Tutorial series # 3 : Field and Potential II ———————— March 2024

Exercise 1 : What is the potential created by a point charge of 5 nC at a distance of 3 cm ? 5 cm ? 10 cm ? 1 m ? 10 m ? 1 km ? Plot these results on a graph. *Ans.* : 1500 V, 900 V, 450 V, 45 V, 4.5 V. The graph will show that the absolute potential of a point charge decreases rapidly with distance.

Exercise 2 : A typical lightning bolt can carry up to 30 C of charge across a potential difference of 100 million volts between the points of discharge. a) How much energy does this release ? b) If we could use this energy to light a 60 Wlamp, how long would it last ? Express the result in months.
Ans. : a) 3×10^9 J ; b) 5×10^7s, i.e., about 19 months.

Exercise 3 : Two parallel infinite metal plates carry equal and opposite charges and are 5 cm apart. A charge of 8 µC placed between the plates is subjected to a force of $2.4 \times 10^{-2}\vec{i}$ N, where $\vec{i}$ is the unit vector directed perpendicularly from the positive plate to the negative plate. Find the potential difference $V_+ - V_-$ between the plates.

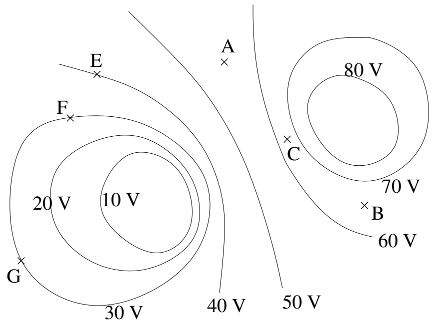
Ans. : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(\vec{F}/q) \cdot d\vec{r} = -(F/q)dr$, after integration we arrive at : $V_+ - V_- = 150$ V.

Exercise 4 : A point charge q is at position $(0; 3)$ relative to an orthornomal coordinate system $(O, \vec{i}, \vec{j})$. a) Determine the potential V at any point $(x, y) \neq (0, 3)$. b) Calculate the electric field $\vec{E}$ at the point $(4, 0)$. c) Find the result of b) from the potential V.

Exercise 5 : **This exercise will be solved in class.**
A disk of negligible thickness (قرص ذو سمك ضئيل) has radius a and carries a uniform charge density σ C/m^2. a) Show that the potential created by the disk at a point M located at position y on its axis (y can be positive or negative) is : $V = (\sigma/2\epsilon_0)\left((a^2 + y^2)^{1/2} - |y|\right)$. Take $V = 0$ when $y \to \pm\infty$. b) Deduce the electric field $\vec{E}$. c) Study the behavior of the disk with respect to a very distant point, i.e. for $y \gg a$. d) What is $\vec{E}$ for $R \to \infty$? Same question for $y \to 0$? Interpréter. *Gives :* $\int r dr/(r^2 + y^2)^{1/2} = (r^2 + y^2)^{1/2}$

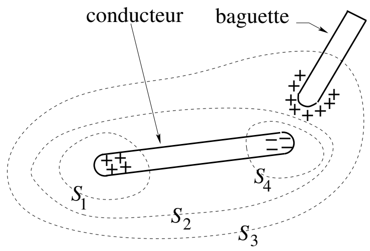
Exercise 6 : The figure opposite shows a set of equipotential lines obtained by intersecting equipotential surfaces with a plane.

1) Sketch with dotted lines and orientate the field line passing through A and the one passing through B.
2) Show the electric field $\vec{E}_C$ at point C (direction and sense). 3) Mark with a point D the region where the field is strongest. 4) If an electron moves from E to F, what will be the change in its kinetic energy ? 5) Same question when the electron moves from F to G.
Ans. : 1) Field line $\perp$ to equipotential line ; 2) Field vector tangent to field line and points from strongestto weakest potentials ; 3) Field is stronger is the region where equipotential lines are tighter ; 4) $\Delta E_{cin} = -\Delta E_{pot}$.



Exercise 7 : Four charges $+q$, $+2q$, $-2q$, $-q$ are placed in this order on the corners of a square of side a. Express in terms of q and a : 1) the total internal potential energy of the system formed by the four charges. 2) the potential energy of a fifth charge q placed at the center of the square.
Ans. : 1) $-kq^2(1 + 2\sqrt{2})/a$; 2) 0.

Exercise 8 : A charge is induced on an insulated, initially neutral conductor by approaching a rod carrying a positive charge $+q$ at its end. The negative charge induced by influence on the conductor is conductor is $-q/2$. 1) What is the positive charge induced on the conductor ? 2) What is the electric field flux through the closed surfaces S_1, S_2, S_3 and S_4 ?
Ans. : 1) $+q/2$; 2) $q/2\epsilon_0$, 0, q/ϵ_0 et $-q/2\epsilon_0$.



Exercise 9 : The space between two concentric spheres, of center O and radii R_1 and R_2, with $R_2 > R_1$, is filled with a charged non-conductive material with constant density $\rho > 0$.
1) Using Gauss's theorem, calculate the electrostatic field at distance r from the center for the regions : a) $r < R_1$, b) $R_1 < r < R_2$ and c) $r > R_2$.
2) Deduce the potential $V(r)$. Take $V(r) = 0$ for $r \to \infty$ and assume that the potential is continuous at points $r = R_1$ and $r = R_2$, i.e. at the points joining the different regions.

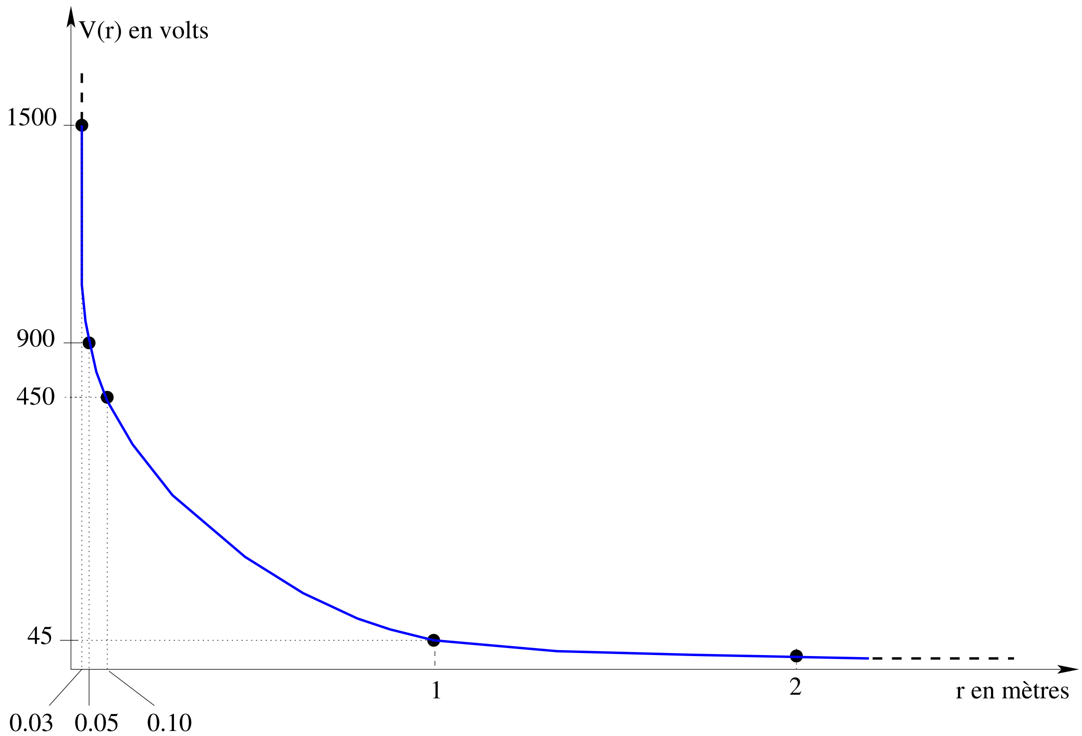
Ans. : 1) The symmetry of the problem leads to a radial field $\vec{E} = E\,\vec{e}_r$; a) $r < R_1 : E = 0$; b) $R_1 < r < R_2 :$ $E = \rho/3\epsilon_0(r^3 - R_1^3)/r$; c) $r > R_2 : E = (\rho/3\epsilon_0)(R_2^3 - R_1^3)/r^2$.

2) The potential $V(r)$ can be deduced from $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ which can also be written as $dV = -E\,dr$: a) $V = (\rho/2\epsilon_0)(R_2^2 - R_1^2)$; b) $V = (\rho/3\epsilon_0)(3R_2^2/2 - r^2/2 - R_1^3/r)$; c) $V = (\rho/3\epsilon_0)(R_2^3 - R_1^3)/r$.

— *End of the Tutorial serie*

Solution de la Série de TD n°3

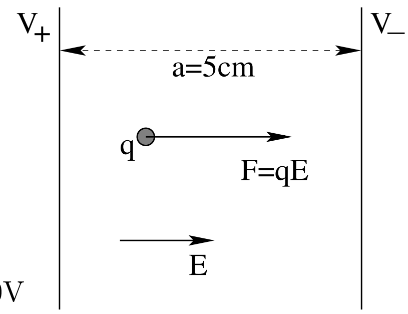
Exercise 1 : $V = kq/r = 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-9}/r = 45/r$, ce qui donne :
$r = 3\,\mathrm{cm} = 0.03\,\mathrm{m}$ → V = 1500 V
$r = 5\,\mathrm{cm} = 0.05\,\mathrm{m}$ → V = 900 V
$r = 10\,\mathrm{cm} = 0.1\,\mathrm{m}$ → V = 450 V
$r = 1\,\mathrm{m}$ → V = 45 V
$r = 10\,\mathrm{m}$ → V = 4.5 V
$r = 1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$ → V = 0.045 V
Le potentiel est représenté graphiquement ci-dessous. Le graphique montre qu'en valeur absolue le potentiel d'une charge ponctuelle décroît rapidement avec la distance.



Exercise 2 : a) Énergie libérée $E = q\Delta V = 30\mathrm{C} \times 100000000\,\mathrm{V} = 3 \times 10^9\,\mathrm{J}$; b) $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$, une lampe de 60 W consomme donc 60 Joules par seconde → $3 \times 10^9\,\mathrm{J}/60\mathrm{J/s} = 5 \times 10^7\,\mathrm{s} \approx 19$ mois.

Exercise 3 :
$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(\vec{F}/q) \cdot d\vec{r} = -(F/q)dr$

$$\int_{V_+}^{V_-} dV = \int_0^a -(F/q)dr$$
$$V_- - V_+ = -(F/q)a$$
$$V_+ - V_- = (F/q)a = \frac{Fa}{q} =$$
$$V_+ - V_- = \frac{2.4 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-2}}{8 \times 10^{-6}} = 150\mathrm{V}$$



Exercise 4 : a) $V = kq/r = kq/\left(x^2 + (y-3)^2\right)^{1/2}$; b) $\vec{E} = kq/r^2\,\vec{u} = \dfrac{kq}{25}\left(\dfrac{4}{5}\vec{i} - \dfrac{3}{5}\vec{j}\right) = kq\left(\dfrac{4}{125}\vec{i} - \dfrac{3}{125}\vec{j}\right)$
c) $\vec{E} = -gr\vec{a}dV|_{x=4,y=0} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\Big]_{x=4,y=0}$.
Après avoir effectué les dérivations partielles, on porte les valeurs $x = 4, y = 0$ et on retrouve le résultat b).
Exercise 5 : Cet exercice est traité en cours comme exemple d'application.
Exercise 6 : *Rép.* : 1) On a vu en cours que les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces (ici lignes) équipotentielles. La ligne de champ passant par A traverse donc perpendiculairement les lignes équipotentielles. Elle est orientée des hauts potentiels vers les bas potentiels. Idem pour la ligne passant par B. (illustration figure ci-contre). 2) $\vec{E}_C$ est tangent à la ligne de champ passant par C, ce qui donne ici un vecteur sensiblement perpendiculaire à la ligne équipotentielle de 60V, orienté vers les bas potentiels. 3) Le champ est le plus intense dans la région où les les lignes équipotentielles sont les plus serrées (région marquée ici D. 4) On applique le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_{cin} = -\Delta E_{pot} = -q_e\Delta V$.
$\Delta E_{cin}(E\,\text{à}\,F) = -q_e(V_F - V_E) - 1.6\times10^{-19}(30-40) = 1.6\times10^{-18}$J.
5) $\Delta E_{cin}(F\,\text{à}\,G) = -q_e(V_G - V_F) = -q_e(30-30) = 0$

Exercise 7 : L'énergie électrostatique interne du système est $E_i = \sum_{i,j} kq_iq_j/r_{ij}$ avec $i \neq j$. Avec $q_1 = +q$, $q_2 = +2q$, $q_3 = -2q$ et $q_4 = -q$, cette somme mène à $E_p = -kq^2(1+2\sqrt{2})/a$. L'énergie potentielle d'une cinquième charge q placée au centre est donnée par $E_p = qV$, où V est le potentiel crée au centre par les autres charges. Le calcul donne $V = 0$ donc $E_p = 0$.

Exercise 8 : 1) Le conducteur étant isolé et initialement neutre, il restera globalement neutre. Si une charge de $-q/2$ est induite par influence sur une extrémité du conducteur, une charge de $+q/2$ apparaîtra sur l'autre extrémité du conducteur. 2) On applique le théorème de Gauss qui dit que le flux Φ du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge contenue à l'intérieur de cette surface divisée par ϵ_0. Alors $\Phi_{S_1} = q/2\epsilon_0$; $\Phi_{S_2} = \frac{+q/2-q/2}{\epsilon_0} = 0$; $\Phi_{S_3} = q/\epsilon_0$; $\Phi_{S_4} = -q/2\epsilon_0$.

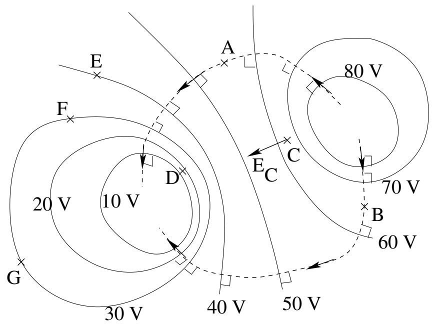
Exercise 9 : Étant donné que le problème possède la symétrie sphérique, on choisit une surface de Gauss S_G sphérique de même centre O et de rayon r , r pouvant prendre des valeurs dans les 3 régions : $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ ou $r > R_2$. Calculons le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers S_G :

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

La symétrie sphérique conduit à un champ $\vec{E}$ radial de module constant sur tous les points de S_G. De plus, le champ $\vec{E}$ en un point de S_G est colinéaire à $d\vec{S}$, vecteur-élément de surface pris autour de ce point. Il vient :

$$\Phi = \oiint_{S_G} E\,dS = E\oiint_{S_G} dS = ES_G = E\times4\pi r^2$$

Le théorème de Gauss nous dit que le flux Φ à travers la surface fermée S_G est égal la charge nette q_i à l'intérieur de S_G divisée par ϵ_0.
a) $r < R_1$: $q_i = 0 \implies E_a = 0$.
b) $R_1 < r < R_2$: $q_i = \rho\times4\pi(r^3 - R_1^3)/3 \implies E_b = (\rho/3\epsilon_0)(r^3 - R_1^3)/r^2$
c) $r > R_2$: $q_i = \rho\times4\pi(R_2^3 - R_1^3)/3 \implies E_c = (\rho/3\epsilon_0)(R_2^3 - R_1^3)/r^2$



2) Le potentiel $V(r)$ se déduit de $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ qui équivaut ici à $dV = -E\,dr$:

a) $r < R_1$: $V_a = \int -E_a dr = C_a$;

b) $R_1 < r < R_2$: $V_b = \int -E_b dr = (\rho/3\epsilon_0)(-r^2/2 - R_1^3/r) + C_b$;

c) $r > R_2$: $V_c = \int -E_c dr = (\rho/3\epsilon_0)(R_2^3 - R_1^3)/r + C_c$.

C_a, C_b, C_c sont des constantes d'intégration. On les détermine en exprimant

i) la continuité du potentiel en $r = R_1$: $V_a(R_1) = V_b(R_1) \implies C_a = (\rho/3\epsilon_0)(-3R_1^2/2) + C_b$

ii) la continuité du potentiel en $r = R_2$: $V_b(R_2) = V_c(R_2) \implies (\rho/3\epsilon_0)(-R_2^2/2 - R_1^3/R_2) + C_b = (\rho/3\epsilon_0)(R_2^3 - R_1^3)/R_2 + C_c$

iii) la nullité du potentiel à l'infini $(r \to \infty)$: $V_c(r \to \infty) = 0 \implies C_c = 0$.

Finalement on arrive sans difficulté à $V_a = (\rho/2\epsilon_0)(R_2^2 - R_1^2)$; $V_b = (\rho/3\epsilon_0)(3R_2^2/2 - r^2/2 - R_1^3/r)$ et $V_c = (\rho/3\epsilon_0)(R_2^3 - R_1^3)/r$.