Tutorial series # 4 : Conductors in equilibrium ———————— Avril 2024

Exercice 1 : Let's suppose we want to make a flat capacitor with a capacitance of 1F using square plates, separated by 1 mm. What surface area should be used for each plate ?

Ans. : $C = \varepsilon_0 A/d \implies A = Cd/\varepsilon_0$, which gives a surface area of $1.1 \times 10^8 \text{m}^2$, i.e. plates with sides exceeding 10 km ! *In the past, it was common practice to ask a student to go to the laboratory storeroom and ask for a 1 F parallel-plate capacitor, until the storeroom attendants got tired of the joke.*

Exercice 2 : The capacitance of a parallel-plate capacitor is 2 pF. If the area of each plate is 2.4 cm^2, what is the plate separation ?

Ans. : $C = \varepsilon_0 A/d \implies d = \varepsilon_0 A/C$, we find $d = 1.1$ mm.

Exercice 3 : In the combination of figure 1 below, the subscripted numbers indicate the value of the capacitances in μF, e.g. $C_5 = 5\,\mu$F. a) Determine the capacitance $C_{\text{éq}}$ of the equivalent capacitor. b) Find the charge and the potential difference for each capacitor and the energy of the assembly when a potential difference of 120 V is applied between A and B.

Ans. : a) $C_{\text{éq}} = 10\,\mu$F ; b) $Q_1 = 80\mu$C, $Q_2 = 160\mu$C, $Q_3 = 240\mu$C and $V_1 = V_2 = V_3 = 80$V ; $Q_4 = 320\mu$C, $Q_5 = 400\mu$C, $Q_{18} = 720\mu$C and $V_4 = V_5 = 80$V, $V_{18} = 40$V ; The energy of the assembly is $U = C_{\text{éq}}V^2/2 = 7.2 \times 10^{-2}$J.

Exercice 4 : The equivalent capacitance of the combination in Figure 3 below is $C_{\text{éq}} = 2{,}5\,\mu$F. 1) Find the value of C_4 knowing that $C_1 = C_2 = 2\,\mu$F and $C_3 = 4\,\mu$F. 2) Find the charge of C_4, the ddp between its terminals and the energy it stores when a ddp $V_a - V_b = 20$ V is applied between a and b.

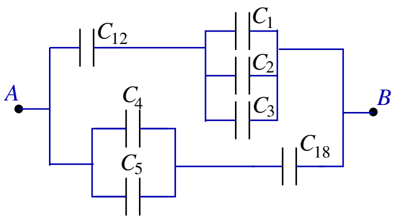


Figure 1

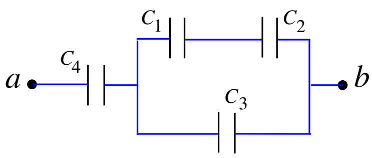


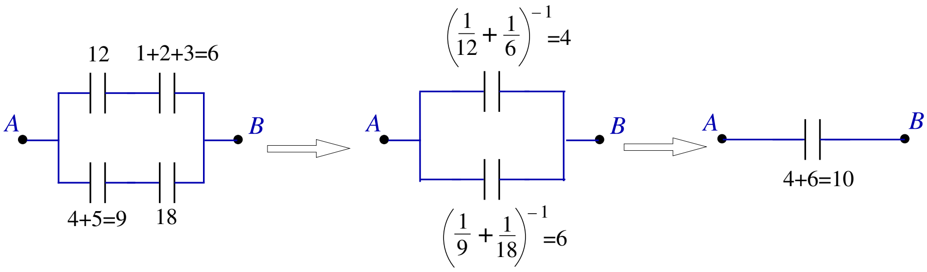
Figure 3

— End of Tutorial serie

Solution de la Série de TD N° 4

Exercice 1 : Le résultat fourni à la fin de l'énoncé est suffisant.

Exercice 2 : a) Pour déterminer la capacité équivalente $C_{éq}$, on procède par étape. Les différentes étapes sont schématisées sur la figure ci-dessous où les capacités sont exprimées en μF. Le circuit initial se réduit de la manière suivante. On calcule d'abord la capcité équivalente $C_{1\|2\|3}$ des trois condensateurs $\|$ parallèles C_1,



C_2 et C_3 : $C_{1\|2\|3} = C_1 + C_2 + C_3 = 6\,\mu$F. De la même façon, la capacité $C_{4\|5}$ équivalente de C_4 et C_5 est : $C(4\|5) = C_4 + C_5 = 9\,\mu$F. On a donc l'ensemble $\{C_{1\|2\|3}$ en série avec C_{12} donne $C_{4bis} = 4\,\mu$F$\}$ en parallèle avec l'ensemble $\{C(4\|5)$ en série avec $C_{18}\}$ donnent une capacité de $C_6 = 6\,\mu$F). Ceci se simplife en une capacité de $4\,\mu$F en parallèle avec une capacité de $6\,\mu$F qui fournissent la capacité équivalente du groupement énoncé : $C_{éq} = 10\,\mu$F.

b) On désigne par V_i la ddp aux bornes de C_i et par Q_i sa charge. On a :

$$Q_{12} = Q_1 + Q_2 + Q_3, \text{(conservation de la charge)} \tag{1}$$

$$V_1 = V_2 = V_3 \rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}, \text{(même ddp pour C}_1\text{, C}_2\text{ et C}_3\text{ car groupés en parallèle)}, \tag{2}$$

$$\frac{Q_{12}}{C_{12}} + \frac{Q_1}{C_1} = V. \tag{3}$$

Des équations (1), (2) et (3) on tire :
$Q_1 = 80\mu$C, $\quad Q_2 = 160\mu$CC, $\quad Q_3 = 240\mu$C et $V_1 = V_2 = V_3 = 80$V ; $Q_{12} = 480\mu$C et $V_{12} = 40$V.
On a aussi

$$\frac{Q_4}{C_4} + \frac{Q_{18}}{C_{18}} = V, \tag{4}$$

$$\frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q_5}{C_5}, \tag{5}$$

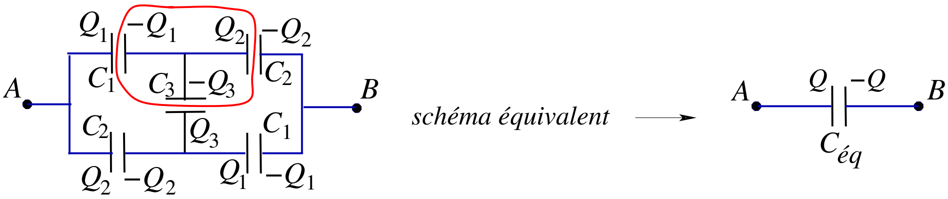
$$\text{et} \quad Q_{18} = Q_4 + Q_5, \tag{6}$$

d'où l'on tire : $Q_4 = 320\mu$C, $\quad Q_5 = 400\mu$C, $\quad Q_{18} = 720\mu$C et $V_4 = V_5 = 80$V, $V_{18} = 40$V.

L'énergie de l'ensemble est $U = C_{éq}V^2/2 = 7.2 \times 10^{-2}$J. On peut vérifier que le même résultat s'obtient en écrivant $U = \sum_i Q_i V_i/2 = \sum_i Q_i^2/2C_i$.

Exercice 3 : Le schéma équivalent est dessiné ci-dessous. Appliquons une différence de potentiel en connectant A et B aux bornes d'une pile. Pour fixer les idées, on suppose A connecté à la borne $+$ et B à la borne $-$. La pile communique une charge Q du côté A et $-Q$ du côté B. On cherche la capacité équivalente $C_{éq}$ tel que :

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_{éq}}. \tag{7}$$



La charge Q se répartit entre les condensateurs C_1 et C_2 qui aquièrent les charges Q_1 et Q_2 respectivement :

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{8}$$

Par influence, le condensateur C_3 aquiert la charge Q_3. Pour C_3, on ne sait pas a priori quelle armature se charge positivement. On lui fait un choix arbitraire sur la figure. Le conducteur entouré en rouge ne portait pas de charge au départ, il restera neutre même après l'application de la ddp. Donc :

$$0 = -Q_1 + Q_2 - Q_3 \tag{9}$$

Par ailleurs, on a :

$$V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_1}{C_1} \tag{10}$$

$$V_A - V_B = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_2}{C_2} \tag{11}$$

En soustrayant membre à membre les équations (**??**) et (**??**) et en divisant par 2, on obtient :

$$0 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_1}{C_1} \tag{12}$$

De l'équation (**??**) on tire : $Q_3 = Q_2 - Q_1$, qui, insérée dans (**??**) donne :

$$0 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_2 - Q_1}{C_3} - \frac{Q_1}{C_1} \implies Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right) = Q_2\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \tag{13}$$

$$\frac{Q_1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{Q_2}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}} \tag{14}$$

Mais on sait que si $(a/b = c/d)$ alors $(a + c)/(b + d) = a/b = c/d$.[1]

$$\frac{Q_1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{Q_2}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}} = \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{2}{C_3}} = \frac{Q}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{2}{C_3}} \tag{15}$$

L'équation (**??**) nous permet d'extraire Q_1/C_1 et Q_2/C_2 :

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1} \frac{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{2}{C_3}} = Q \frac{\frac{1}{C_1C_2} + \frac{1}{C_1C_3}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{2}{C_3}} = Q \frac{C_3 + C_2}{C_2C_3 + C_1C_3 + 2C_1C_2} \tag{16}$$

$$\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_2} \frac{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{2}{C_3}} = Q \frac{\frac{1}{C_2C_1} + \frac{1}{C_2C_3}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{2}{C_3}} = Q \frac{C_3 + C_1}{C_2C_3 + C_1C_3 + 2C_1C_2} \tag{17}$$

1. C'est un résultat qui se démontre très facilement. Posons $a/b = c/d = k$, alors $a = kb$ et $c = kd$ et $(a + c)/(b + d) = (kb + kd)/(b + d) = k(b + d)/(b + d) = k$, donc $a/b = c/d = (a + c)/(b + d)$.

Sachant que $V_A - V_B = Q_1/C_1 + Q_2/C_2$, il vient :

$$V_A - V_B = Q\,\frac{2C_3 + C_1 + C_2}{C_2C_3 + C_1C_3 + 2C_1C_2}. \tag{18}$$

La capacité équivalente s'obtient finalement par (voir (**??**)) :

$$C_{\text{éq}} = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{C_2C_3 + C_1C_3 + 2C_1C_2}{2C_3 + C_1 + C_2}. \tag{19}$$

Exercice 4 : 1) Si C_{123} désigne la capacité équivalente de C_1, C_2 et C_3, elle sera en série avec C_4 et on a :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{123}} \implies \frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_{\text{éq}}} - \frac{1}{C_{123}} \implies C_4 = \left(\frac{1}{C_{\text{éq}}} - \frac{1}{C_{123}}\right)^{-1}.$$

$$\to C_{123} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} + C_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{-1} + 4 = 5\,\mu\text{F},$$

$$\to C_4 = \left(\frac{1}{2{,}5} - \frac{1}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5\,\mu\text{F}.$$

2) Dans la combinaison proposée, on voit que C_4 est en série avec le reste. Or, on sait que lorsque des condensateurs (initialement neutres) sont associés en série, ils acquièrent la même charge lorsque l'ensemble est soumis à une différence de potentiel ; cette charge est aussi celle du condensateur équivalent soumis à la même ddp. Si Q désigne cette charge, On a :

$$\text{Charge de } \mathrm{C}_4 \to Q = C_{\text{éq}}V = 2{,}5\,\mu\text{F} \times 20\,\text{V} = 50\,\mu\text{C}$$

$$\text{ddp aux bornes de } \mathrm{C}_4 :\to V_4 = \frac{Q}{C_4} = \frac{50\,\mu\text{C}}{5\,\mu\text{F}} = 10\ \text{V}$$

$$\text{Énergie emmagasinée dans } C_4 \to E = \frac{1}{2}Q\,V_4\ (\text{ou bien } \frac{1}{2}C_4\,V_4^2) = \frac{1}{2} \times 50\,\mu\text{C} \times 10\ \text{V} = 250\,\mu\text{J}.$$