientations des éléments de surface  $d\vec{S}(M)$  sont définies par continuité à partir de l'orientation de l'un d'entre eux  $d\vec{S}(M_0)$  (Figure.8b.).

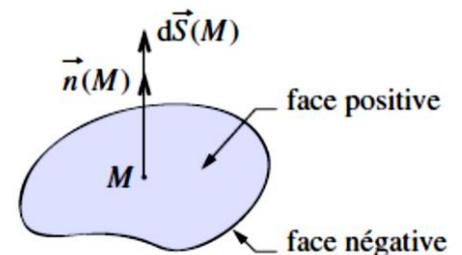


Fig.8a. Définition du vecteur surface élémentaire  $dS(M)$ .

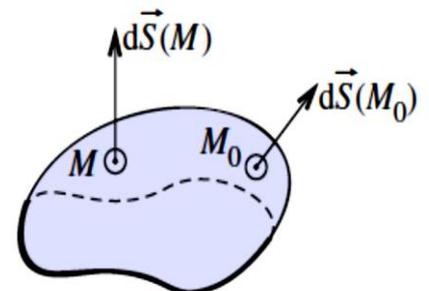


Fig.8b.

Dans le cas d'une surface fermée (Figure.8c), les vecteurs unitaires  $\vec{n}(M)$  sont toujours dirigés vers l'extérieur (normale sortante).

## 1.8.2 Flux du champ électrostatique

### 1.8.2.1 Définition

Soit  $\vec{E}(M)$  le champ électrostatique créé en  $M$  par une certaine distribution de charges  $\mathcal{D}$ . Le flux élémentaire de  $\vec{E}(M)$  à travers  $d\vec{S}(M)$  est le scalaire  $d\phi$  défini par :

$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

Le flux de  $\vec{E}(M)$  à travers une surface (S) s'obtient par l'intégration de  $d\phi$  sur (S) :

$$\phi = \int_S d\phi$$

### 1.8.2.2 Flux à travers une surface fermée contenant la charge

Soit (S) une surface fermée entourant la charge  $q$  placée en O et ( $\Sigma$ ) la sphère de centre O et de rayon R (Figure.9). Le flux élémentaire du champ créé par la charge  $q$  à travers  $d\vec{S}(M)$  est :

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(M)}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma}{R^2}$$

où  $d\Sigma$  est l'élément de surface découpé, sur la sphère ( $\Sigma$ ) de centre O et de rayon R, par le cône de sommet O s'appuyant sur le contour de  $dS$ . Par intégration sur (S), il vient :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}(M)}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**Le flux (sortant) du champ créé par une charge  $q$ , à travers une surface fermée (S) contenant cette charge, est :**

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**Le flux du champ créé par une charge  $q$ , à travers une surface fermée (S) ne contenant pas cette charge, est nul :**

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} = 0$$

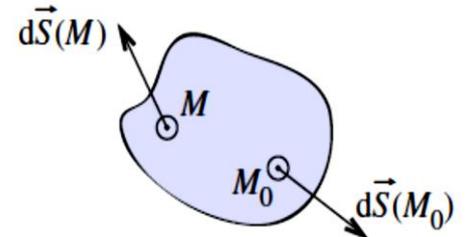


Fig.8c. Pour une surface fermée, La normale est dirigée vers l'extérieur

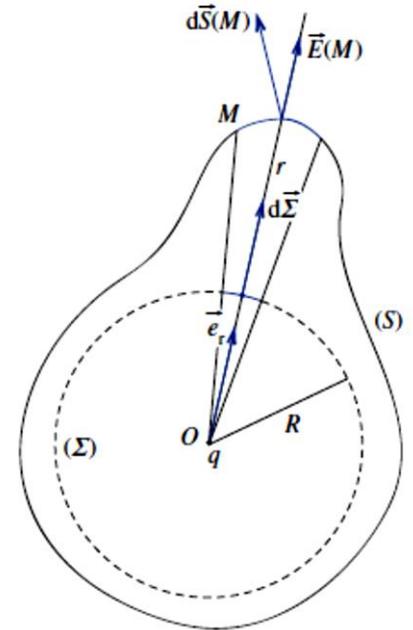


Fig.9. La charge  $q$  est à l'intérieur de la surface (S) fermée.

### 1.9 Théorème de Gauss

Pour une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , les résultats précédents permettent, par utilisation du principe de superposition, de calculer le flux sortant du champ créé à travers une surface fermée  $S$ . Pour une charge élémentaire  $dq$  de  $\mathcal{D}$ , la contribution au flux total est  $\frac{dq}{\epsilon_0}$  si  $dq$  est à l'intérieur de  $S$ , et nulle si  $dq$  est à l'extérieur de  $S$  (Figure.10.).

Le flux sortant du champ d'une distribution  $\mathcal{D}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à la charge de  $\mathcal{D}$  située à l'intérieur de  $S$  divisée par  $\epsilon_0$  :

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \text{ avec } d\vec{S} = \vec{n}_{ext} dS$$

### 1.10 Dipôle électrostatique

#### 1.10.1 Moment dipolaire

##### 1.10.1.1 Moment dipolaire d'une distribution de charges globalement neutre

Considérons dans la distribution  $\mathcal{D}$  l'ensemble des charges positives dont la somme est notée  $+q$  et l'ensemble des charges négatives dont la somme vaut  $-q$ ,  $q$  étant supposée non nulle. Nous pouvons définir  $A^+$ , le barycentre des charges positives de  $\mathcal{D}$ , et  $A^-$  le barycentre des charges négatives de  $\mathcal{D}$ . Le moment dipolaire de la distribution est par définition :

$$\vec{p} = q\overline{A^-A^+}. \text{ Il s'évalue en coulomb. mètre (C . m).}$$

#### 1.10.2 Doublet de charges

Le modèle le plus simple de dipôle est un doublet de charges opposées et séparées par une distance que nous noterons  $d$  (Figure.10).

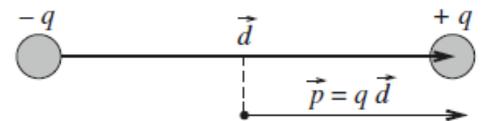


Fig.10. Doublet de charges

Un objet non chargé mais polarisé crée à grande distance un potentiel et un champ analogues (en première approximation) à ceux d'un doublet de charges de moment dipolaire  $\vec{p}$  non nul ( $q > 0$ ) :

$$\vec{p} = q\vec{d} \text{ et } \vec{d} = \overline{A^-A^+}.$$

#### 1.10.3 Objets polaires

##### 1.10.3.1 Molécules polaires

Ces molécules présentent au repos une séparation de charges.

Une molécule diatomique telle que le chlorure d'hydrogène HCl possède une liaison polaire (Figure.11). Son nuage électronique est asymétrique, les électrons se trouvant préférentiellement au voisinage de l'atome de chlore.

Des édifices moléculaires plus complexes présenteront de même une polarité permanente : la molécule d'eau  $H_2O$ , triangulaire, possède un moment dipolaire résultant de la polarité des liaisons OH. De même la molécule d'ammoniac  $NH_3$ , pyramidale, possède trois liaisons NH polarisées (Figure.12). Dans les molécules polyatomiques, la présence de doublets libres sur certains atomes doit parfois être prise en compte.

#### 1.10.4 Potentiel et champ créés par un dipôle.

Si nous nous intéressons aux effets produits par le dipôle, l'approximation dipolaire consiste à supposer la distance à laquelle nous observons le champ créé par le dipôle très grande devant ses dimensions :  $r \gg d$ .

Dans ces conditions, nous mènerons les calculs en ne déterminant que les termes d'ordre le plus bas en  $\left(\frac{d}{r}\right)$ .

##### 1.10.4.1 Potentiel du dipôle

La distribution considérée (doublet) étant d'extension finie, nous pouvons choisir le potentiel nul à l'infini, et l'écrire, avec les notations de la Figure.13 :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Utilisant les coordonnées sphériques d'axe ( $Oz$ ) indiquées sur la Figure.13, nous avons

$$r_1 = \left( r^2 - dr \cos\theta + \frac{d^2}{4} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad r_2 = \left( r^2 + dr \cos\theta + \frac{d^2}{4} \right)^{1/2}$$

Dans l'approximation dipolaire, nous écrirons à l'ordre un en  $\left(\frac{d}{r}\right)$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos\theta + \dots \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos\theta + \dots \right) \right)$$

La charge totale de ce système étant nulle, le terme en  $\frac{1}{r}$  du potentiel s'annule ; le premier terme non nul du développement limité est proportionnel à  $\frac{d}{r}$ . Il décroît beaucoup plus vite à grande distance que le potentiel d'une charge seule :

$$V(M) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

En utilisant l'expression du moment dipolaire, le potentiel électrostatique créé par un dipôle placé au point  $O$ , à l'ordre le plus bas en puissances de  $\left(\frac{d}{r}\right)$ , est

$$V(M) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Du fait de la symétrie de révolution de la distribution autour de l'axe ( $Oz$ ), ce potentiel ne dépend pas de l'angle  $\varphi$ .

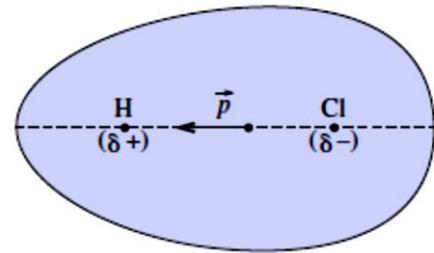


Fig.11. Molécule diatomique

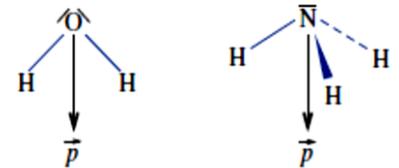


Fig.12. Moments dipolaires des molécules  $H_2O$  et  $NH_3$

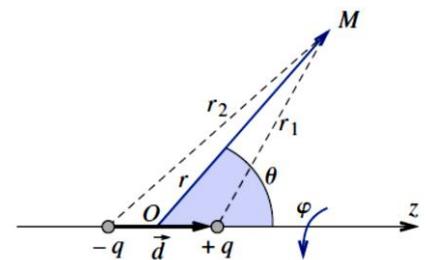


Fig.13. Le point  $M$  est repéré par son vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  ou par ses coordonnées sphériques :  $(r, \theta, \varphi)$ .

### 1.10.5 Actions d'un champ électrostatique sur un dipôle

Nous supposons dans un premier temps que le dipôle est rigide, c'est-à-dire que la distance AB reste fixe et les charges constantes. Les actions mécaniques exercées sur le dipôle seront caractérisées par leur résultante  $\vec{F}$  et leur moment  $\vec{\Gamma}_O$  calculé par rapport à un point O donné.

#### 1.10.5.1 Champ uniforme

##### ➤ Force

Les forces exercées sur les charges  $+q$  et  $-q$  par le champ uniforme sont opposées. Par conséquent :

La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle placé dans un champ uniforme est nulle :

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Le dipôle est donc soumis à un couple de forces.

##### ➤ Moment

Calculons par exemple ce moment par rapport au point O, milieu des deux charges :

$$\vec{\Gamma}_O = \left(\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge (q\vec{E}_0) + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge (-q\vec{E}_0) = q\vec{d} \wedge \vec{E}_0$$

Pour un couple (force résultante nulle), le moment est indépendant du point où il est évalué. Il vaut donc en tout point :  $\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0$

En observant la Figure 14, nous pouvons résumer l'influence du champ appliqué en disant que :

Dans un champ uniforme, le dipôle subit un couple de moment :  $\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0$  qui tend à l'aligner parallèlement au champ appliqué dans le même sens que celui-ci.

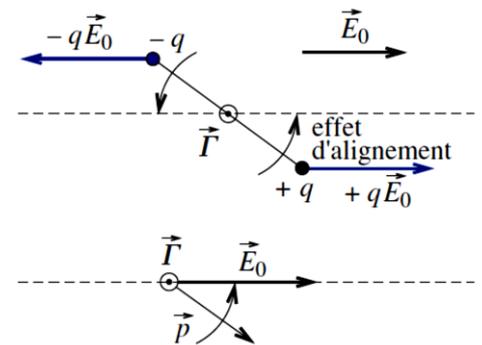


Fig.14. Dipôle dans un champ uniforme.

## 1.11 Applications et exercices

### La charge ponctuelle et force électrique

#### Application 1 : (Ordre de grandeur de d dans un plasma)

Évaluer l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique  $d$  pour un plasma, milieu ionisé constitué d'électrons et d'ions de densités identiques  $n = 10^{21} \text{m}^{-3}$

#### Solution

Si nous associons à chaque particule un volume égal à  $d^3$ , un ordre de grandeur de  $d$  s'établit à :

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 10^{-7} \text{m} = 10^2 \text{nm}$$

#### Application 2 : (Répartition des charges sur une sphère conductrice portée à un potentiel donné)

Le cuivre, de numéro atomique  $Z=29$ , de masse molaire  $M=64 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , a pour masse volumique  $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Une petite sphère de cuivre de rayon  $a = 1 \text{mm}$  est chargée en la portant au potentiel  $V = 3000 \text{V}$  (au-delà, le champ électrique de la sphère peut provoquer l'ionisation de l'air environnant). La charge apportée est alors :

$$Q = 4\pi\epsilon_0 a V, \text{ où } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{SI}$$

L'apport d'une charge  $Q$  entraîne une déformation des nuages électroniques au voisinage de la surface de la sphère. La charge excédentaire apparaît ainsi délocalisée, nivelée localement sur une épaisseur d'extension caractéristique de l'ordre de  $30 \text{nm}$ .

Les valeurs numériques proposées dans cet énoncé sont telles en accord avec les inégalités liant  $d, l$  et  $D$  ?

#### Solution

La sphère contient :

$N = N_A \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) \frac{\mu}{M}$  atomes de cuivre, où  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$  est le nombre d'Avogadro. Le nombre de protons contenus dans la sphère est donc  $N_p = ZN = 10^{22}$ .

Le nombre d'électrons est identique si la sphère est neutre. La charge  $Q$  positive portée par la sphère correspond à une diminution de son nombre d'électrons (charges libres), soit :

$$N_e = N_p - \frac{Q}{e} = 10^{22} - 2 \cdot 10^9.$$

Constatons que la différence relative de  $N_p$  et  $N_e$  est très faible : le milieu est peu perturbé par la charge. Nous pouvons définir une longueur microscopique  $d$  en attribuant à chaque atome de cuivre un volume de l'ordre de  $d^3$ , soit :

$$N d^3 = \frac{4}{3} \pi a^3$$

D'où  $d = \left( N_A \frac{\mu}{M} \right)^{-\frac{1}{3}} = 0,23 \cdot 10^{-9} \text{m} = 0,23 \text{nm}$ .

La distance caractérisant l'étalement de l'excès de charge nous permet de définir une échelle mésoscopique  $l = 30 \text{nm}$  grande devant  $d$  et encore très faible à l'échelle macroscopique définie, par exemple, par le rayon de la sphère de cuivre :  $D = a = 1 \text{mm}$ .

**Application 3 : (Intensité des forces électrostatiques et gravitationnelles)**

La constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  SI. La constante d'interaction électrostatique vaut :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$$

- 1) Précisez les unités du Système International correspondant à ces deux constantes.
- 2) Comparer les interactions gravitationnelles et électrostatiques entre deux électrons.

On donne : charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et masse  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

**Solution**

- 1) Une force s'exprimant en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , nous avons :

$$[G] = [\text{force} \cdot \text{distance}^2 \cdot \text{masse}^{-2}] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{et } \left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right| = [\text{force} \cdot \text{distance}^2 \cdot \text{masse}^{-2}] = \text{kg} \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}.$$

En réalité,  $\epsilon_0$  s'exprime en farad par mètre, où le farad est une unité de capacité et la constante précédente s'évalue en  $\text{F}^{-1} \cdot \text{m}$ .

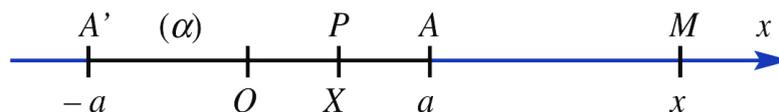
- 2) La dépendance de ces interactions en fonction de la distance séparant les deux électrons étant la même pour les deux interactions, nous avons simplement :

$$\frac{f_e}{f_g} = \left( \frac{e}{m} \right)^2 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \right) = 4,2 \cdot 10^{42}.$$

Cet ordre de grandeur justifie que pour l'étude de mouvements de particules chargées, il est en général tout à fait inutile de prendre en compte les forces de gravitation.

**Champ et potentiel électrique****Application 4 : (Champ créé par un segment uniformément chargé)**

Sur l'axe  $Ox$ , une charge est répartie uniformément avec la densité linéique  $\lambda$  entre les points



$A'(-a)$  et  $A(a)$ . Déterminer le champ  $\vec{E}(M)$  créé par cette distribution en un point  $M$  de l'axe  $(Ox)$ , extérieur au segment  $A'A$ .

**Solution**

Notons  $x$  l'abscisse du point  $M$  et  $X$  l'abscisse d'un point  $P$  pris sur la distribution de charges. Associons au point  $P$  la charge élémentaire  $dq_p = \lambda dX$ .

En un point  $M$  tel que  $x > a$ , la charge  $dq_p$  crée en  $M$  le champ élémentaire :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dX}{(x - X)^2} \vec{e}_x.$$

En superposant les champs créés par chacune des parties élémentaires de la distribution, il vient :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_x \int \frac{dX}{(x-X)^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^2 - a^2}\end{aligned}$$

Expression valable pour  $x > a$ .

En revanche, en un point  $M$  tel que  $x < -a$ , le champ élémentaire  $d\vec{E}$  est dirigé vers les  $x$  négatifs :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^2 - a^2}$$

Expression valable pour  $x < -a$ .

### **Application 5 : (Champ d'une circonférence chargée en un point de son axe)**

Étant donné une circonférence, de centre  $O$ , de rayon  $R$ , uniformément chargée avec la densité linéique  $\lambda$ , déterminer le champ  $\vec{E}(M)$  en un point  $M$  de son axe.

#### **Solution**

L'axe du disque est un axe de révolution pour la distribution de charges. Une rotation autour de cet axe conserve le champ en chacun de ses points, donc :

$$\vec{E}(M) = E_z \vec{e}_z$$

Soit  $(R, \theta)$  les coordonnées polaires d'un point  $P$  de la circonférence. L'élément de longueur associé à  $P$  porte la charge élémentaire  $dq = \lambda R d\theta$  ; le champ élémentaire associé s'écrit :

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho^2} \vec{e}$$

Avec  $\rho = PM$  et  $\vec{e}$  vecteur unitaire de l'axe  $PM$ . D'où la composante axiale de ce champ élémentaire :

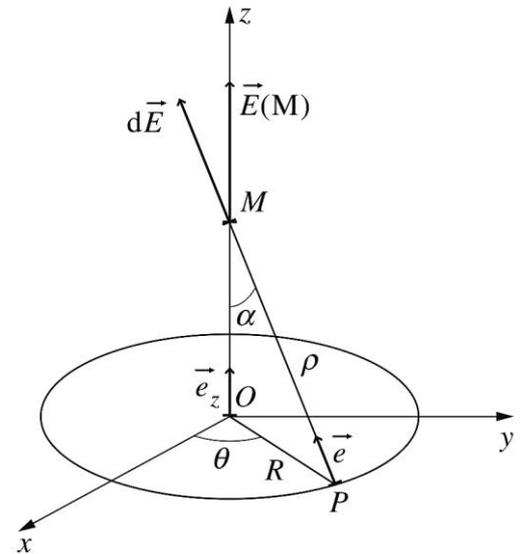
$$dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{e}_z = \frac{\lambda R \cos(\alpha)}{4\pi\epsilon_0 \rho^2} d\theta$$

et, par intégration sur la circonférence :

$$E_z = \frac{\lambda R \cos(\alpha)}{4\pi\epsilon_0 \rho^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R \cos(\alpha)}{2\epsilon_0 \rho^2} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

En conclusion, le champ crée s'établit à :

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$



Champs d'une circonférence chargée

**Application 6 : (Potentiel d'un fil rectiligne infini)**

Déterminer le potentiel associé à un fil rectiligne infini portant la charge linéique uniforme  $\lambda$ .

**Solution**

Le champ de cette distribution a pour expression en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec le fil

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

L'expression d'un déplacement élémentaire étant :

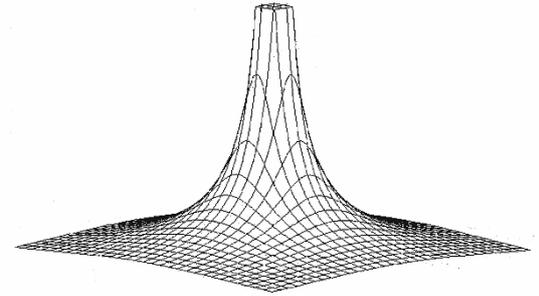
$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + dz \cdot \vec{e}_z$$

en coordonnées cylindriques, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_B &= V_A + \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= V_A + \int_A^B -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = V_A - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{r}{r_A} \right] \end{aligned}$$

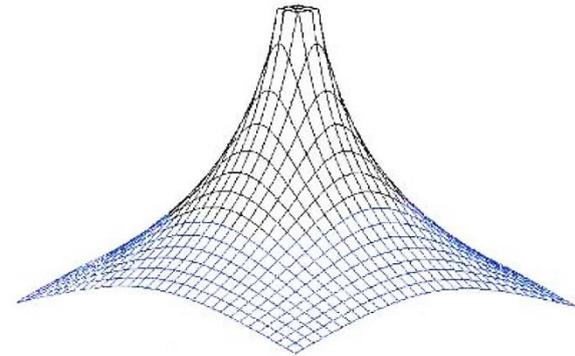
Remarquons que pour ce modèle de distribution infinie, il ne nous est pas possible de choisir le potentiel nul à l'infini. Si nous choisissons par exemple  $V_A = 0$  à distance  $r_A = R$  du fil, nous aurons :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r}{R} \right)$$



Potentiel d'une charge ponctuelle :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ à l'infini } V = 0$$



Potentiel d'un fil infini :

$$V = V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r}{R} \right)$$

**Théorème de Gauss****Application 7 : (Fil infini de charge linéique uniforme)**

Reprendre l'étude précédente avec un fil infini portant une densité linéique de charge uniforme.

**Solution**

Les considérations de symétrie conduisent encore à :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r \text{ et } V(M) = V(r)$$

Appliquons le théorème de Gauss à la même surface fermée. Nous avons :  $E2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0$  ; il vient alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r}$$

Il y a des charges à l'infini, donc pour la détermination du potentiel, nous devons prendre une référence de potentiel nulle à distance finie (en  $r = a$  par exemple) ; cela donne :

$$V(M) = V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r}{a} \right)$$

**Application 8 : (Cylindre infini de charge surfacique uniforme)**

Appliquant le théorème de Gauss pour un cylindre infini portant la charge surfacique uniforme  $\sigma$ .

**Solution**

Les considérations de symétrie conduisent encore à  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$  et  $V = V(r)$ . Appliquons le théorème de Gauss à la même surface fermée. Nous avons maintenant :

$$Q_{int} = 0, \text{ si } r < R \text{ et } Q_{int} = 2\pi R h \sigma, \text{ si } r > R$$

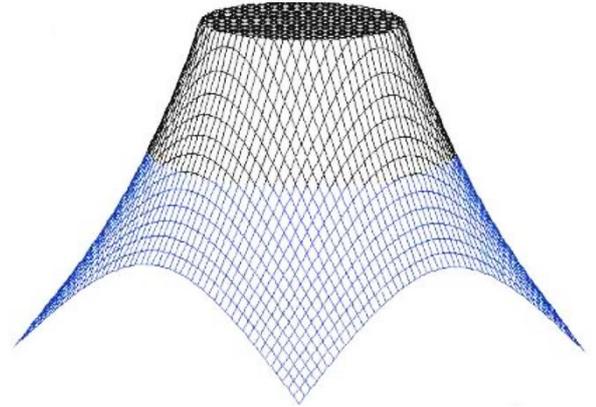
Il vient alors :

- $r < R$ :  $\vec{E} = \vec{0}$ . Il est remarquable de trouver que le champ est nul partout à l'intérieur de la cavité chargée en surface.
- $r > R$ :  $\vec{E} = (\sigma R / \epsilon_0 r) \vec{e}_r$

Les inégalités restent strictes, le champ électrostatique subissant la discontinuité normale (attendue !)  $\sigma / \epsilon_0$  à la traversée de la surface chargée. Le potentiel s'en déduit :

- $r < R$ :  $V(r) = V_0$
- $r > R$ :  $V(r) = V_0 + (\sigma R / \epsilon_0) \ln(R/r)$

Remarquons que pour  $r = R$ , le champ électrique n'est pas défini : la répartition surfacique de charge correspond à une répartition volumique locale infinie.



Potentiel créé par un cylindre uniformément chargé en surface ( $\sigma > 0$ ). On visualise l'équipotentielle de potentiel  $V = 0$  pour  $r > R$  ( $V_0 > 0$ ).

**EXERCICE 1 (Champ créé par un segment chargé)**

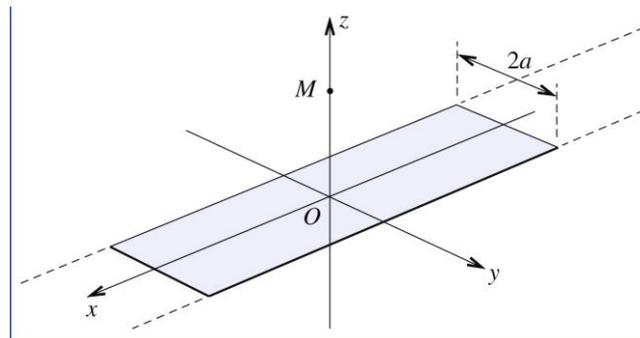
- 1) Calculer en un point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  le champ créé par un segment de l'axe  $(Oz)$ , de charge linéique uniforme  $\lambda$ , compris entre les points  $P_1$  et  $P_2$  d'abscisses  $z_1$  et  $z_2$ , repérés par les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .
- 2) Examiner le cas du fil rectiligne infini uniformément chargé.

**EXERCICE 2 (Champ créé par une sphère chargée en son centre)**

Supposons que l'on puisse charger une sphère de centre  $O$  avec la charge surfacique  $\sigma = \sigma_0 \cos^6 \theta$  (coordonnées sphériques d'axe  $(Oz)$  avec origine en  $O$ ). Quelle est la valeur de son champ au point  $O$  ?

**EXERCICE 3 (Champ d'un ruban chargé)**

Le ruban surfacique infini représenté sur le schéma porte une charge surfacique  $\sigma_0$  uniforme. Calculer le champ électrostatique créé par le ruban au point  $M(0, 0, z)$ .

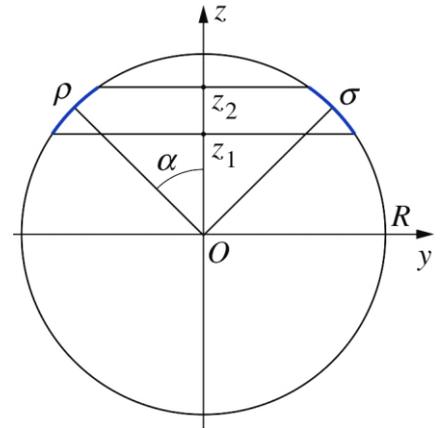


**EXERCICE 4 (Champ au centre d'une sphère partiellement chargée)**

Calculer le champ créé en son centre  $O$  par une sphère de rayon  $R$  portant la charge surfacique  $\sigma$  répartie uniformément sur sa surface entre deux plans de cote  $z_1$  et  $z_2$ .

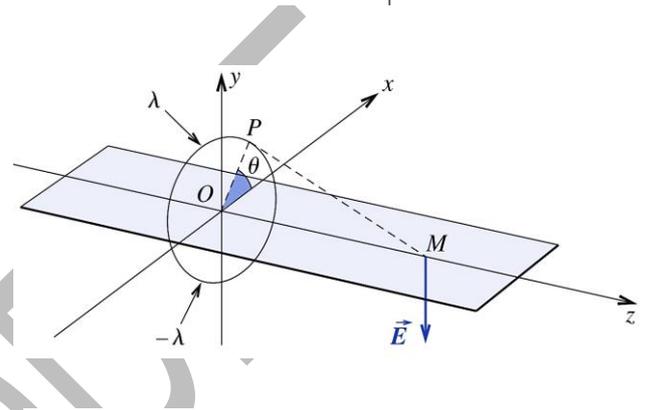
$$(-R \ll z_1 < z < z_2 \ll R)$$

Examiner le cas de la demi-sphère chargée.



**EXERCICE 5 (Champ d'un cerceau chargé +λ ou -λ par moitié sur son axe)**

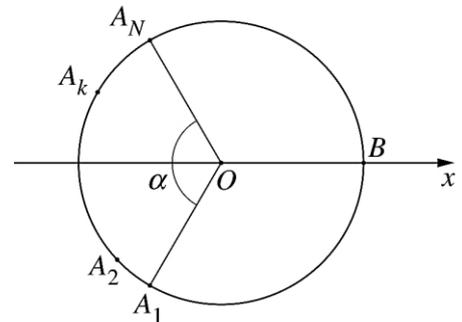
Un cerceau de rayon  $R$ , de centre  $O$ , d'axe  $(Oz)$  porte la charge surfacique  $\lambda$  signe  $(y)$ ,  $\lambda$  étant une constante. Déterminer la direction du champ créé par le cerceau en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$ . Calculer le champ au point.



**EXERCICE 6 (Champ créé par N charges ponctuelles réparties sur un arc de cercle)**

On considère une distribution de  $N$  charges ponctuelles  $q$ , équidistantes sur un arc de cercle  $A_1A_N$  de rayon  $R$  et de centre  $O$ . On note  $\alpha$  l'angle sous lequel la distribution est vue du point  $O$ .

- 1) Déterminer le champ en  $O$ .
- 2) Que vaut le champ en  $O$  quand les  $N$  charges sont régulièrement réparties sur tout le cercle ?



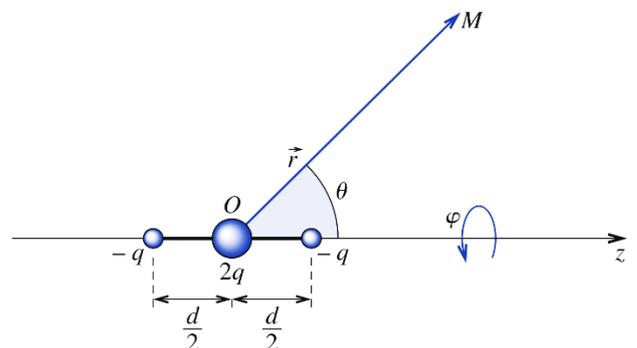
**EXERCICE 7 (Forces de Van der Waals)**

Une molécule non polarisable de moment électrique  $p_0 = p_0 e_x$  est placée en point  $M$  de l'axe  $(Ox)$  se trouve une molécule polarisable de polarisabilité  $a$  et de moment électrique permanent nul. Dans le champ  $\vec{E}(M)$  créé par la molécule placée en  $O$ , la molécule polarisable acquiert un moment dipolaire induit  $\vec{p}_i = \alpha \vec{E}(M)$ .

Calculer la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la molécule polarisable.

**EXERCICE 8 (Champ et potentiel d'un quadripôle)**

Calculer le premier terme non nul du potentiel créé à grande distance par la distribution représentée sur le schéma.



## Les conducteurs

### 2 Définition

En électricité, un conducteur est un milieu matériel dans lequel certaines charges électriques, dites « charges libres », sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique, à l'échelle macroscopique où les dimensions considérées sont très grandes par rapport aux distances inter atomiques.

#### 2.1 Equilibre électrostatique

L'équilibre électrostatique est atteint lorsqu' aucune charge électrique ne se déplace à l'intérieur du conducteur. Nous allons établir, dans cette partie, les propriétés des distributions d'équilibre d'un conducteur isolé dans le vide.

##### 2.1.1 Champ électrique

Le champ électrique est nul en tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique. En effet, la présence d'un champ entraînerait l'existence d'une force.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

qui mettrait les charges en mouvement et le conducteur ne serait plus en équilibre.

*En tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique  $\vec{E}$  est nul.*

Le champ électrique sur la surface du conducteur est perpendiculaire à la surface. En effet, pour les mêmes raisons que précédemment, une composante du champ parallèle à la surface agirait sur les charges libres et entraînerait leur déplacement. Or, de tels déplacements n'existent pas dans les conditions d'équilibre électrostatique :

*Le champ est normal à la surface d'un conducteur en équilibre.*

##### 2.1.2 Potentiel électrique

Considérons la circulation du champ électrique entre deux points M et M' infiniment voisins à l'intérieur d'un même conducteur. La variation du potentiel dV entre les deux points est alors donnée par :

$$dV = -\vec{E}d\vec{l} = 0 \quad \text{ou} \quad d\vec{l} = \overline{MM'} \Rightarrow V = \text{constante}$$

Le champ étant nul à l'intérieur du conducteur, le potentiel est donc uniforme dans tout le volume du conducteur.

*Un conducteur en équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel.*

## 2.2 Répartition des charges

### 2.2.1 A l'intérieur du conducteur.

Considérons un conducteur doté d'une charge nette  $Q$  et choisissons une surface fermée quelconque de façon qu'elle se retrouve sous la surface du conducteur.

D'après le théorème de Gauss, on a :

$$\phi = \oiint \vec{E}_{int} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Comme  $\vec{E}_{int} = 0$ , on en déduit que  $Q_{int} = 0$ . Par conséquent.

*A l'intérieur d'un conducteur chargé en équilibre, la charge électrique est nulle.*

### 2.2.2 A la surface du conducteur : Expérience du cylindre de Faraday.

Cette expérience a pour but de mettre en évidence la répartition superficielle des charges électriques.

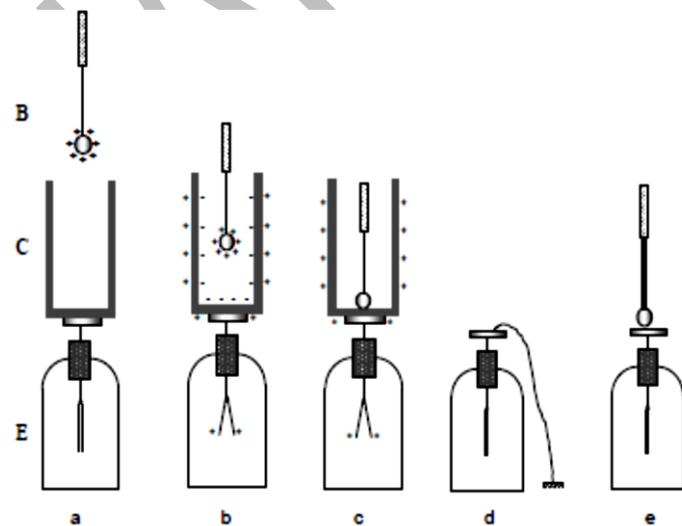
On dispose :

- d'une boule métallique B, chargée positivement, solidaire d'une tige reliée à un manchon isolant,
- d'un cylindre de Faraday C, (c'est un cylindre métallique creux dont la hauteur est très grande par rapport à son diamètre),
- et d'un électroscope à feuille d'or E.

Le cylindre C est posé sur le plateau de l'électroscope E.

La figure 15.a. montre que lorsque la boule se trouve hors du cylindre, l'ensemble formé par C et E ne porte aucune charge. Lorsqu'on introduit la boule dans le cylindre, un phénomène d'électrisation par influence est décelé par l'électroscope. Des charges négatives sont induites sur la face interne de C et des charges positives sur sa surface externe (figure 15.b).

Lorsque B et C sont mis en contact, on constate, là encore, que les feuilles de l'électroscope s'écartent (Figure 15.c), cet écart est maintenu lorsqu'on retire B. Pour vérifier que la boule a entièrement transmis sa charge à C, on retire le cylindre, on décharge l'électroscope (figure 15.d), puis on met en contact B et le plateau de E. On constate alors que les feuilles d'or restent verticales (figure. 15.e). En conclusion : toute la charge de la boule s'est trouvée répartie à la surface extérieure du conducteur.



*Fig.15. Expérience du cylindre de Faraday*

*La charge électrique d'un conducteur en équilibre est entièrement répartie sur sa surface.*

### 2.3 Champ au voisinage d'un conducteur : théorème de Coulomb.

Considérons un conducteur de forme quelconque. On se propose de calculer le champ électrique en un point au voisinage immédiat de la surface externe du conducteur. Construisons, pour cela, une surface de Gauss cylindrique aplatie, dont une base se trouve à l'extérieur de la surface et l'autre base à une profondeur telle que la charge superficielle soit totalement à l'intérieur du cylindre (figure 16.a). En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, nous obtenons:

$$\phi = \oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Comme mentionné plus haut, aux points situés au voisinage immédiat de la surface du conducteur, le champ est normal à la surface. Le champ étant nul partout à l'intérieur du conducteur, on ne tient compte que du flux à travers la surface située à l'extérieur du conducteur. Le flux sortant de la surface latérale du cylindre étant nul, il ne reste plus que celui qui sort de la base, soit

$$\phi = ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

où  $\sigma S$  est la charge nette comprise à l'intérieur de la surface de Gauss. On obtient alors

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

soit vectoriellement

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

C'est l'expression du champ électrostatique, au voisinage immédiat d'une surface conductrice chargée. C'est la formulation du théorème de Coulomb.

**Le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur portant une charge de densité surfacique  $\sigma$  vaut :**

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal au conducteur et orienté vers l'extérieur.

Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul, en son voisinage immédiat extérieur, il vaut :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Par conséquent, à la traversée de la surface du conducteur, par continuité, le champ varie de la manière indiquée sur la figure 15.b ( $\sigma$  est un infiniment petit). En particulier, sur la surface du conducteur, il vaut

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Cette dernière expression du champ sera utilisée pour le calcul de la pression électrostatique.

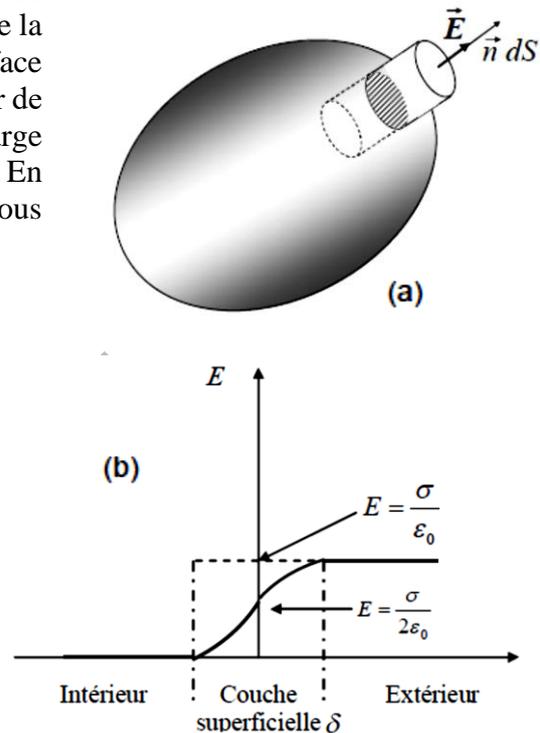


Fig.15. Champ au voisinage d'un conducteur

**2.4 Pression électrostatique**

Calculons maintenant les forces auxquelles sont soumises les charges électriques situées à la surface d'un conducteur en équilibre. Ces charges de surface sont soumises à des forces répulsives de la part des *autres charges* du conducteur.

Considérons un élément de surface  $dS$ , portant une charge  $dq = \sigma dS$ .

Le champ  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$  exerce sur la charge  $dq$  une force électrostatique :

$$d\vec{F} = dq\vec{E} = \sigma ds \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \text{ soit : } d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ds \vec{n}$$

Cette force est donc normale à la surface et dirigée vers l'extérieur quelque soit le signe de la charge. Elle est proportionnelle à l'élément de surface  $ds$  et présente, par conséquent, le caractère d'une force de pression. La force par unité de surface, c'est-à-dire la pression électrostatique, est alors donnée par :

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

**2.5 Phénomènes d'influence**

**2.5.1 Eléments correspondants**

Considérons deux conducteurs A et B en équilibre et portant des charges  $Q_A$  et  $Q_B$  et deux éléments de surfaces  $dS_A$  sur A et  $dS_B$  sur B découpées par le tube de force représenté sur la figure 16.  $dS_A$  et  $dS_B$ , appelés "éléments correspondants" portent des densités de charges  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$ . Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée S s'appuyant sur les surfaces  $dS_A$  et  $dS_B$  et limitée par les lignes de champ et deux surfaces à l'intérieur de A et B. Le flux du champ, sortant de S, est nul. En effet le champ est nul à l'intérieur des conducteurs et il est tangent au tube de forces. Donc :

$$\sigma_A dS_A + \sigma_B dS_B = 0$$

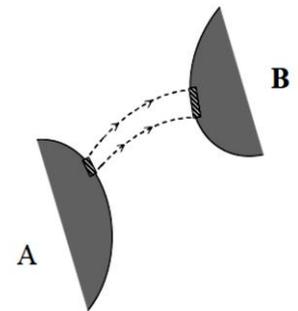


Fig.16

**Théorème des éléments correspondants :**

*Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées.*

**2.5.2 Influence partielle**

Considérons un conducteur A électriquement neutre (figure 17.a). Approchons de ce dernier, un conducteur B chargé positivement, tel que représenté sur la figure 17.b. Le conducteur B crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique  $\vec{E}_B$ .

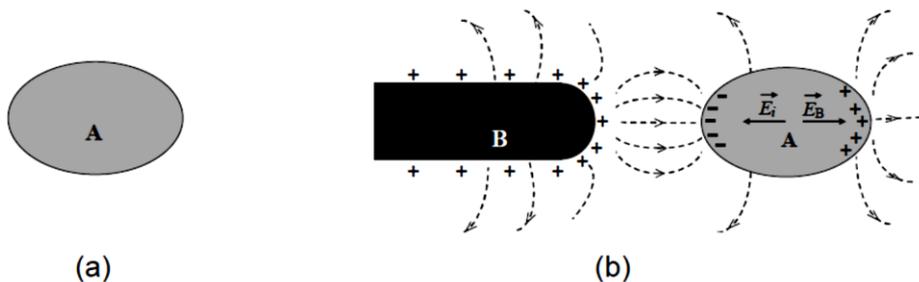


Fig.17

Les électrons libres du conducteur A vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de  $\vec{E}_B$ . Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de B et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est  $-Q$ . A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est  $+Q$ , vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons comme le montre la figure 17.b. Ces charges, qui résultent d'une électrisation par influence, apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.

Elles créent un champ induit  $\vec{E}_i$  qui vient s'opposer au champ inducteur  $\vec{E}_B$  et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur A les électrons libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

### Remarques :

1°) Lors de l'évolution de ce phénomène, les charges  $+Q$  et  $-Q$ , induites ou créées par influence, interviennent en ajoutant leur action à celle des charges inductrices. Il se produit une *influence retour* de A sur B. On dit qu'il y'a *influence mutuelle*.

2°) Dans cette expérience, le conducteur A a été *électrisé par influence*. Le système étant isolé, le principe de la conservation de la charge implique que la somme des charges induites est nulle. Ainsi, lors d'une électrisation par influence, il n'y aucune création, mais simplement un déplacement de charges.

3°) Dans ces exemples, l'influence est dite partielle, car toutes les lignes de champ issues du conducteur B n'aboutissent pas sur A. Nous pouvons créer des conditions d'influence totale en plaçant tout simplement le conducteur B à l'intérieur d'un conducteur creux A

### 2.5.3 Influence totale

On parle d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ partant de B aboutissent sur A. Ceci est obtenu lorsque A entoure complètement B (figure 20). L'application du théorème des éléments correspondants, montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de A est égale et opposée à la charge du conducteur B.

$$Q_B = -Q_{Aint}$$

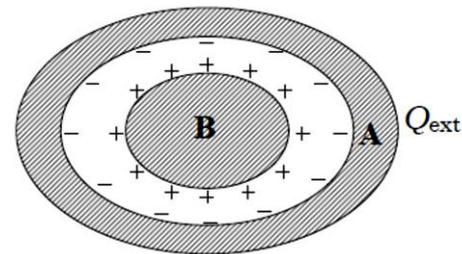


Fig.20

**2.6 Conducteur creux**

Considérons maintenant un conducteur de forme arbitraire contenant une cavité (voir figure 18.). Supposons qu’il n’existe aucune charge à l’intérieur de la cavité. Dans ce cas, le champ électrique à l’intérieur de la cavité doit être nul indépendamment de la distribution de la charge sur la surface externe du conducteur. De plus, le champ à l’intérieur de la cavité est nul même s’il existe un champ électrique à l’extérieur du conducteur.

Pour démontrer ce point, nous utilisons le fait que chaque point du conducteur est porté au même potentiel électrique, deux points quelconques A et B de la surface de la cavité sont donc au même potentiel. Imaginons maintenant qu’un champ électrique  $\vec{E}$  existe à l’intérieur de la cavité et calculons la différence de potentiel  $V_B - V_A$  définie par l’équation :

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}$  n’étant pas nul, nous pouvons toujours trouver un chemin entre A et B pour lequel  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  est un nombre positif, l’intégrale est alors positive. Or  $V_A - V_B = 0$ , la circulation de  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  est nulle pour tous les parcours entre deux points quelconques du conducteur, il en résulte que le champ électrique est partout nul. Par conséquent, une cavité entourée par des murs conducteurs est une région où le champ est nul, quelles que soient les conditions extérieures au conducteur. Ce dernier constitue un écran électrostatique : aucun champ extérieur ne peut être décelé dans la cavité. Cette dernière est à l’abri de toute influence extérieure. Cette propriété est valable même si le conducteur creux comporte des ouvertures, c’est le cas d’une cage de Faraday.

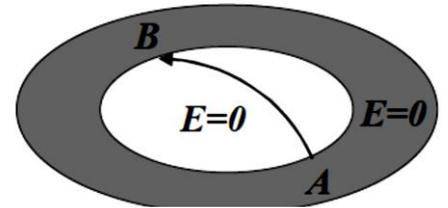


Fig.18. conducteur creux

**Applications : Cage de Faraday.**

C’est une cage métallique qui permet d’effectuer des mesures à l’abri des champs extérieurs. Inversement, ces mesures ne perturbent pas des expériences menées à l’extérieur. Considérons une cage de Faraday fabriquée à l’aide d’un grillage métallique. Des pendules électrostatiques sont mis en contact avec les parois internes et externes de la cage comme le montrent les figures 21.

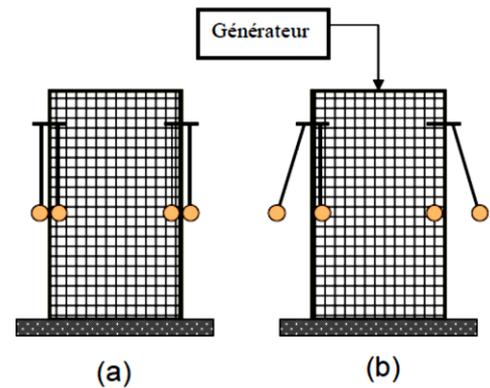


Fig.21. cage de Faraday

**2.7 Capacité d’un conducteur**

Considérons un conducteur isolé en équilibre électrostatique, placé en un point O de l’espace et portant une charge Q, répartie sur sa surface externe avec une densité surfacique  $\sigma$  telle que :

$$Q = \iint \sigma dS$$

Si la charge Q augmente, la densité surfacique  $\sigma$  augmente proportionnellement :

$$\sigma = a Q$$

Cela, en raison de la linéarité des équations qui régissent le problème de l’équilibre des conducteurs. Le potentiel créé par Q, en un point M de l’espace tel que  $OM = r$ , s’écrit

$$V = K \iint \frac{\sigma dS}{r} \quad \text{soit} \quad V = KQ \iint \frac{adS}{r}$$

Ce résultat reste valable pour tout point de la surface du conducteur. L’intégrale dépend uniquement de la géométrie et des dimensions du conducteur. On en déduit que le rapport, entre la charge et le potentiel auquel est porté le conducteur,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}$$

ne dépend que de la géométrie du conducteur, on l'appelle capacité propre du conducteur. Celle-ci est donnée par l'expression :

$$Q = CV$$

C'est une grandeur positive, dont l'unité est appelée le farad en hommage à Michael Faraday (1791-1867). Le farad est ainsi défini comme la capacité d'un conducteur isolé dont le potentiel est de 1 volt lorsqu'il reçoit une charge de 1 coulomb. Le farad est une unité très grande, on utilise plutôt des sous multiples : Le microfarad :  $1\mu F = 10^{-6}F$ , le nanofarad :  $1nF = 10^{-9} F$ , le picofarad :  $1 pF = 10^{-12}F$ .

### 2.7.1 Condensateurs

Un condensateur est un système constitué de deux conducteurs électriques en influence totale.

On réalise un tel système en utilisant deux conducteurs dont l'un est creux et entoure complètement l'autre (Figure 22). L'espace compris entre les deux conducteurs, appelées "armatures", est vide ou rempli d'un milieu isolant (diélectrique).

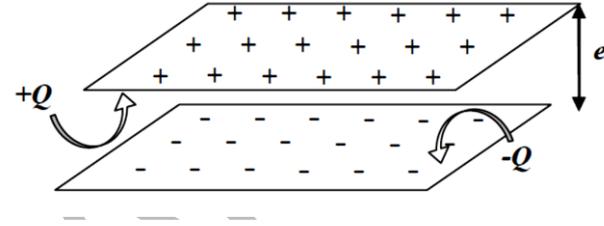


Fig.22 condensateur plan

#### Remarques :

1°) Il est important de noter qu'un condensateur est caractérisé par la valeur absolue de la charge  $Q$  portée par chaque armature et non pas la charge résultante qui est nulle. De même, il est caractérisé par la différence de potentiel  $V$  entre ses armatures et non pas le potentiel de l'une de ses armatures par rapport à une référence donnée.

2°) Le nom de condensateur, donné à un système de deux conducteurs en influence totale, provient du fait que ces systèmes mettent en évidence le phénomène de « condensation de l'électricité », à savoir l'accumulation de charges électriques sur la surface des armatures.

### 2.7.2 Capacité d'un condensateur

Le concept de capacité électrique, introduit dans le cas d'un seul conducteur, peut être étendu à un condensateur. On définit la capacité d'un condensateur par :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$Q$  est la charge portée par chacune des armatures ( $+Q$  pour l'une et  $-Q$  pour l'autre) et  $V = V_1 - V_2$  est la différence de potentiel entre ces armatures. La capacité est une constante propre à chaque condensateur. Sa valeur dépend de la forme, des dimensions et de la position relative des deux conducteurs qui le constituent. Elle dépend également de la nature du milieu qui les sépare. La méthode de calcul de la capacité d'un condensateur s'appuie sur la relation :

$$Q = CV.$$

On commence d'abord par calculer le champ électrique en un point quelconque à l'intérieur du condensateur. La circulation du champ entre les deux armatures, permet de tirer l'expression du potentiel. Le rapport

$$C = \frac{Q}{V}$$

nous donne la valeur de la capacité du condensateur considéré.

### 2.7.3 Association de condensateurs

Pour des raisons pratiques, on utilise des associations de plusieurs condensateurs afin d'emmagasiner le plus d'énergie possible. On distingue deux types de groupements de condensateurs : le groupement en série et le groupement en parallèle. La capacité équivalente des systèmes qui en résultent dépend du groupement choisi.

#### 2.7.3.1 Association en série.

Considérons le groupement de N condensateurs en série représenté sur la figure 23.a. Lorsqu'une différence de potentiel  $\Delta V = V_0 - V_N$  est appliquée entre les points extrêmes de l'ensemble des condensateurs, l'armature de gauche du premier condensateur va acquérir une charge Q. En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge  $\pm Q$  (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents. La différence de potentiel totale aux bornes de l'ensemble des condensateurs s'écrit alors simplement :

$$\Delta V = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{N-1} - V_N)$$

Soit

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \frac{Q}{C_4} + \dots + \frac{Q}{C_N} = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Cette différence de potentiel correspond à celle d'un condensateur unique de capacité équivalente

$$\frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

**Intérêt** : Ce montage est utilisé lorsque la différence de potentiel appliquée est grande et ne peut pas être supportée par un seul condensateur.

#### 2.7.3.2 Association en parallèle

Soient N condensateurs, placés en parallèle, avec la même différence de potentiel V (Figure 23.b). On désigne par  $Q_i$  et  $C_i$  la charge électrique et la capacité du ième condensateur, on a :

$$Q_i = C_i V$$

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i = \sum_{i=1}^N C_i V = V \sum_{i=1}^N C_i$$

La capacité équivalente est la somme des capacités individuelles.

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$$

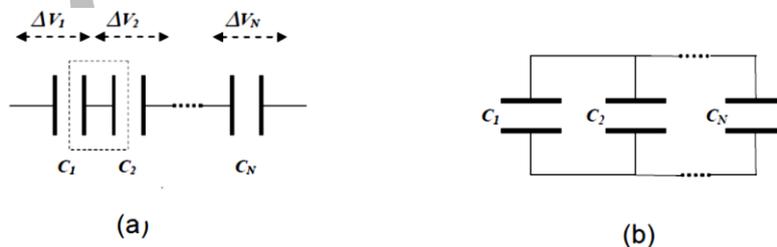


Fig.23

## 2.8 Energie

### 2.8.1 Energie électrostatique d'un conducteur

L'énergie électrostatique d'un conducteur isolé est calculée par le travail nécessaire qu'il faut fournir pour le charger. Elle représente la somme des variations d'énergie potentielle subies par toutes les charges du conducteur. Soit  $dE_p$  la variation d'énergie potentielle subie par une charge élémentaire  $dq$ , ramenée de l'infini (choisi comme référence du potentiel) jusqu'au conducteur

$$dE_p = Vdq$$

Où  $q$  et  $v$  désignent les valeurs de la charge et du potentiel dans un état intermédiaire. Au cours du transfert de charges sur le conducteur, sa charge totale ainsi que la valeur absolue de son potentiel augmentent.

L'énergie interne du conducteur lorsqu'il atteint sa charge complète est alors donnée par :

$$E_p = \int_0^Q Vdq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

Soit finalement :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Ou bien

$$E_p = \frac{1}{2} QV$$

### 2.8.2 Energie emmagasinée dans un condensateur

Considérons un condensateur dont :

- l'armature interne est portée au potentiel  $V_1$  et dont la charge est  $Q_1 = +Q$
- et l'armature externe est portée au potentiel  $V_2$  et dont la charge de la surface intérieure est  $Q_2 = -Q$ . La surface extérieure porte une charge  $Q_{ext}$

L'énergie du condensateur est

$$E_p = \frac{1}{2} Q[V_1 - V_2] + \frac{1}{2} Q_{ext} V_2$$

Si l'armature externe est reliée à la terre, on a :  $V_2 = 0$  et  $Q_{ext} = 0$  d'où

$$E_p = \frac{1}{2} QV$$

Soit

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{et} \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

## 2.9 Applications et exercices

### Application 9 : (Cavité d'un conducteur, écran électrique)

1) Un conducteur  $C$  de potentiel  $V_0$  possède une cavité vide de charge.

-Quelles sont les valeurs du champ et du potentiel dans la cavité du conducteur ?

-Quelle est la charge surfacique  $\sigma$  portée par la surface du conducteur bordant la cavité ?

-Quelle est la charge  $Q_i$  portée par cette surface intérieure ?

2) Que devient ce dernier résultat si la cavité contient un deuxième conducteur portant la charge  $q$  (voir la figure)?

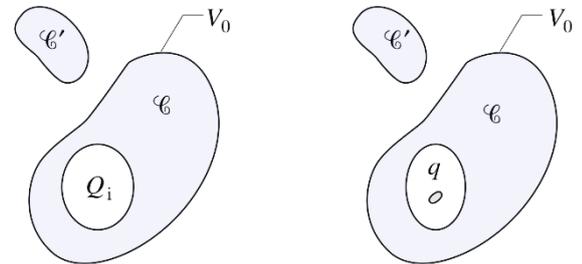
-Quel est le potentiel de ce conducteur quand  $q = 0$  ?

La présence de  $C'$  change-t-elle le résultat ?

3)  $C'$  est neutre  $C$  est porté au potentiel 0 et le conducteur intérieur a  $C$  est chargé.

-Quel est le potentiel de  $C'$  ? Le conducteur intérieur influence-t-il  $C'$  ?

4) Énoncer le théorème des écrans le plus général.



### Solution

1) La cavité constitue un domaine vide de charges, où le potentiel vérifie  $\Delta V = 0$ . Il existe une solution évidente de cette équation, qui vaut  $V_0$  sur les bords de la cavité, c'est  $V = V_0$  en tout point de la cavité.

Comme la solution est unique, c'est la solution du problème. Le champ électrique est donc nul en tout point de la cavité. Par application du théorème de Coulomb, nous en déduisons que la charge surfacique du conducteur sur toute la surface de la cavité est nulle et donc  $Q_i = 0$ .

2) Sauf précision supplémentaire (et géométrie très simple !), nous ne sommes pas en mesure de déterminer complètement la valeur des champs et potentiels dans la cavité. Nous savons cependant qu'à l'équilibre, le champ électrique est nul au sein du conducteur  $C$ . L'application du théorème de Gauss à une surface fermée, contenue dans le conducteur  $C$  et contenant la cavité, nous permet d'écrire :  $0 = q + Q_i/\epsilon_0$  soit  $Q_i = -q$ . Dans la cavité, les charges en regard sont opposées : c'est le théorème des éléments correspondant.

Quand  $q = 0$ ,  $Q_i = 0$  et donc on trouve comme en 1) :  $V = V_0$  qui est le potentiel à l'intérieur de la cavité et aussi sur le deuxième conducteur.

Ce résultat ne fait pas intervenir  $C'$ . Ainsi le potentiel du conducteur neutre intérieur au conducteur creux porté au potentiel  $V_0$  est  $V_0$  indépendant de  $C'$ . Le conducteur creux porté à un potentiel fixé fait écran aux influences de  $C'$  sur le conducteur neutre intérieur

3)  $C'$  est à l'extérieur de  $C$  et le potentiel à l'extérieur de  $C$  vérifie  $\Delta V = 0$  avec  $V = 0$  sur  $C$  et à l'infini. Essayons la solution  $V = 0$  partout. Elle vérifie bien  $\Delta V = 0$  et  $V = 0$  sur  $C$  et à l'infini.

On a alors aussi  $V = 0$  sur  $C'$  d'où, puisque  $V = 0$  « à côté » de  $C'$  un champ  $\vec{E}$  nul au voisinage de tout point de  $C'$  donc  $\sigma = 0$  partout sur  $C'$  donc  $Q_{C'} = 0$  ce qui est vrai.

Ainsi  $V = 0$  est le potentiel qui convient à cette situation :  $\Delta V = 0$  avec  $V = 0$  sur  $C$  et à l'infini et  $Q = 0$  sur  $C'$ .

La présence du conducteur chargé intérieur au conducteur creux n'est pas intervenue : celui-ci fait écran aux influences du conducteur intérieur sur  $C'$  extérieur.

4) Par superposition des situations précédentes : un conducteur creux porté à un potentiel fixé fait écran aux influences des conducteurs extérieurs sur les conducteurs intérieurs et aux influences des conducteurs intérieurs sur les conducteurs extérieurs.

**Application 10 : (Le condensateur cylindrique)**

Les armatures du condensateur cylindrique sont deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  et de hauteur  $h$ . Nous négligerons, ici encore, les effets de bord liés au caractère fini de la longueur

$h$ . Cela revient à « renvoyer à l'infini » les extrémités du condensateur. Tout se passe, dans cette approximation, comme si le système était non seulement de révolution autour de l'axe (Oz), mais aussi invariant par translation parallèlement à l'axe (Oz).

Dans ces conditions, le potentiel est, en coordonnées cylindriques, de la forme :

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r)$$

Dans l'espace vide de charge séparant les armatures, le champ est à flux conservatif. En effet, à travers un cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $r$  compris entre  $R_1$  et  $R_2$ , son flux ne dépend pas de  $r$  et vaut :

$$2\pi r h E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

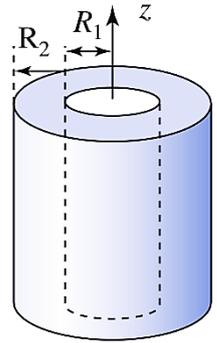
Nous en déduisons :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r} \vec{e}_r$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

La capacité du condensateur cylindrique est donc :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

**Application 11 : (Capacité d'un condensateur sphérique)**

Utiliser le même type de raisonnement du condensateur cylindrique pour exprimer la capacité d'un condensateur sphérique, constitué par deux armatures sphériques concentriques, de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Interpréter ce résultat lorsque la différence relative des rayons est très faible.

**Solution**

Pour ce système à symétrie sphérique, le champ et le potentiel sont de la forme :

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r)$$

$$\text{Et } \vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r)\vec{e}_r = -dV(r)/dr \vec{e}_r.$$

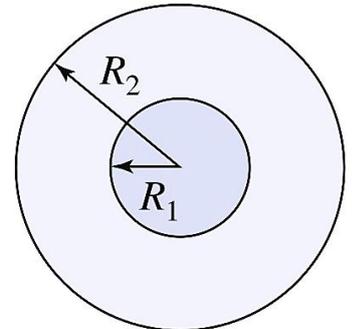
En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon  $r$ , compris entre  $R_1$  et  $R_2$  nous obtenons :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Nous en déduisons :

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Puis la capacité (positive) :



$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Lorsque les deux rayons sont relativement proches, notons  $R_2 = R_1 + e$  avec  $e \ll R_1$ .  
Nous avons alors :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 + e} \approx \frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{e}{R_1}\right)$$

Soit :

$$C \approx \frac{4\pi\epsilon_0 R_1^2}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Expression analogue à celle obtenue pour le condensateur plan

### EXERCICE 9 (Charges obtenues par influence)

L'origine des potentiels est prise à l'infini. Le sol est également au potentiel nul. On considère un conducteur (éventuellement lié électriquement au sol) et un corps chargé, presque ponctuel, de charge  $Q_0$  positive.

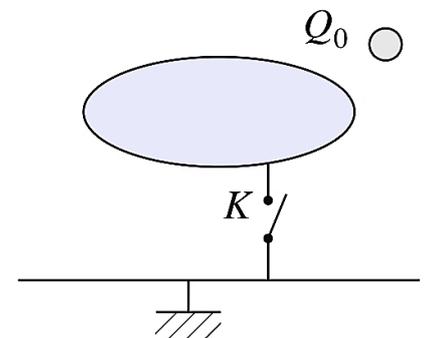
On suppose que ce système n'est soumis à aucune autre influence électrique.

1) K est fermé.

Déterminer le signe de la charge  $Q$  du conducteur.

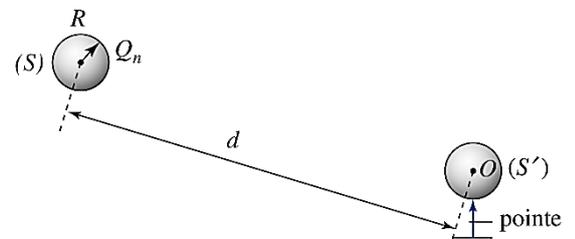
2) On considère un second équilibre où K est ouvert, le conducteur étant globalement neutre.

Déterminer le signe du potentiel  $V$  du conducteur.



### EXERCICE 10 (Sphères électrisées)

Une sphère  $S$  de rayon  $R$  porte la charge initiale  $Q_0$ . Son centre est à distance  $d \gg R$  de l'origine. Une autre sphère  $S'$  (identique à  $S$ ) est centrée en  $O$  et posée sur une pointe conductrice reliée au sol par un fil conducteur. On déplace  $S'$  jusqu'à l'amener au contact de  $S$ , puis on la ramène dans sa position initiale. Quelle est la charge portée par  $S$  après cet aller-retour ? Généraliser au cas de  $n$  allers-retours.



## LES COURANTS CONTINUS

### 3 Courants électriques

#### 3.1.1 Origine du courant électrique

Soient deux conducteurs A et B, initialement en équilibre électrostatique, portant des charges  $Q_A$  et  $Q_B$  et dont les potentiels respectifs sont  $V_A$  et  $V_B$  tels que  $V_A > V_B$  par exemple. Dans ces conditions, un champ électrique  $\vec{E}$  existe entre A et B. (Figure. 24.a)

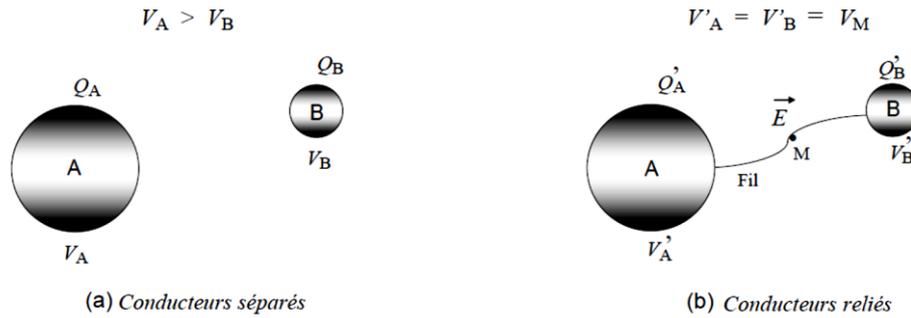


Fig.24

Lorsqu'on relie les conducteurs A et B par un fil conducteur, l'équilibre se rompt et un mouvement de charges électriques apparaît, sous l'action d'une force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Ce mouvement se poursuit jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre dans le nouveau conducteur formé par A, B et le fil (Figure. 24.b). Cette circulation de charges correspond au passage d'un courant électrique dans le fil de connexion. Ce courant est temporaire.

Lors de ce mouvement, la charge totale des conducteurs A et B se conserve :

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow Q_A - Q'_A = Q'_B - Q_B \Rightarrow -\Delta Q_A = +\Delta Q_B$$

Dans cet exemple,  $V_A > V_B$ , la variation de charges correspond à une diminution des charges positives ou à une augmentation des charges négatives du conducteur A.

#### 3.1.2 Courant permanent

Pour avoir une circulation permanente du courant électrique, il faut maintenir un état de déséquilibre entre les deux conducteurs A et B lorsqu'ils sont reliés. A cet effet, il est nécessaire d'amener de façon continue des charges sur l'un des conducteurs. Ceci peut être réalisé à l'aide d'appareils que l'on appelle générateurs. Un courant permanent correspond à un déplacement ininterrompu de charges libres.

#### 3.1.3 Sens conventionnel du courant

Dans les métaux, le courant résulte d'un déplacement d'électrons, c'est à dire de charges négatives. Le sens conventionnel du courant, choisi par Ampère au début du dix-neuvième siècle, est opposé à celui des électrons. Cette convention est toujours en vigueur. Par conséquent, le courant électrique circule du pôle positif au pôle négatif à l'extérieur du générateur et du pôle négatif au pôle positif à l'intérieur du générateur (figure 25).

Dans les autres matériaux<sup>1</sup>, le courant électrique est dû aux mouvements de différents porteurs de charges : électrons, ions positifs, ions négatifs...

Nous ne considérerons, dans ce qui suit, que la conduction électrique dans les métaux.

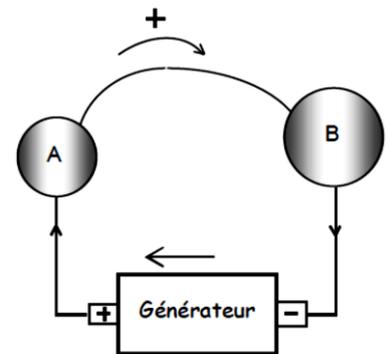


Fig.25

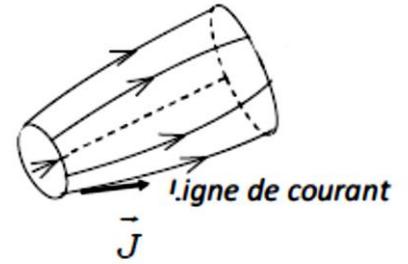
### 3.1.4 Intensité du courant

Soit un conducteur métallique de section  $S$ . L'intensité  $I$  du courant électrique est, par définition, la quantité d'électricité  $dQ$  qui traverse la section  $S$  pendant un intervalle de temps  $dt$ .

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

L'intensité  $I$  est exprimée en ampères (A).

Un courant électrique est continu si son intensité  $I$  reste constante au cours du temps.



Tube de courant

Fig.26

### 3.1.5 Vecteur densité de courant

La quantité de charge  $dq$ , qui traverse la section  $dS$  perpendiculaire à l'axe du tube de courant, occupe, pendant un temps  $dt$ , un volume cylindrique.



Fig.27

et a pour valeur :

$$dV = dx \cdot dS = v \cdot dt \cdot dS$$

$$dq = \rho \cdot dV = \rho \cdot v \cdot dt \cdot dS$$

$\vec{v}$  et  $\vec{dS}$  sont ici parallèles. Dans le cas où  $\vec{dS}$  n'est plus parallèle à  $\vec{v}$  (figure 27.b), cette expression devient :

$$dq = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt$$

Introduisons un vecteur  $\vec{j}$  tel que:  $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

D'où l'expression

$$\frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Si on considère, à présent, la section  $S$  du conducteur, la charge totale qui la traverse est :

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Soit :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

L'intensité du courant électrique apparaît comme le flux du vecteur  $\vec{j}$  à travers la surface  $S$ .

La grandeur vectorielle  $\vec{j}$  est appelée "densité de courant", elle est mesurée en ampères par mètre carré (A/m<sup>2</sup>).

La dernière expression qui apparaît ici dans un cas particulier est valable dans tous les cas ; la surface  $S$  est, dans le cas général, une surface quelconque fermée ou non.

### 3.1.6 Mouvement des électrons dans le vide

On soumet deux plaques métalliques A et B, parallèles, placées dans le vide et séparées d'une distance  $d$ , à une différence de potentiel  $V = V_A - V_B$ . (Figure 28.a). Ces conditions entraînent la création d'un champ électrique  $\vec{E}$  entre les deux plaques tel que :

$$E = \frac{V_A - V_B}{d} = \frac{V}{d}$$

Si un électron est émis par la plaque B, il sera soumis à une force électrique :

$$\vec{F} = -e\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

L'accélération étant constante, le mouvement des électrons, dans le vide, est donc uniformément accéléré, ce qui n'est pas le cas dans les métaux.

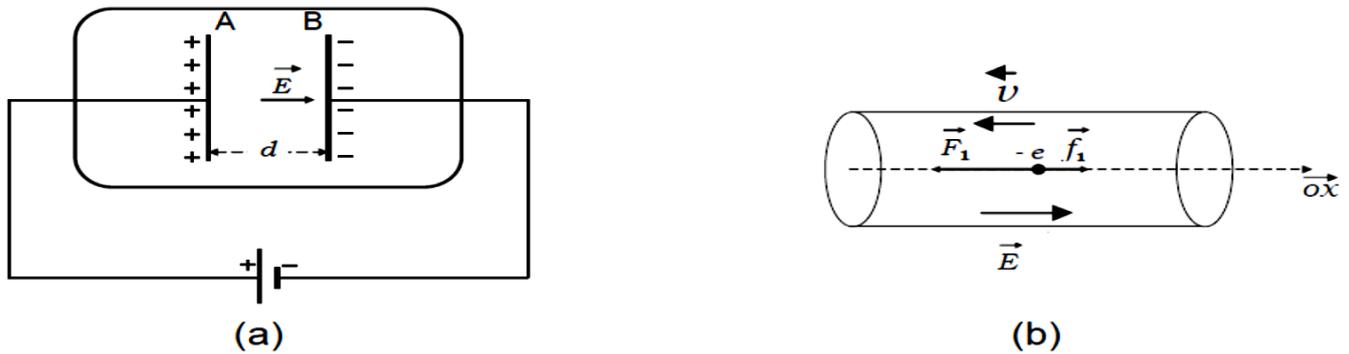


Fig.28

### 3.1.7 Mouvement des électrons dans un conducteur

Dans un métal (figure 28.b), en l'absence de champ électrique, les électrons libres se déplacent dans toutes les directions. Leur vitesse moyenne est nulle, il n'y a donc pas de courant. En présence d'un champ électrique, un mouvement d'entraînement se crée, il en résulte un courant électrique.

L'étude des mécanismes de conduction dans les métaux fait appel à la mécanique quantique. Néanmoins on peut considérer, en première approximation, que l'effet du réseau cristallin sur le mouvement des électrons se traduit par une force de freinage de la forme :

$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique pour l'électron (figure 28.b), on a :

$$\vec{F} + \vec{f} = -m\vec{a}$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération de l'électron. La projection de cette relation sur l'axe  $\vec{ox}$  donne avec  $E_x = E$  :

$$-eE - kv_x = ma_x \Rightarrow m \frac{dv_x}{dt} + kv_x = -eE$$

Ou encore :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m}v_x = -\frac{e}{m}E$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre. La solution générale est la somme de deux solutions :

- une solution de l'équation homogène (sans second membre) :

$$v_h = A \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

- et une solution particulière :

$$v_x = -\frac{e}{k} E$$

Soit :

$$v_x(t) = -\frac{e}{k} E + A \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$$

En tenant compte de la condition initiale  $v_x(0) = 0$  , on obtient la constante  $A = \frac{e}{k} E$  .

Ce qui donne :

$$v_x(t) = -\frac{e}{k} E \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)\right) = v_l \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Ou

$$v_l = \frac{e}{k} E$$

est la vitesse limite atteinte par les électrons et

$$\tau = \frac{m}{k}$$

la constante de temps ou temps de relaxation.

Le module de la vitesse des électrons est représenté sur la figure 29.

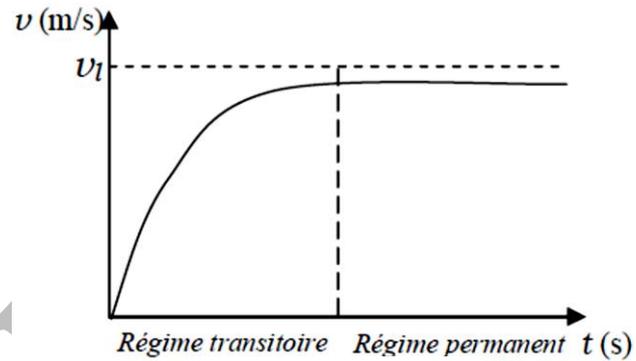


Fig.29

**Remarques :**

1°) La durée du régime transitoire étant extrêmement faible, ce régime peut être négligé.

La vitesse des électrons dans un métal est donc égale à celle du régime permanent.

2°) L'existence d'une force de frottement dans les métaux se traduit par un dégagement de chaleur.

**3.2 Loi d'ohm**

**3.2.1 Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique**

L'expérience montre que :

Le rapport, entre la différence de potentiel  $V$  entre deux points d'un conducteur métallique et le courant qui le traverse, est constant, la température étant maintenue constante.

$$V = R I$$

C'est la loi d'Ohm. La constante  $R$  est, par définition, la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms ( $\Omega$ ).

**3.2.2 Forme locale de la loi d'Ohm**

**3.2.2.1 Conductivité  $\sigma$**

Un conducteur cylindrique, de longueur  $l$  et de section  $S$ , est soumis à une différence de potentiel  $V$  : il en résulte, en tout point du conducteur, un champ électrique  $\vec{E}$  tel que :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$\vec{E}$  et  $\vec{l}$  étant parallèles, on a :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -E \int_0^l dl \Rightarrow V = V_1 - V_2 = El$$

La différence de potentiel  $V$  donne naissance à un courant électrique  $I$  dont la valeur est donnée par la loi d'Ohm

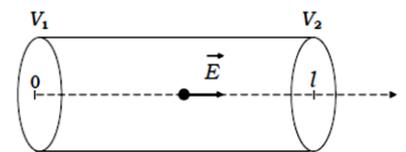


Fig.30

$$V = R I \quad \text{d'où} \quad E l = R J S$$

Soit

$$R = \frac{l}{RS} E = \sigma E \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{l}{RS}$$

$\sigma$  est la conductivité du conducteur ; elle est exprimée en  $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  ou en siemens par mètre (S.  $\text{m}^{-1}$ ). On a l'expression de la résistance électrique :

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$$

A l'échelle microscopique, on peut écrire

$$J = -nev = \frac{ne^2}{k} E$$

D'où

$$\sigma = \frac{ne^2}{k}$$

En fonction du temps de relaxation, la conductivité s'écrit :

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau$$

Ce qui implique

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Cette expression est générale, elle constitue la « forme locale » de la loi d'Ohm.

### 3.2.2.2 Résistivité $\rho_\Omega$

La résistivité est l'inverse de la conductivité :

$$\rho_\Omega = \frac{1}{\sigma}$$

Elle s'exprime en  $\Omega \cdot \text{m}$ .

Dans le cas général, la résistivité dépend de la température :

$$\rho_\Omega = \rho_{\Omega 0} (1 + \alpha \Delta t)$$

Où :  $\rho_{\Omega 0}$  est la résistivité à la température  $0^\circ \text{C}$ ,  $\alpha$  une constante caractéristique du métal et  $\Delta T$  l'élévation de température.

### 3.3 Applications et exercices

#### Application 12 : (Conduction électrique d'un métal)

1) Évaluer, pour un très bon conducteur comme le cuivre métallique, l'ordre de grandeur de la vitesse de dérive des électrons de conduction, dans un fil de section  $S=1 \text{ mm}^2$ , parcouru par un courant  $I = 10 \text{ A}$ . La comparer à la vitesse d'agitation thermique d'un électron libre à la température  $T=300\text{K}$ .

2) Évaluer le temps de relaxation  $t$  du milieu. En assimilant  $t$  à un temps de collision (temps moyen entre deux collisions successives d'une charge de conduction avec le réseau), évaluer le libre parcours moyen  $l$  des charges de conduction.

3) Le champ électrique appliqué au milieu est sinusoïdal, de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

En notation complexe.

Montrer que le modèle précédent nous permet de définir une conductivité complexe  $\gamma$  en régime sinusoïdal établi.

Dans quel domaine de fréquence sera-t-il possible d'assimiler la conductivité du milieu à sa valeur en régime permanent ?

Données :

- masse d'un électron :  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ;
- charge d'un électron :  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ;
- constante d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ;
- constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ .

Cuivre :

- conductivité :  $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \cdot \text{m}^{-1}$
- masse volumique :  $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- masse molaire :  $M=64\text{g. mol}^{-1}$

On considérera que chaque atome de cuivre apporte un électron de conduction.

#### Solution

1) S'il existe un seul électron de conduction par atome de cuivre, la densité volumique des électrons de conduction est :

$$n = \frac{N_A \mu}{M} = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

La densité de courant électrique dans le fil est :

$$j = \frac{I}{S} = 10^7 \text{ A.m}^{-2}$$

La vitesse de dérive s'en déduit :

$$|v| = \left| \frac{j}{ne} \right| = 0,74 \text{ mm.s}^{-1}$$

Si nous utilisons la relation  $\frac{1}{2} m v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$  pour évaluer la vitesse d'agitation des électrons, nous obtenons  $v_T = 10^5 \text{ m.s}^{-1}$  à la température ambiante. Nous avons donc  $|\vec{v}| \ll v_T$ , ce qui justifie le modèle et donc les calculs précédents.

2) Le temps de relaxation  $t$  est :

$$\tau = \frac{m\gamma}{ne^2} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

Le libre parcours est défini comme le produit de la vitesse moyenne d'agitation par le temps de collision. Nous pouvons donc l'évaluer par :

$$l = v_T \tau = 2,5nm$$

Notons qu'il est nettement supérieur à la taille de la maille du réseau cristallin, typiquement de l'ordre de quelques dixièmes de nanomètres.

3) En notant la vitesse complexe  $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{j\omega t}$  du fluide d'électrons de conduction, lorsque le régime sinusoïdal est établi, l'équation du mouvement d'ensemble :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

Nous donne :

$$\vec{v}_0 = -\frac{m}{1 + j\omega\tau} \vec{E}_0$$

Le vecteur densité de courant complexe :

$$\vec{j} = \vec{j}_0 e^{j\omega t} = -nev$$

nous permet de définir la conductivité complexe :

$$\gamma = \frac{\frac{ne^2}{m}}{1 + j\omega\tau}$$

Nous pourrions confondre cette conductivité complexe avec sa valeur  $\gamma = ne^2\tau/m$  pour des pulsations  $\omega \ll 1/\tau$ . Pour l'étude de circuits électriques, où la fréquence reste toujours très inférieure à  $10^{14}$  Hz, nous pourrions confondre la conductivité complexe avec sa valeur à basse fréquence, car le temps caractéristique d'évolution  $T = 2\pi/\omega$  reste très grand par rapport au temps de relaxation  $t$  du milieu conducteur.

## MAGNÉTOSTATIQUE

### 4 Introduction.

#### 4.1 Propriétés des aimants

Dès l'antiquité les grecs avaient remarqué qu'une pierre de Magnésie<sup>1</sup>, la magnétite, avait la propriété d'exercer une force sur de petits morceaux de fer : d'où le mot magnétisme.

Puis on avait remarqué que les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses extrémités : les pôles. Ces deux pôles, appelés, comme les pôles géographiques, pôle nord et pôle sud, sont différents. L'expérience montre que :

Deux pôles de même nom se repoussent alors que deux pôles, de noms contraires, s'attirent.

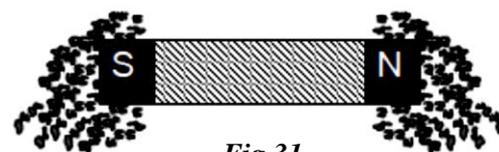


Fig.31

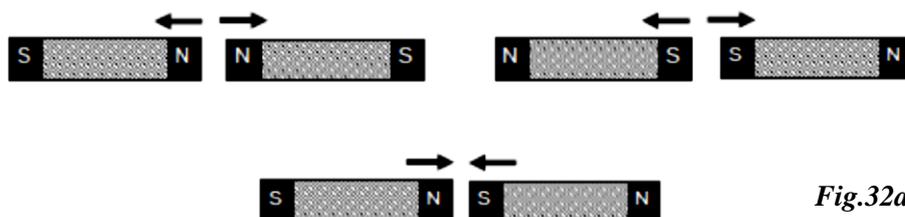


Fig.32a

L'expérience de l'aimant brisé montre que : Il est impossible de séparer le pôle nord du pôle sud d'un aimant. En effet si on casse un aimant en deux parties, on obtient deux autres petits aimants ayant chacun un pôle nord et un pôle sud. Si on répète cette opération, on obtient, à chaque fois, des aimants de plus en plus petits dotés chacun d'un pôle nord et d'un pôle sud.

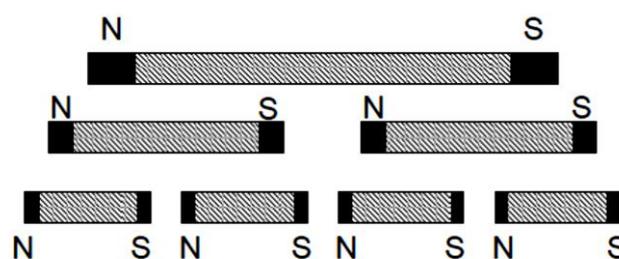


Fig.32b

#### 4.2 Champ magnétique

Le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un *champ magnétique* de la même manière qu'un champ gravitationnel existe au voisinage de la terre et un champ électrique autour d'une charge électrique. De même il existe, comme nous allons le voir, au voisinage d'un circuit électrique un champ magnétique.

*Un champ magnétique est une région de l'espace où, en chaque point,  
Le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force.*

Comme en électrostatique, on définit un vecteur champ magnétique noté  $\vec{B}$ . Ce vecteur est tangent aux lignes de champ.

<sup>1</sup>Magnésie : région de la Grèce antique en Asie Mineure (actuellement en Turquie)

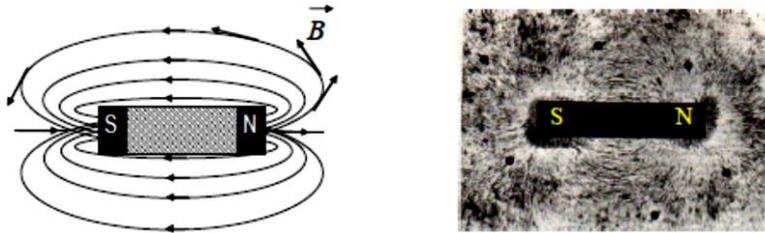


Fig.33

Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud. Dans le système M.K.S.A rationalisé, le champ magnétique est mesuré en *tesla* (T), en hommage au savant serbe Nikola Tesla (1856-1943), inventeur de l'alternateur. Historiquement le concept de champ est d'abord introduit en magnétisme. Faraday, en répandant de la limaille de fer au voisinage d'un aimant, constate que les grains de fer s'orientent et forment une figure, puis ce concept est étendu à l'électricité.

**4.3 Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une charge électrique.**

**4.3.1 Force de Lorentz**

A la fin du XIXe siècle, le physicien hollandais Hendrik Lorentz donne l'expression de la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur une charge ponctuelle  $q$ , se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$  dans des champs électrique et magnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

En présence du seul champ magnétique  $\vec{B}$  ( $\vec{E} = 0$ ), la force de Lorentz devient :

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$$

**Un champ magnétique est une région de l'espace où, en l'absence du champ électrique  $\vec{E}$ , une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{V}$ , est soumise à l'action d'une force  $\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$ .**

Cette nouvelle définition du champ magnétique est obtenue à partir de la force de Lorentz. Cette force.

- a pour module :

$$F = qVB \|\sin(\vec{V} \cdot \vec{B})\|$$

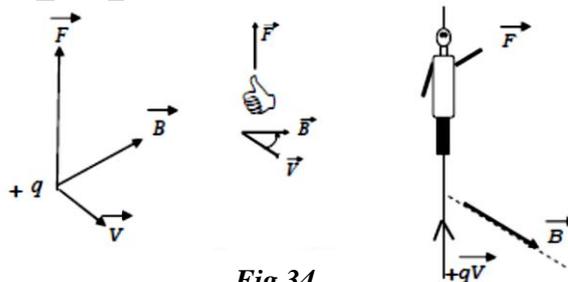


Fig.34

- sa direction est la perpendiculaire au plan formé par  $\vec{V}$  et  $\vec{B}$ ,

- Son sens est tel que, dans le cas d'une charge positive, les vecteurs  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{F}$  forment un trièdre direct (règle de la main droite). Lorsque la charge est négative la force change de sens. Le sens de cette force est également donné par la règle du bonhomme d'Ampère :

***Le bonhomme d'Ampère, traversé des pieds vers la tête par la charge (+q) animée d'une vitesse V, voit fuir les lignes de champ, et a la force à sa gauche***

#### 4.4 Action d'un champ magnétique sur un courant électrique.

##### 4.4.1 Force de Laplace

Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant  $I$ , est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , chaque élément  $d\vec{l}$  du fil subit une force :

$$\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Cette force est perpendiculaire au plan formé par le champ  $\vec{B}$  et l'élément de courant considéré. Son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère.

**Le bonhomme d'Ampère, parcouru par le courant I, des pieds vers la tête, a la force à sa gauche lorsqu'il regarde les lignes de champ.**

Nous allons démontrer la loi de Laplace à partir de la force de Lorentz trouvée soixante-dix ans après.

Considérons un élément de volume conducteur filiforme de longueur  $dl$ , de section  $S$  et parcouru par un courant  $I$ . Il est traversé à chaque instant par le même nombre  $N$  de charges et par conséquent par une même quantité infinitésimale de charges

$$dQ = Nq$$

Chaque charge (+q) subit de la part du champ magnétique  $\vec{B}$  une force.

$$q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

et les  $N$  charges subissent une force :

$$d\vec{F} = Nq\vec{v} \wedge \vec{B} = dQ\vec{v} \wedge \vec{B}$$

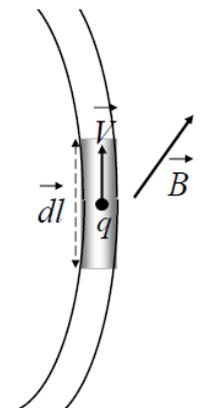


Fig.35

**4.5 Champ magnétique créé par un courant**

**4.5.1 Loi de Biot et Savart**

Un fil conducteur rectiligne de longueur infinie, parcouru par un courant  $I$ , crée, en un point M

de l'espace situé à une distance  $r$  du fil, un champ magnétique dont :

- la direction est telle que les lignes de champ soient des cercles axés sur le fil.
- le sens est donné par la règle du " bonhomme d'Ampère " : celui-ci, lorsqu'il est parcouru par  $I$ , des pieds vers la tête, voit en M le champ à sa gauche.
- le module est :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide. Dans le système MKSA,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ .

Dans le cas d'un circuit fermé de forme quelconque, chaque élément de courant  $I dl$ , crée en M un champ élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dl \wedge \vec{u}}{4\pi r^2}$$

C'est l'expression de la loi de Biot & Savart dans le cas général.

Le vecteur  $\vec{u}$  est orienté, comme le montre la figure, de la source vers le point M.

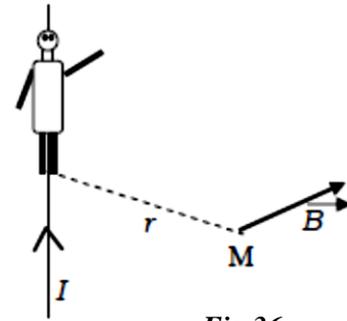


Fig.36

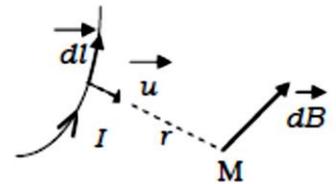


Fig.37

**4.6 Théorème d'ampère**

**4.6.1 Vecteur excitation magnétique**

Comme en électrostatique, on introduit un vecteur "excitation magnétique"  $\vec{H}$  tel que :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

N.B. Le vecteur  $\vec{H}$  a été longtemps appelé « champ magnétique » et le vecteur  $\vec{B}$  « induction magnétique ». Or c'est le vecteur  $\vec{B}$  qui est à l'origine de la force qui agit sur une charge  $q$  (force de Laplace) ; c'est donc  $\vec{B}$  qui est le champ.

**4.6.2 Circulation de l'excitation magnétique le long d'un contour fermé**

Considérons un fil conducteur rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant  $I$ . Il crée, à une distance  $r$ , un champ magnétique tangent à une ligne de champ et de module :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

L'excitation magnétique  $\vec{H}$  est parallèle à  $\vec{B}$  et son module est :

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi r}$$

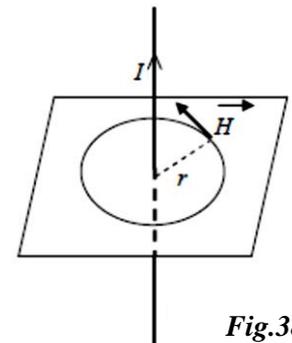


Fig.38

Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil dans des plans perpendiculaires.

Si on calcule la circulation du vecteur  $\vec{H}$  le long d'une ligne de champ, on trouve :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

Le rayon  $r$  du cercle est constant et l'intégrale donne le périmètre du cercle. Ce résultat, trouvé ici dans un cas particulier, est général, le contour  $C$  étant quelconque. D'où le théorème d'Ampère :

**La circulation du vecteur  $\vec{H}$  le long d'un contour fermé  $C$  quelconque est égale à la somme algébrique des courants qui se trouvent à l'intérieur de  $C$ .**

Soit :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_n I_n$$

En introduisant la densité de courant  $\vec{J}$ , on obtient :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$S$  est une surface quelconque qui s'appuie sur le contour  $C$ . C'est la formulation mathématique du théorème d'Ampère.

**Remarque :** Le théorème d'Ampère équivaut au théorème de Gauss trouvé en électrostatique dans le premier cas le vecteur excitation  $\vec{H}$  est relié aux courants sources  $\vec{J}$ , et dans le deuxième,  $\vec{D}$  est relié aux charges sources  $\rho$ .

## 4.7 Flux magnétique

### 4.7.1 Flux du champ magnétique à travers une surface

Nous avons défini, dans la première cour, le concept mathématique de " flux d'un vecteur  $\vec{A}$  à travers un élément  $dS$  d'une surface  $S$  ". par la quantité scalaire

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = AdS \cos\theta$$

Où  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire porté par la normale à  $dS$  (figure 39)

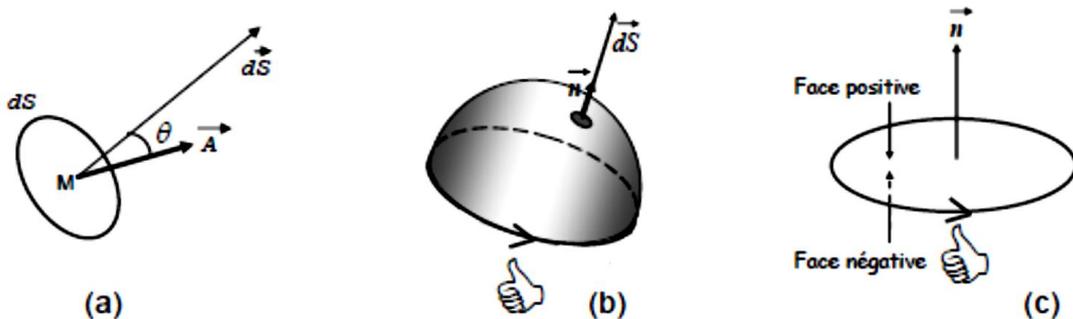


Fig.39

Le flux global à travers la surface  $S$  est obtenu par intégration :

Rappelons que, dans le cas d'une surface fermée, la normale est orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

Lorsque la surface est ouverte (figure 39. b), on choisit un sens de parcours du contour et on oriente la normale en utilisant par exemple la règle de la main droite. La figure 39.c représente une spire sur laquelle on a choisi une face positive et une face négative.

En électromagnétisme, on définit le flux du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  à travers une surface  $S$  par :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le flux du vecteur champ magnétique  $\Phi$  appelé " flux magnétique " a une très grande importance en électromagnétisme.

#### 4.8 Les équations de Maxwell

Ce chapitre vise à donner une vision générale des équations de Maxwell :

##### 4.8.1 Enonce des équations

Le socle de l'électromagnétisme repose sur cinq équations : les quatre équations de Maxwell et l'expression de la force de Lorentz. Ces équations sont (sous leur forme locale) :

##### L'équation de Maxwell Gauss

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

##### L'équation de Maxwell flux magnétique

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

##### L'équation de Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

##### L'équation de Maxwell Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

##### La force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$$

Ces équations portent le nom d'équations de Maxwell dans le vide. Cette dénomination est trompeuse car ces équations sont valables tout le temps. Elles s'appliquent en présence de charges et de courant c'est à dire dans un vide qui contient de la matière. On les nomme ainsi par opposition aux équations de Maxwell dans les milieux que l'on étudiera au second semestre.

## 4.9 Applications et exercices

### Application 13 : (Une mesure précise de la charge spécifique)

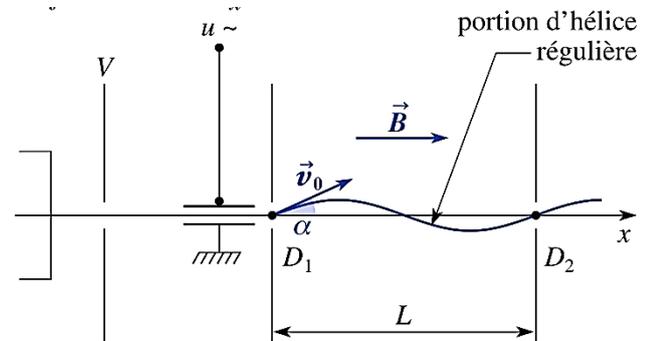
La figure suivante schématise une méthode expérimentale très précise de mesure de la charge spécifique  $e/m$  de l'électron. Les électrons traversent un premier diaphragme circulaire  $D_1$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  (tension  $V$  d'accélération) faisant un angle  $\alpha$  faible, mais variable avec l'axe ( $Ox$ ) (grâce à un condensateur soumis à une tension variable sur le trajet des électrons incidents).

Après  $D_1$  les électrons pénètrent dans un solénoïde  $S$  où règne un champ magnétostatique longitudinal uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ .

À une distance  $L$  de  $D_1$  est placé un deuxième diaphragme identique  $D_2$ .

À quelle condition les électrons du faisceau pourront-ils franchir  $D_2$  ?

En déduire une mesure possible de  $e/m$ .



### Solution

La trajectoire des électrons entre  $D_1$  et  $D_2$  est un morceau d'hélice, et les conditions optimales pour franchir  $D_2$  sont obtenues lorsque  $L$  est un nombre entier de fois le pas de l'hélice.

Soit

$$L = n \frac{2\pi m v_0 \cos \alpha}{eB}$$

Où  $n$  est un entier.

Sachant que  $\cos \alpha \approx 1$  à l'ordre un en  $\alpha$  et que  $1/2 m v_0^2 = eV$ , nous en déduisons :

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{n^2 L^2 B^2}$$

Les grandeurs  $n$ ,  $L$ ,  $B$  et  $V$  étant accessibles à la mesure, le rapport est déduit :

$$\frac{e}{m} = (1,7586 + 0,0023) \cdot 10^{11} \text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$$

### Application 14 : (Unités de $\vec{B}$ et $\mu_0$ )

Exprimer les dimensions de  $\vec{B}$  et  $\mu_0$  à l'aide des unités :  $kg$ ,  $m$ ,  $s$  et  $A$  du Système International d'unités.

### Solution

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  est une force, mesurée en  $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ . La dimension du champ magnétique est donc :

$$\begin{aligned} [B] &= \frac{[force]}{[charge \cdot vitesse]} = \frac{[force]}{[courant \cdot temps \cdot vitesse]} \\ &= kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-2} = T \end{aligned}$$

Utilisant l'expression de la loi de Biot et Savart, nous avons :

$$[\mu_0] = [B] \frac{[longueur^2]}{[dC]} = T \cdot m^2 \cdot A^{-1} \cdot m^{-1} = kg \cdot m \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}$$

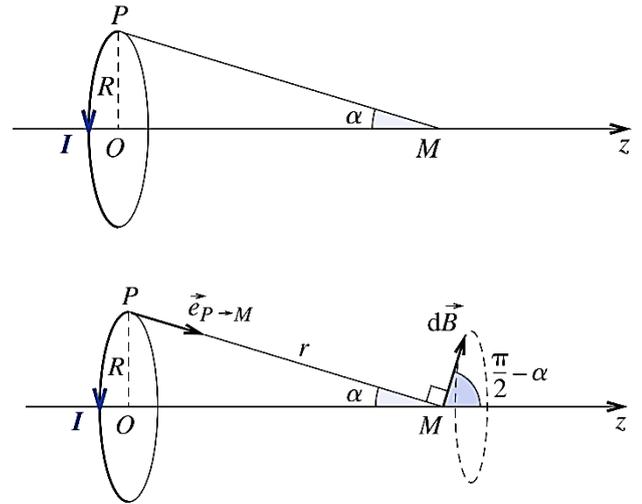
**Application 15 : (Champ créé par une spire circulaire sur son axe)**

Calculer le champ magnétostatique créé par une spire de rayon R en un point M de son axe, le rayon de la spire étant vue sous l'angle  $\alpha$  depuis M

**Solution**

Associons à un point P sur la spire, repéré par ses coordonnées cylindriques  $R, \theta$  et  $z_p$ , un élément de courant  $d\vec{C} = IR d\theta \cdot \vec{e}_z$ . Le champ élémentaire  $d\vec{B}$  attribué à cet élément de courant est représenté sur la figure.

Lorsque le point P décrit la spire,  $\theta$  varie de 0 à  $2\pi$ , et  $d\vec{B}$  décrit le cône de sommet M et de demi-angle  $\pi/2 - \alpha$ . Par conséquent, le champ total  $\vec{B}(M)$  sera dirigé selon  $(Oz)$  :



$$\vec{B}(M) = (\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = \left( \int_0^{2\pi} d\vec{B} \cdot \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_z$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} d\vec{B} \cdot \vec{e}_z &= \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta \cdot \vec{e}_\theta \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{r^2} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta \cdot \vec{e}_\theta \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{\left(\frac{R}{\sin \alpha}\right)^2} \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\theta \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{R} \end{aligned}$$

Le champ magnétique d'une spire circulaire sur son axe vaut :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

En particulier, le champ magnétostatique créé au centre de la spire vaut :

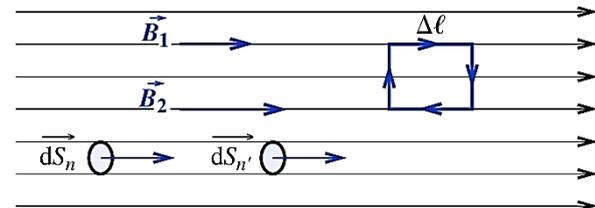
$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$$

Ces deux résultats méritent d'être mémorisés (et doivent pouvoir être retrouvés rapidement).

**Application 16 : (Champ uniforme)**

Établir que, si dans une région vide de courants, les lignes de champ sont des droites parallèles, alors le champ  $\vec{B}$  est uniforme.

Les tubes de courants élémentaires étant des cylindres de section droite constante ( $\vec{B} \cdot d\vec{S}_n = cte$ ) implique  $\vec{B} = cte$  le long d'une ligne de champ.



**Solution**

L'application du théorème d'Ampère à un contour rectangulaire comprenant deux lignes de champ montre immédiatement que  $B_1 \Delta l = B_2 \Delta l$ . Par suite  $\vec{B} = cte$  dans cette région.

**Application 17 : (Champ électrique induit par un solénoïde)**

Un solénoïde très long comporte  $n$  spires jointives bobinées par unité de longueur sur un cylindre de rayon  $a$  et d'axe  $(Oz)$ .

Déterminer le champ électrique induit par un courant  $i(t)$  variable circulant dans le solénoïde. La distribution de courants est invariante par translation parallèlement à l'axe  $(Oz)$  du solénoïde (approximation du solénoïde infini) et par rotation autour de cet axe. Tout plan perpendiculaire à cet axe est un plan de symétrie de la distribution qui engendre un champ magnétique de la forme  $\vec{B} = B(r, t)\vec{e}_z$ , en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ .

**Solution**

Nous savons que le champ est  $B(r, t) = \mu_0 i(t)$  à l'intérieur du solénoïde, et qu'il est nul à l'extérieur. Tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courants, qui engendre donc un champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = E(r, t)\vec{e}_\theta$$

Calculons la circulation de ce champ sur un cercle d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$  en utilisant la relation

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Nous obtenons :

$$2\pi r E(r, t) = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \quad \text{pour } r < a.$$

Et

$$2\pi r E(r, t) = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \quad \text{pour } r > a.$$

Nous en déduisons :

$$\vec{E} = -\mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \frac{r}{2} \vec{e}_\theta \quad \text{pour } r < a$$

Et

$$\vec{E} = -\mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \frac{a^2}{2r} \vec{e}_\theta \quad \text{pour } r > a$$

Nous voyons ici que le champ magnétique variable induit un champ électrique non nul dans la zone  $(r > a)$ , où il n'y a pourtant pas de champ magnétique.

**Exercice 11 (Disque de Rowland)**

Ce physicien américain d'une habilité expérimentale hors du commun fut le premier à démontrer qu'un courant électrique, quel qu'il soit, crée un champ magnétique. Le principe très

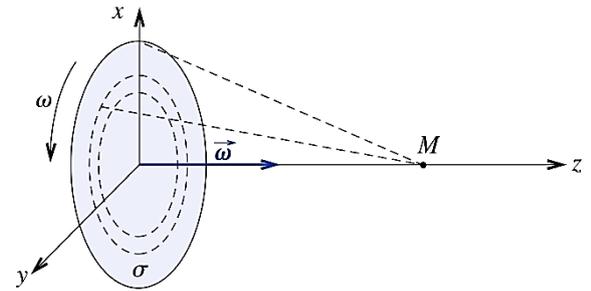
simplifié de l'expérience est le suivant.

Un disque métallique de rayon  $R$ , portant une charge électrique répartie avec la densité surfacique uniforme  $\sigma$  (sur l'ensemble des deux faces) tourne à la vitesse angulaire constante

$\omega$  autour de son axe ( $Oz$ ).

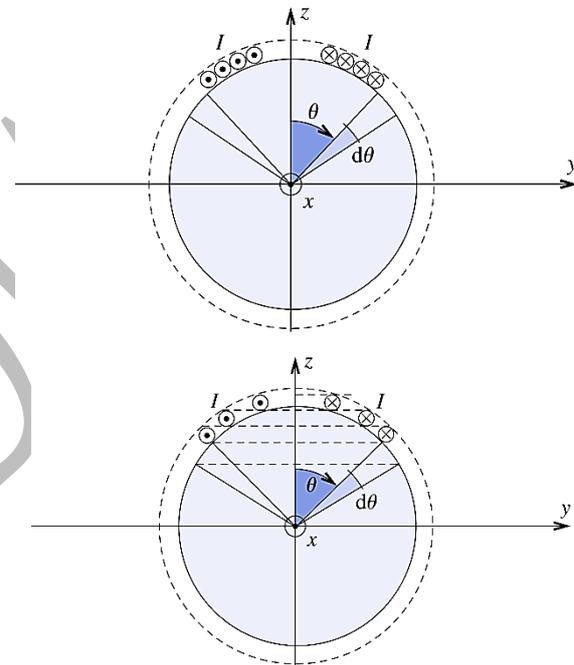
Calculer le champ magnétostatique créé par ces courants de convection en un point  $M$  de l'axe ( $Oz$ ).

Données :  $\sigma = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C m}^{-2}$ ;  $R = 10,5 \text{ cm}$ ;  $z = 2 \text{ cm}$ ;  $\omega = 61 \text{ tr. s}^{-1}$ .

**Exercice 12 (Sphère recouverte de spires)**

Une sphère de rayon  $R$  est recouverte d'un nombre élevé  $N$  de spires parcourues dans le même sens par un courant d'intensité  $I$ . Calculer le champ magnétique créé par cette distribution de courants au centre  $O$  de la sphère dans les deux cas suivants :

- 1) les spires sont jointives
- 2) les plans des  $N$  spires sont équidistants (spires non jointives) suivant ( $Oz$ ).

**Exercice 13 (Spire et solénoïde)**

1) a) Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe ( $Ox$ ) ( $de - \infty$  à  $+\infty$ ) d'une spire circulaire de rayon  $R$  et parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

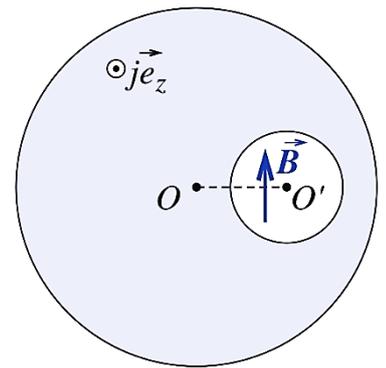
b) Interpréter le résultat obtenu.

2) Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe ( $Ox$ ) ( $de - \infty$  à  $+\infty$ ) d'un solénoïde circulaire de rayon  $R$ , de longueur  $l$  et comportant  $N$  spires jointives parcourues chacune par un courant d'intensité  $I$ .

**Exercice 14(Cylindre avec cavité cylindrique)**

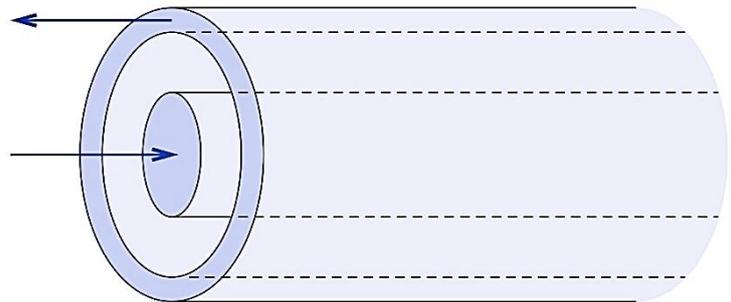
Une cavité cylindrique, d'axe  $(O'z)$  et de section circulaire de rayon  $R'$ , a été pratiquée dans un cylindre conducteur d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $R$  (figure ci-contre). En dehors de la cavité, le conducteur est parcouru par un courant constant de densité uniforme  $\vec{j} = j\vec{e}_z$ .

-Déterminer le champ magnétique en tout point de la cavité.

**Exercice 15(Câble coaxial particulier)**

Une ligne coaxiale (géométrie modélisée cylindrique) est réalisée avec un matériau conducteur dont les propriétés magnétiques sont équivalentes à celles du vide. Un cylindre conducteur interne plein, d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $a$  est entouré d'un deuxième conducteur coaxial, de rayon intérieur  $b_1$  et de rayon extérieur  $b_2$ . L'espace entre les deux conducteurs est vide.

Le conducteur central est parcouru par un courant d'intensité  $I$ , selon  $(Oz)$ , et le retour est assuré par le conducteur périphérique. Les densités volumiques sont supposées uniformes. Calculer le champ magnétostatique créé par une telle distribution en tout point de l'espace.



***Références***

1. J.M. BRÉBEC. Électromagnétisme. HACHETTE Supérieur (2003). Paris. 208 pages.
2. L.AIT-AGOUN, M. BENDAOU, N. DOLACHE, F. MEKIDECHE. Polycopié cours d'électricité (Phys2), (2002).
3. H. DJELOUAH, Electromagnétisme cours et exercices.
4. P. KREMPF, les nouveaux précis de physique électromagnétisme. Bréal (2003).191 pages.
5. S. M. REMAOUN. Polycopié d'Électromagnétisme Avec exercices pour Master & Licence. (2015).
6. J. L. QUEREL, J.MESPLEDE. Électromagnétisme MPSI, PCSI, PTSI 3eme édition, Bréal Edition (1995).
7. P. KREMPF. Les nouveaux précis Bréal- électromagnétisme MPSI, Bréal Edition. (2003).
8. FYENMAN. Le cours de physique de Feynman électromagnétisme 1. DUNOD (1999).
9. H. LUMBROSO. Ondes électromagnétiques. DUNOD (1996).