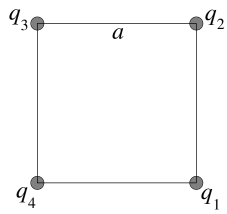
Tutorial series #1 ———— February 2024

!! For numerical calculations, take $k = 9 \times 10^9$ N· m^2·C^{-2} for the Coulomb constant.

Exercise 1 : Four charges q_1, q_2, q_3 and q_4 are placed in this order on the corners of a square of side a (figure opposite). The charges are such that q_1 is negative, $q_2 = -2q_1$, $q_3 = 3q_1$ and $q_4 = -4q_1$. Let's denote $\vec{F}_{2/1}$, $\vec{F}_{3/1}$ and $\vec{F}_{4/1}$ the forces that charges q_2, q_3 et q_4 exert on q_1. a) Express the modulus of each force as a function of F_0, where $F_0 = kq_1^2/a^2$. b) Choose an arbitrary scale for F_0 ((i.e. an arbitrary length, e.g., 0.5 cm) and draw the three forces at this scale.
Ans. : a) $F_{2/1} = 2F_0$; $F_{3/1} = 3F_0/2$; $F_{4/1} = 4F_0$.



Exercise 2 : The charge of an electron is $q_e = -1.6\times10^{-19}$ C and the charge of a proton is $q_p = +1.6\times10^{-19}$ C. If an initially neutral body acquires 10^9 electrons every second, how much time is required to get a net (total) charge of -1 C on it ? (a) 190.19 years ; (b) 150.12 years ; (c) 198.19 years ; (d) 188.21 years.

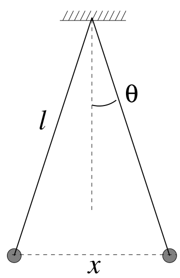
Exercise 3 : What is the acceleration of an electron due to its mutual attraction with the proton when they are 1.6 Å apart ? Take $m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg.

Exercise 4 : Which of the following charges cannot exist in nature ? a) 5.2×10^{-19} C, b) 3.2×10^{-19} C, c) 6.7×10^{-19} C, d) 6.4×10^{-19} C, e) 1.6×10^{-10} C, f) 1.6×10^{-20} C.

Exercise 5 : Two objects A and B are rubbed together. If B acquires an excess of 10^9 electrons, object A must have : a) gained 10^9 electrons, b) gained 10^9 protons, c) lost 10^9 electrons, or d) lost 10^9 protons.

Exercise 6 : A metal sphere with a charge $Q_s = -2\,\mu$C sits near a metal cylinder that has a charge $Q_c = +4\,\mu$C. If the sphere comes into contact with the cylinder and then separated, what is a possible final charge on each object ? a) $Q_sf = -2\,\mu\text{C}, Q_cf = -2\,\mu\text{C}$; b) $Q_sf = -2\,\mu\text{C}, Q_cf = +4\,\mu\text{C}$; c) $Q_sf = +1\,\mu\text{C}, Q_cf = +1\,\mu\text{C}$; d) $Q_sf = +4\,\mu\text{C}, Q_cf = +4\,\mu\text{C}$.

Exercise 7 :
The figure opposite shows two identical balls suspended at the same point by insulating wires of length l. Each ball has mass m and charge Q. Because of their mutual electrical repulsion, they move apart and balance at $x = 5$ cm. Find the expression and the value of Q. Take $l = 1.2$ m and $m = 10$ g.
Hint : The Pythagorean theorem implies $l^2 = x^2/4 + l^2\cos^2\theta \implies 1 = x^2/4l^2 + \cos^2\theta \implies \cos^2\theta = 1 - x^2/4l^2$. *Noting that $x \ll l$, we deduce that $x^2 \lll 4l^2$ and therefore $x^2/4l^2 \lll 1$. In other words, $x^2/4l^2$ is negligible compared to 1, so we can make the approximation* $\cos^2\theta \approx 1$ *or, equivalently,* $\cos\theta \approx 1$. *Ans. :* $Q = (mgx^3/2kl)^{1/2} = 2.4 \times 10^{-8}$ C.



Exercise 8 : The balls from the previous exercise are conductive. a) What will happen if we completely discharge one of the two balls ? b) Find the new equilibrium position ?

Exercice 9 : A point charge q is placed halfway between two positive point charges q_1, q_2 separated by $2d$ and such that $q_1 = q_2 = Q$.
a_1) Assuming q has the same sign as q_1 and q_2, is the charge q in equilibrium ? If yes, a_2) is equilibrium stable or unstable if q is forced to move along the line q_1q_2 ? a_3) is equilibrium stable or unstable if q is constrained to move in the median plane of segment $[q_1q_2]$ مجبر للتحرك في المستوى العمودي المنصف لقطعة?
Ans. : Hint → Charge q is in stable (instable) equilibrium if, when it moves slightly away from its equilibrium position, it tends to return to it (move away from it). .

— *End of the tutorial serie*

Solution de la Série de TD N° 1

Exercice 1 : *Rép. :* a) $F_{2/1} = k|q_1 q_2|/a^2 = k|q_1(-2q_1)|/a^2 = k|-2q_1^2|/a^2 = 2kq_1^2/a^2$. De la même façon $F_{3/1} = 3kq_1^2/2a^2$; $F_{4/1} = 4kq_1^2/a^2$. En fonction de $F_0 = kq_1^2/a^2$, on a $F_{2/1} = 2F_0; F_{3/1} = 3F_0/2$; $F_{4/1} = 4F_0$.

b) En prenant une longueur arbitraire pour F_0, $F_{2/1}$, $F_{3/1}$ et $F_{4/1}$ doivent avoir 2 fois , 1.5 fois et 4 fois cette longueur respectivement (figure ci-dessous).

Exercice 2 : (1) : In one second, the body acquires $10^9 \times -1.6 \times 10{-}19$ C $= -1.6 \times 10^{-10}$ C. The time required to accumulate a charge of -1 C is then $t = -1\ \mathrm{C}/(-1.6 \times 10^{-10}\ \mathrm{C/s}) = 6.25 \times 10^9$ s. which is equivalent to : 6.25×10^9 s/(365 $\times$ 24 $\times$ 3600 s/year = 198,18years. If an initially neutral body acquires 10^9 electrons every second, then a time of 198,19 years is required to get a total charge of -1 C on it. Hence response c). We understant here that 1 C is a huge unit !

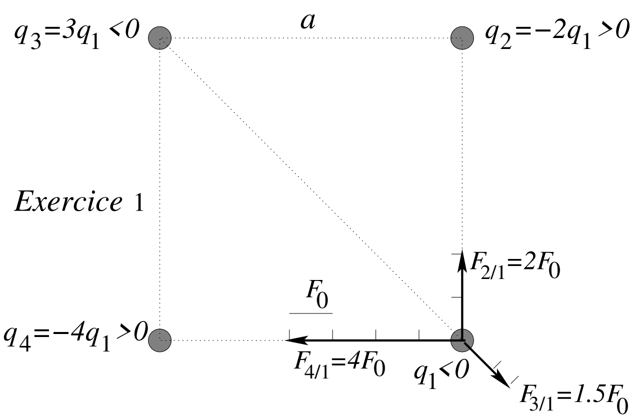
Exercice 3 : L'électron est attiré par le proton avec la force $F = k|q_e q_p|/d^2 = 9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2/(1.6 \times 10^{-10})^2 = 9 \times 10{-}9$ N $\rightarrow a = F/m_e = 9 \times 10^{-9}/(9 \times 10^{-31}) = 10^{22}$ m/s^2.

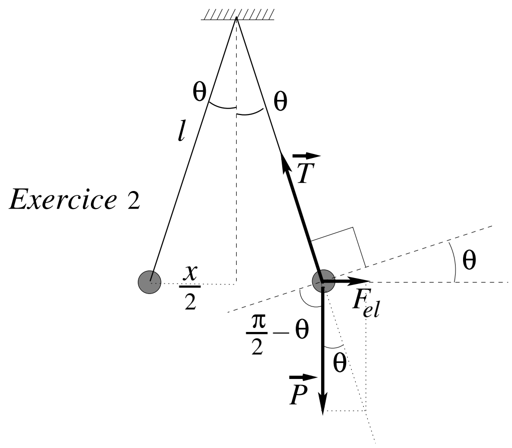
Exercice 4 : Toute charge électrique dans la nature est un multiple de la charge élémentaire $1.6 \times 10{-}19$ C. Donc contrairement à b), d) et e), les charges a), c) et f) ne peuvent pas exister dans la nature.

Exercice 5 : Object B acquires an excess of 10^9 electrons from A, therefore object A must have lost 10^9 electrons. The correct choice is c).

Exercice 6 : The correct choice is c) : $Q_s f = +1\,\mu\mathrm{C}, Q_c f = +1\,\mu\mathrm{C}$. Why ? Since objects are conductive (metallic), during contact the total electric charge ($-2\,\mu\mathrm{C} + 4\,\mu\mathrm{C} = 2\,\mu\mathrm{C}$ will be distributed throughout both conductors. So the possibility is c). This will be exactly the result if the objects are identical.

Exercice 7 : Chacune des deux billes est soumise à 3 forces (celles-ci se trouvent toutes dans le plan vertical formé par les deux fils) : son poids $\vec{P}$, la force de Coulomb $\vec{F}_{el}$ et la tension du fil $\vec{T}$ (voir figure). À l'équilibre [1], $\vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{T} = \vec{0}$.





Ne connaissant pas $\vec{T}$ (on peut le calculer en fonction de $\vec{P}$ et $\vec{F}_{el}$ mais c'est inutile ici), on va l'éliminer en projetant cette équation vectorielle sur la direction qui lui est perpendiculaire : $P\cos(\pi/2 - \theta) - F_{el}\cos\theta = 0$, soit

$$mg\sin\theta - kQ^2/x^2\cos\theta = 0$$

On a $\sin\theta = (x/2)/l = x/2l$ et selon l'indication de l'énoncé, $\cos\theta \approx 1 \implies mgx/2l - kQ^2/x^2 = 0$, ce qui donne finalement :

1. On aurait pu démarrer la solution en écrivant qu'à l'équilibre (voir figure) $\tan\theta = F_{el}/P \rightarrow F_{el} = P\tan\theta$ et la suite en découlera immédiatement.

$Q = (mgx^3/2kl)^{1/2}$ A.N. : $Q = 2.4 \times 10^{-8}$ C.

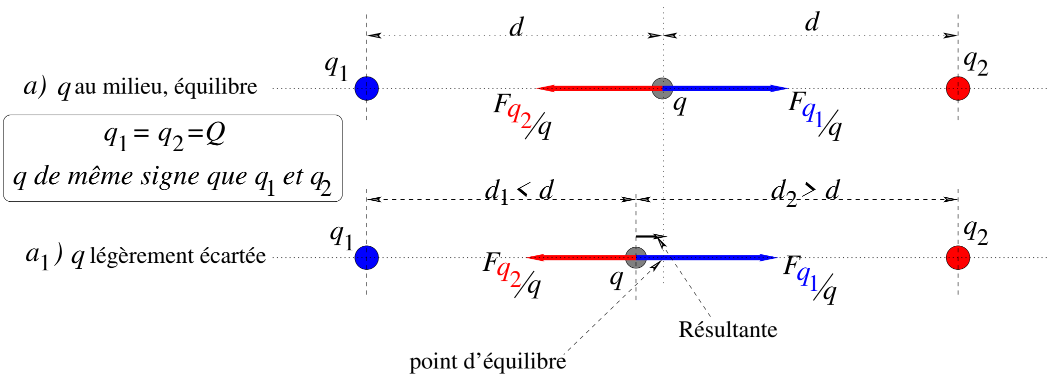
Exercice 8 : *a*) Si une des 2 billes est complètement déchargée, il n'y aura plus de répulsion et les 2 billes viendront en contact. Étant conductrices, la charge de la bille non déchargée va, pendant le court instant que dure le contact, se répartir sur l'ensemble des 2 billes. Les 2 billes étant identiques, chacune prendra la charge $Q/2$. Chargées de même signe, les 2 billes vont se repousser à nouveau et s'équilibreront à une distance x' telle que (voir exercice 7).

$$\frac{Q}{2} = \sqrt{(mgx'^3/2kl)}.$$

b) De l'équation précédente on tire : $x' = \sqrt[3]{(klQ^2/2mg)}$. A.N. : $x' = 3.2$ cm. On reviendra plus en détail sur les conducteurs en équilibre électrostatique dans un prochain chapitre.

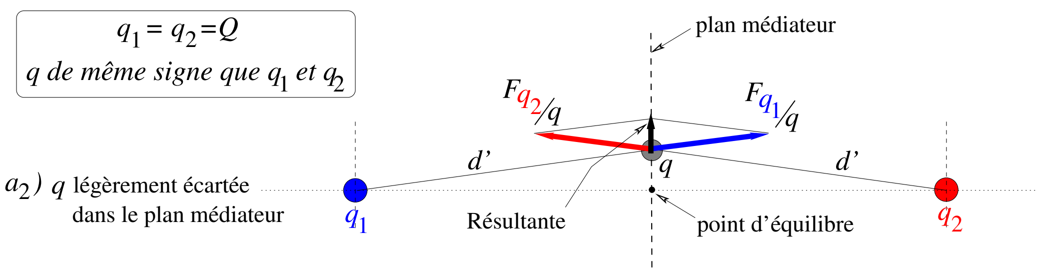
Exercice 9 : *a*) La charge q est de même signe que q_1 et q_2 :
Quand q se trouve à mi-chemin (même distance d de q_1 et q_2, voir figure (a) ci-dessous), oui elle est en équilibre car la résultante des forces agissant sur elle est nulle.

a_1) L'équilibre est-il stable ou instable si q est <u>astreinte à se déplacer suivant la ligne q_1q_2 ?</u> Si on écarte q légèrement du point d'équilibre suivant la ligne (q_1q_2), elle se trouve plus rapprochée (distance d_1) de l'une des deux charges et plus éloignée (distance d_2) de l'autre.



Étant inversement proportionnelle au carré de la distance (loi de Coulomb), la charge qui se trouve à d_1 va exercer une force plus grande (en bleu) que celle (en rouge) exercée par la charge située à la distance d_2 (figure a_1) ci-dessus). En conséquence, on aura une résultante non nulle toujours dirigée et orientée vers le milieu du segment , i.e. le point d'équilibre. La charge q aura tendance à revenir à la position d'équilibre, c'est donc un *équilibre stable.*

a_2) *L'équilibre est instable* car les 2 forces donnent une résultante qui fuit le point d'équilibre quand elle en est écartée légèrement.



b) En supposant q de signe contraire à celui de q_1 et q_2, les forces agissant sur la charge q changent de sens tout en gardant les mêmes supports et les mêmes grandeurs que dans la situation de la question *a*). En

conséquence, il y a équilibre quand q se trouve à mi-chemin entre q_1 et q_2 car la résultante s'annule.
b_1) Quand q est astreinte à se déplacer suivant la ligne q_1q_2, cet *équilibre est instable* car la résultante fuit le point d'équilibre quand elle en est écartée légèrement.
b_2) Quand q est astreinte à se déplacer dans le plan médiateur de q_1q_2, *l'équilibre est stable* car la résultante est orientée vers le point d'équilibre quand elle en est écartée légèrement.