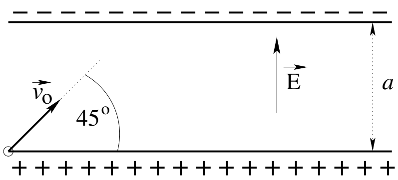
Tutorial series # 2 : Field and Potential I ———————— February 2024

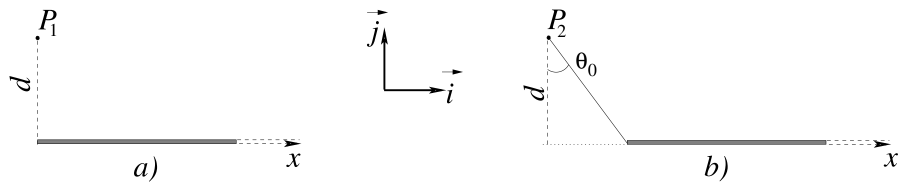
Exercise 1 : An electron is projected at an angle of 45° and an initial velocity v_0 from the left edge of the bottom plate of a parallel-plate arrangement as shown if the figure at the right. The plates are separated by $a = 2$ cm and are very long. Between them there is a uniform electric field $E = 10^3$ N/C. What is the maximum value $v_{0\max}$ that v_0 must not exceed to prevent the electron from hitting the top plate ? The mass and charge of the electron are $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, and $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C respectively. *Rép.* : 3.75×10^6m/s.



Exercise 2 : Two point charges equal to q are located at the points $(0; +a)$ and $(0; -a)$ of a rectangular axis system Oxy. a) Find the field $E(x)$ at the point $(x; 0)$. b) Show that for distant points, i.e. for $x \gg a$, $E(x)$ reduces to a simple form, an interpretation of which will be given. c) Graphically represent the shape of $E(x)$.
Rép. : a) $2kqx/(x^2 + a^2)^{3/2}$; b) $E(x) = k\,2q/x^2$.

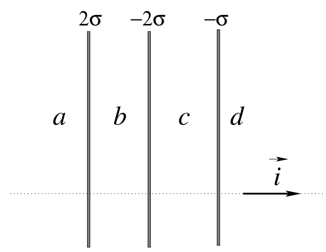
Exercise 3 : A ring (حلقة) of radius R and center O carries a positive charge Q uniformly distributed around its circumference. a) Determine the electric field $\vec{E}$ that the ring creates at a point M located at position x on its axis $x'Ox$. b) Calculate the potential at M. Take $V = 0$ for $|x| \to \infty$. c) Find the expression for $\vec{E}$ from the relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. d) Show that for points $x \gg R$, the ring behaves as if all its charge were concentrated at its center. *Rép.* : a) $\vec{E} = (kQx/(x^2 + R^2)^{3/2}\vec{i}$; b) $V = \frac{kQ}{(x^2+R^2)^{1/2}}$; d) For $x \gg R$, we have $x^2 + R^2 \approx x^2$ $\Longrightarrow$ $\vec{E} = (kQ/x^2)\vec{i}$ et $V = kQ/x$, the ring behaves as if all its charge were a point charge concentrated at its center.

Exercise 4 : A rectilinear, non-conducting wire of semi-infinite length is charged with a constant line density $\lambda > 0$. 1) Find, in the orthonormal basis $(\vec{i}, \vec{j})$, the field $\vec{E}_1$ at point P_1 (figure (a) below). What angle does this field make with the wire, i.e. the x-axis ? Does this angle depend on the distance d ?



2) Find the field $\vec{E}_2$ at the point P_2 defined by angle θ_0 and distance d (figure (b) above). Check that for $\theta_0 = 0$, we recover the result of question 1.
Rép. : 1-) $\vec{E}_1 = (k\lambda/d)(-\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{E}_1$ est diricted at 45° above tne negative direction x axis ; 2-) $\vec{E}_2 = (k\lambda/d)(-\vec{i})$; 3-) $\vec{E}(M) = (k\lambda/d)(-\cos\theta_0\vec{i} + (1 - \sin\theta_0)\vec{j})$

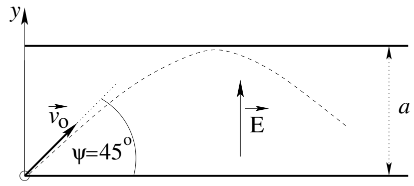
Exercise 5 : a) Using Gauss's theorem, show that the field created by an infinite plane, carrying a uniform surface charge density σ, at a point located outside the plane at whatever distance is $\vec{E} = (\sigma/2\epsilon_0)\,\vec{n}$, where $\vec{n}$ is a unit vector normal to the plane, oriented outwards. b) The figure opposite shows three infinite parallel planes uniform densities 2σ, -2σ et $-\sigma$. Use the result of question a) to find, in terms of σ, ϵ_0 and the unit vector $\vec{i}$, the electric field in the regions a, b, c, and d. *Rép.* : a) $\vec{E} = (\sigma/2\epsilon_0)\,\vec{i}$; b) $\vec{E} = (5\sigma/2\epsilon_0)\,\vec{i}$; c) $\vec{E} = (\sigma/2\epsilon_0)\,\vec{i}$; d) $\vec{E} = (-\sigma/2\epsilon_0)\,\vec{i}$



End of the Tutorial serie

Solution de la Série de TD N° 2

Exercice 1 : Une fois lancé, l'électron se trouve soumis à la force électrique $-e\vec{E}$ et son poids $m_e\vec{g}$. On néglige le poids car sa valeur est insignifiante devant la force électrostatique. Si $\vec{a}$ désigne l'accélération de l'électron, on a donc $-e\vec{E} = m_e\vec{a}$. L'électron acquiert donc l'accélération constante $\vec{a} = -e\vec{E}/m_e$. En travaillant par rapport à un axe vertical y ayant son origine au point de lancement, on a :

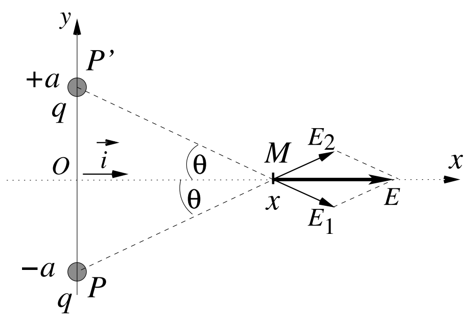


$$y = \frac{1}{2}\frac{-eE}{m_e}t^2 + v_0 \sin\psi\, t \text{ et } v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{-eE}{m_e}t + v_0 \sin\psi$$

Pour éviter que l'électron ne frappe la plaque supérieure, il faut qu'il redescende, i.e. v_y s'annule, avant de la toucher. La vitesse v_y s'annule à $t = t_1 = m_e v_0 \sin\psi/eE$ et on doit avoir $y(t_1) < a$. On a donc $(m_e v_0^2 \sin^2\psi)/(2eE) < a$ d'où l'on tire $v_0 < \sqrt{2eE\,a/(m_e \sin^2\psi)}$. Autrement, v_0 ne doit pas dépasser la valeur maximale

$$\boxed{v_{0\max} = \sqrt{2eE\,a/(m_e \sin^2\psi)} = 3.75 \times 10^6 \text{m/s}} \tag{1}$$

Exercice 2 : a) Le champ total en M s'écrit : $\vec{E} = kq\overrightarrow{PM}/PM^3 + kq\overrightarrow{P'M}/P'M^3$. Sachant que $PM = P'M = (x^2 + a^2)^{1/2}$ et que $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M}) = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OM} = 2x\vec{i}$, il vient :

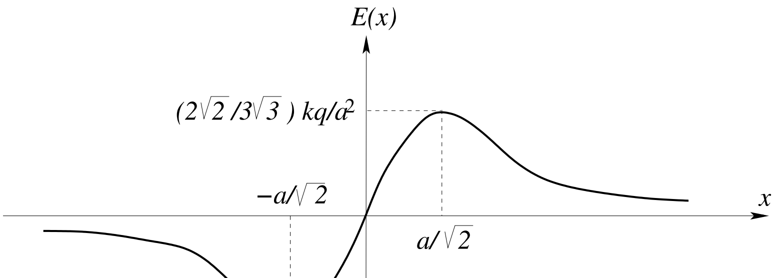


$$\boxed{\vec{E} = E(x)\,\vec{i} \text{ avec } E(x) = \frac{2kqx}{(x^2+a^2)^{3/2}}}, \tag{2}$$

expression valable aussi bien pour $x > 0$ que pour $x < 0$.

b) Pour $x \gg a$, on peut négliger a devant x et $E(x) \approx 2kq/x^2$. Pour des points très éloignés, les deux charges q apparaissent comme une charge ponctuelle $q + q = 2q = Q$ concentrée en leur milieu O. Pour $x \gg R$, on a $x^2 + R^2 \approx x^2 \implies \vec{E} = (kQ/x^2)\vec{i}$ et $V = kQ/x$, l'anneau se comporte comme une charge ponctuelle Q concentrée au centre O de l'anneau.

c) L'étude (tableau de variation) de la dérivée $dE/dx = 2kq(a^2 - 2x^2)/(x^2 + a^2)^{5/2}$ montre que $E(x)$ a un minimum en $x = -a/\sqrt{2}$ et un maximum en $x = +a/\sqrt{2}$. À l'extérieur de ces deux valeurs, $E(x)$ décroit

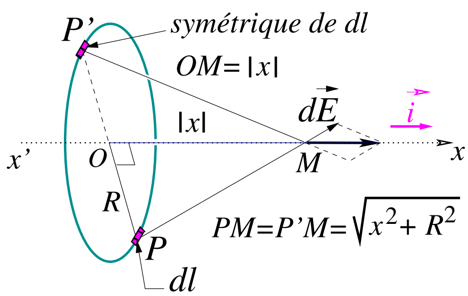


tandis qu'à l'intérieur il croît en passant par 0. De plus, quand $x \to \pm\infty$, $E(x) \to 0$. L'allure de $E(x)$ est représentée ci-dessous.

Exercice 3 : a) Notons d'abord que la densité de charge sur l'anneau est constante et vaut $\lambda = Q/(2\pi R)$.

Soit M un point situé sur l'axe x de l'anneau. Un élément dl pris autour d'un point P quelconque sur l'anneau se trouve toujours à la même distance $PM = \sqrt{x^2 + R^2}$ de M. Cet élément porte la charge λdl et crée en M un champ élémentaire $d\vec{E} = k\lambda dl\,\overrightarrow{PM}/PM^3$. L'élément symétrique de même longueur (autour de P', voir figure) porte la même charge et, se trouvant à la même distance ($P'M = PM$), crée en M le champ $d\vec{E}' = k\lambda dl\,\overrightarrow{PM'}/PM^3$. La somme de ces deux champs élémentaires donnent une résultante portée par $\overrightarrow{OM}$. En effet,

$$\begin{aligned} d\vec{E} + d\vec{E}' &= k\lambda dl\,\overrightarrow{PM}/PM^3 + k\lambda dl\,\overrightarrow{P'M}/PM^3 \\ &= (k\lambda dl\,/PM^3)(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M}) \\ &= (k\lambda dl\,/PM^3)\,2\overrightarrow{OM} \end{aligned} \tag{3}$$



car $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M}) = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{OM}$, car $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{P'O} = \vec{0}$. Le raisonnement qu'on vient de faire est valable quelle que soit la position de dl sur l'anneau, on déduit que le champ créé en M par l'anneau entier est porté par $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire par l'axe de l'anneau. En désignant par $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$, i.e. $\overrightarrow{OM} = OM\,\vec{u} = |x|\,\vec{u}$, la contribution des deux éléments symétriques donne (voir équation (3)) :

$$k\lambda dl\, OM\vec{u}/PM^3 = \frac{k\lambda\,|x|}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\,\vec{u}\,2dl \tag{4}$$

Le champ total s'obtient en intégrant sur l'anneau :

$$\vec{E} = \int_{\text{anneau}} \frac{k\lambda\,|x|}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\,\vec{u}\,2dl = \frac{k\lambda\,|x|}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\,\vec{u}\int_{\text{anneau}} 2dl \tag{5}$$

Le 2 laissé avec dl dans l'intégrale est là pour rappeler qu'on additionne (on intègre) les contributions couple par couple d'éléments symétriques (dl, dl') : $\int_{\text{anneau}} 2dl = 2\pi R$. Compte tenu de $Q = \lambda 2\pi R$, l'équation (5) s'écrit finalement

$$\vec{E} = (kQ|x|/(x^2 + R^2)^{3/2}\vec{u} \tag{6}$$

Remarquons que pour $x > 0$ on a $|x| = x$ et $\vec{u} = \vec{i}$ et pour $x < 0$ on a $|x| = -x$ et $\vec{u} = -\vec{i}$. En fonction du vecteur unitaire $\vec{i}$ de l'axe $x'Ox$, le produit $|x|\vec{u}$ donne $x\,\vec{i}$ dans les deux cas et l'équation (6) s'écrit :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\,\vec{i},\ \text{valable quel que soit le signe de } x.} \tag{7}$$

b) L'élément dl crée en M le potentiel élémentaire $dV = k\lambda dl/PM = k\lambda dl/(x^2 + R^2)^{1/2}$, le potentiel total s'obtient en intégrant sur l'anneau entier :

$$V = \int_{\text{anneau}} \frac{k\lambda\,dl}{(x^2 + R^2)^{1/2}} + \text{Cte} = \frac{k\lambda\,2\pi R}{(x^2 + R^2)^{1/2}} + \text{Cte} = \frac{kQ}{(x^2 + R^2)^{1/2}} + \text{Cte} \tag{8}$$

Sachant que $V(|x| \to \infty) = 0$, alors $0 + \text{Cte} = 0$ donc $\text{Cte} = 0$ et le potentiel s'écrit finalement :

$$\boxed{V = \frac{kQ}{(x^2 + R^2)^{1/2}}} \tag{9}$$

c) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$. $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ car V ne dépend pas de y et de z. Donc $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i}$ (j'écris dV/dx avec des d droits au lieu des d ronds '∂' car x est la seule variable). Il vient :

$$\vec{E} = -\frac{d}{dx}\left(kQ(x^2+R^2)^{-1/2}\right)\vec{i} = -kQ(-1/2)2x(x^2+R^2)^{-3/2}\,\vec{i} = \frac{kQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,\vec{i}, \tag{10}$$

on retrouve bien le résultat de la première question.
d) Pour $x \gg R$, on a $x^2 + R^2 \approx x^2 \implies \vec{E} = (kQ/x^2)\vec{i}$ et $V = kQ/x$, l'anneau se comporte comme une charge ponctuelle Q concentrée au centre O de l'anneau.

Exercice 4 : 1-) Trouvons le champ au point P_1 : Un élément dx du fil porte la charge λdx et crée en P_1 le champ

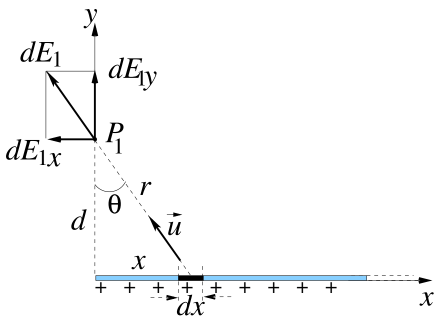
$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}\vec{u},$$

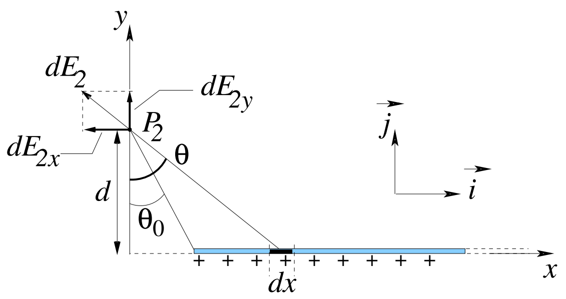
où $r = (x^2 + d^2)^{1/2}$ et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé de dx vers le point P_1. Par projection sur les axes x et y de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on a :

$$\vec{u} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

et alors

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}).$$





Par ailleurs, de $x = d\tan\theta$ on tire $dx = d/\cos^2\theta\,d\theta$ et alors

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda d}{cos^2\theta r^2}\,d\theta(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}).$$

Nous avons aussi $d = r\cos\theta$, ce qui implique $r^2\cos^2\theta = d^2$ et

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d}\,(-\sin\theta d\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,d\theta\,\vec{j}).$$

Le champ créé en P_1 par tout le fil s'obtient en additionnant les contributions de tous les dx, c'est-à-dire en intégrant de $\theta = 0$ à $\theta = \pi/2$.

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d}\left(\int_0^{\pi/2} -\sin\theta d\theta\,\vec{i} + \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\,\vec{j}\right).$$

Finalement, après avoir effectué les intégrations on obtient

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d}(-\vec{i}+\vec{j}).$$

On voit que le champ $\vec{E}_1$ est orienté suivant le vecteur $(-\vec{i}+\vec{j})$, i.e. il est dirigé à 45° du fil indépendamment de la distance d.

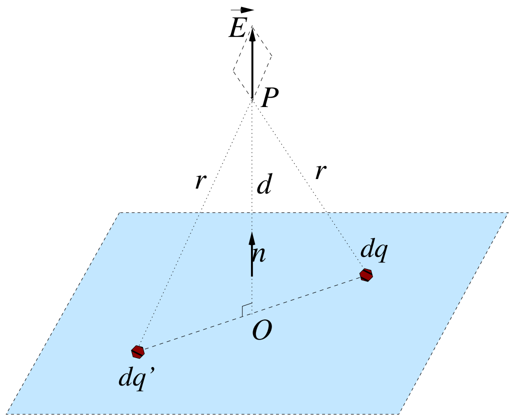
Ici pour décrire tout le fil, l'angle θ varie de θ_0 à $\pi/2$. Le même raisonnement qu'en 1) mène donc à :

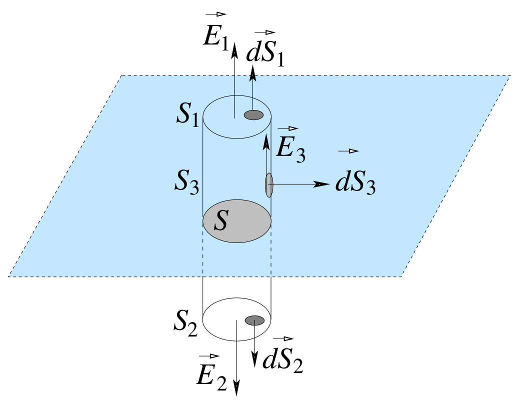
$$\vec{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d}\left(\int_{\theta_0}^{\pi/2} -\sin\theta d\theta\,\vec{i} + \int_{\theta_0}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\,\vec{j}\right) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{d}\left(-\cos\theta_0\,\vec{i} + (1-\sin\theta_0)\,\vec{j}\right) \tag{12}$$

Évidemment, pour $\theta_0 = 0$ on retrouve le résultat de 1-).
En dernière remarque, notons que si le fil est chargé négativement ($\lambda < 0$) alors aussi bien $\vec{E}_1$ que $\vec{E}_2$ changeront de sens : $\vec{E}_1$ sera dans le sens de $(\vec{i}-\vec{j})$ et E_2 dans le sens de $\cos\theta_0\,\vec{i} - (1-\sin\theta_0)\,\vec{j}$.

Exercice 5 : Soit P un point quelconque situé à la distance d du plan et O sa projection orthogonale sur le plan. Le plan étant chargé uniformément, un élément de surface dS et son symétrique dS' ($dS = dS'$) portent des charges égales ($dq = dq'$) et créent en P un champ porté par $\overrightarrow{OP}$. Le raisonnement précédent





vaut pour n'importe est. Du fait du caractère infini du plan, l'élément dq a toujours un symétrique quelle que soit sa position sur le plan. On peut voir le plan peut comme une infinité de couples d'éléments symétriques qui produiront chacun un champ porté par $\overrightarrow{OP}$. On déduit donc que le champ total sera lui aussi porté $\overrightarrow{OP}$:

$$\vec{E} = E\,\vec{n}, \tag{13}$$

où $\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OP}$. Autrement dit, le plan produit un champ qui lui est perpendiculaire. On va maintenant calculer E à l'aide du théorème de Gauss. Pour cela il nous faut une surface de Gauss S_G. Comment choisir S_C ? Rappelons que le but ici est de calculer le champ $\vec{E}$ créé par le plan en P. Si P bouge parallélement au plan (sa distance au plan ne varie pas), il verra exactement le même plan donc la même charge à cause du caractère infini du plan. Le champ est donc le même pour tous les points situés sur une une surface parallèle au plan. Ceci est vrai que l'on soit d'un côté où de l'autre du plan. La surface de Gauss sera donc un cylindre droit formé de deux surfaces circulaires S_1 et S_2 disposées à la même distance des

deux côtés du plan et d'une surface latérale S_3 : $S_G = S_1 + S_2 + S_3$ (voir figure). Ce cylindre découpe une surface S sur le plan, on a évidemmant $S_1 = S_2 = S$.
Le flux à travers la surface fermée S_G s'écrit :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}_1.d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2.d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3.d\vec{S}_3$$

L'intégrale par rapport à S_3 donne 0 car le champ est $\perp$ à $d\vec{S}_3$ en tous les points de S_3. Le champ $\vec{E}_1$ est parallèle à $d\vec{S}_1$ et garde un module constant E en tous les points de S_1, donc l'intégrale sur S_1 vaut $ES_1 = ES$. Pour les mêmes raisons, l'intégrale sur S_2 vaut $ES_2 = ES$. Le flux total vaut donc $2ES$. Le théorème de Gauss nous dit que ce flux est égal à la charge nette contenue dans la surface S_G divisée par ϵ_0. Ici, cette charge est égale à σS. Donc $2ES = \sigma S/\epsilon_0$, d'où l'on tire $E = \sigma/2\epsilon_0$, résultat qu'on écrit sous la forme complète

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\vec{n} \tag{14}$$

Finalement, $\vec{E}$ est indépendant de la distance d. Autrement dit, un plan infini chargé avec une densité constante crée dans tout l'espace un champ uniforme (constant).

b) Pour trouver le champ dans les différentes régions, on utilise pour chaque plan le résultat précédent ensuite on applique le principe de superposition : $\vec{E} = \vec{E}_{2\sigma} + \vec{E}_{-2\sigma} + \vec{E}_{-\sigma}$.
Rappelons que le vecteur unitaire $\vec{n}$ de l'équation (14) fuit perpendiculairement le plan qui crée $\vec{E}$. Par exemple, pour le plan '2σ', le vecteur $\vec{n}$ est égal à $-\vec{i}$ dans la région a et à $+\vec{i}$ dans les autres régions.

Région a : $\vec{E}_a = \frac{2\sigma}{2\epsilon_0}\,(-\vec{i}) + \frac{-2\sigma}{2\epsilon_0}\,(-\vec{i}) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\,(-\vec{i}) = (2-2-1)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,(-\vec{i}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\vec{i}.$

Région b : $\vec{E}_b = \frac{2\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) + \frac{-2\sigma}{2\epsilon_0}\,(-\vec{i}) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\,(-\vec{i}) = (+2+2+1)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) = \frac{5\sigma}{2\epsilon_0}\,\vec{i}.$

Région c : $\vec{E}_c = \frac{2\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) + \frac{-2\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\,(-\vec{i}) = (+2-2+1)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\vec{i}.$

Région d : $\vec{E}_d = \frac{-2\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) = (2-2-1)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,(+\vec{i}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\vec{i}.$

Fin de la Série de TD N° 2