Exercice 1 :

Etant donnée l'équation différentielle suivante : $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ satisfaisant la condition initiale :

U = 0 pour $0 \leq x \leq 1$ quand t = 0

Et les conditions aux limites :

$U = 100$ en x = 0, pour $t > 0$

$U = 100$ en x = 1, pour $t > 0$

En utilisant la méthode implicite des différences finies, trouver la valeur de la fonction U au temps t = $2\Delta t$

On donne $\Delta x = 0.25 \quad \Delta t = 0.1$

Exercice 2 :

Etant donnée l'équation différentielle suivante : $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ satisfaisant la condition initiale :

U = 1 pour $0 \leq x \leq 1$ quand t = 0

Et les conditions aux limites :

$\frac{\partial U}{\partial x} = U$ en x = 0, pour $t > 0$

$\frac{\partial U}{\partial x} = -U$ en x = 1, pour $t > 0$

En utilisant la méthode implicite des différences finies et en approchant les conditions aux limites par des différences centrées, trouver la valeur de la fonction U au temps t = $2\,\Delta t$

On donne $\Delta x = 0.25 \quad \Delta t = 0.1$

<u>Exercice 3:</u> Devoir à faire à la maison et à remettre à l'enseignant

Etant donnée l'équation différentielle suivante : $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ satisfaisant la <u>condition initiale</u> :

U = 1 pour $0 \le x \le 1$ quand t = 0

Et <u>les conditions aux limites</u> :

$\frac{\partial U}{\partial x} = U$ en x = 0, quelque soit le temps

$\frac{\partial U}{\partial x} = -U$ en x = 1, quelque soit le temps

En utilisant la méthode implicite des différences finies et en approchant les conditions aux limites par des différences centrées, trouver la valeur de la fonction U au temps t = 2 Δt

$\Delta x = 0.1 \quad \Delta t = 0.01$

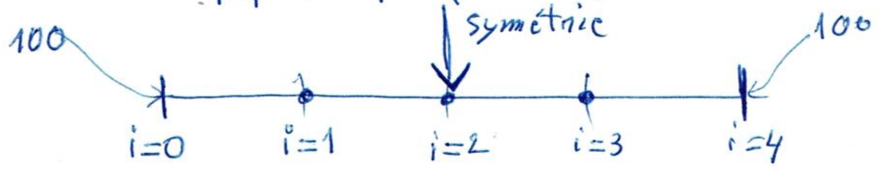
Solution EX 1 TD 2

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

On obtient avec quelques réarrangements de l'équation (1) :

$$-\lambda U_{i-1}^{j+1} + U_i^{j+1}(1+2\lambda) - \lambda U_{i+1}^{j+1} = U_i^j$$



nombre de pas : $\frac{1}{0.25} = 4$

$j=0$

$\underline{i=1}$: $-1.6\,U_0^1 + 4.2\,U_1^1 - 1.6\,U_2^1 = U_1^0$

$\underline{i=2}$: $-1.6\,U_1^1 + 4.2\,U_2^1 - 1.6\,U_3^1 = U_2^0$

par symétrie on obtient : $(U_3^1 = U_1^1)$

$$\begin{cases} 4.2\,U_1^1 - 1.6\,U_2^1 = 160 \\ -3.2\,U_1^1 + 4.2\,U_2^1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U_1^1 = 53.67 \\ U_2^1 = 40.89 \end{cases}$$

$j=1$

$\underline{i=1}$: $-1.6\,U_0^2 + 4.2\,U_1^2 - 1.6\,U_2^2 = U_1^1 = 53.67$

$\underline{i=2}$: $-1.6\,U_1^2 + 4.2\,U_2^2 - 1.6\,U_3^2 = U_2^1 = 40.89$

par symétrie $U_3^2 = U_1^2$

suite EX1 TD2 :

$$\begin{cases} 4.2\,U_1^2 - 1.6\,U_2^2 = 213.67 \\ -3.2\,U_1^2 + 4.2\,U_2^2 = 40.89 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1^2 = 76.9 \\ U_2^2 = 68.3 \end{cases}$$

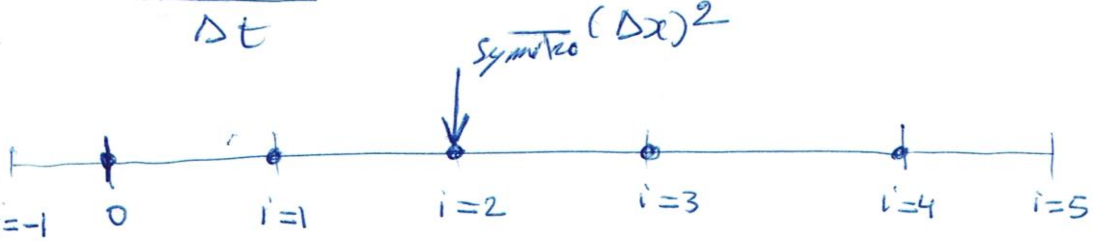
$t = \Delta t \longrightarrow U_1^1 = 53.67$ et $U_2^1 = 40.89$

$t = 2\Delta t \longrightarrow U_1^2 = 76.9$ et $U_2^2 = 68.3$

solution EX2 TD2 :

$\Delta x = 0.25 \quad \Delta t = 0.1 \quad \lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 1.6$

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} \qquad (2)$$



Avec quelques réarrangement de l'equation (2), on obtient :

$$-\lambda U_{i-1}^{j+1} + U_i^{j+1}(1+2\lambda) - \lambda U_{i+1}^{j+1} = U_i^j$$

$j=0$

$i=0$: $-1.6\,U_{-1}^1 + 4.2\,U_0^1 - 1.6\,U_1^1 = \overbrace{U_0^0}^{1}$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_0 = U \Longrightarrow \frac{U_1^1 - U_{-1}^1}{2\Delta x} = U_0^1 \Rightarrow U_{-1}^1 = U_1^1 - 2\Delta x U_0^1$$

$$-1.6\left[U_1^1 - 2\Delta x U_0^1\right] + 4.2\,U_0^1 - 1.6\,U_1^1 = 1$$

suite EX 2 TD 2 :

$i=0 \rightarrow -3.2\,U_1^1 + 5\,U_0^1 = 1$

$i=1$

$-1.6\,U_0^1 + 4.2\,U_1^1 - 1.6\,U_2^1 = \overbrace{U_1^0}^{1} = 1$

$i=2$

$-1.6\,U_1^1 + 4.2\,U_2^1 - 1.6\,U_3^1 = \overbrace{U_2^0}^{1} = 1$

(par symétrie $U_3^1 = U_1^1$)

$$\begin{cases} 5U_0^1 - 3.2U_1^1 + 0U_2^1 = 1 \\ -1.6U_0^1 + 4.2U_1^1 - 1.6U_2^1 = 1 \\ 0U_0^1 - 3.2U_1^1 + 4.2U_2^1 = 1 \end{cases}$$

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 5 & -3.2 & 0 \\ -1.6 & 4.2 & -1.6 \\ 0 & -3.2 & 4.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^1 \\ U_1^1 \\ U_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

système peut être résolu par l'algorithme de Thomas (TDMA – Tridiagonal Matrix Algorithm)

$U_0^1 = 0.756$

$U_1^1 = 0.869$

$U_2^1 = 0.900$

suite EX2 TD2 :

$j = 1$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3.2 & 0 \\ -1.6 & 4.2 & -1.6 \\ 0 & -3.2 & 4.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^2 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.756 \\ 0.869 \\ 0.900 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U_0^2 = 0.626$$

$$U_1^2 = 0.742$$

$$U_2^2 = 0.780$$