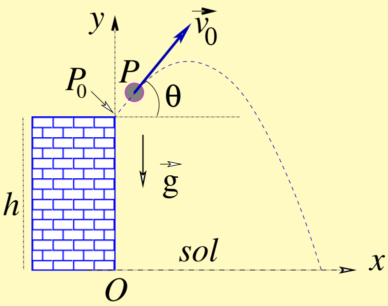
Université de Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd

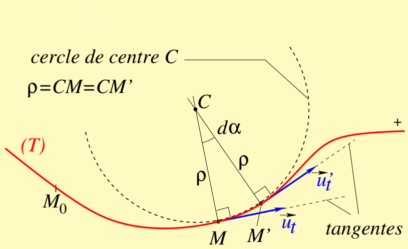
Faculté de Mathématiques
et Informatique
Département de Mathématique
et Informatique - Socle Commun

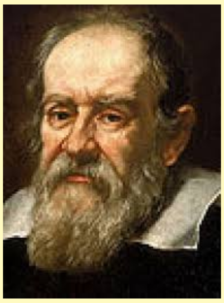
53, Route de Constantine,
Fesdis, Batna 05078,
Algérie.

Cours de Phy

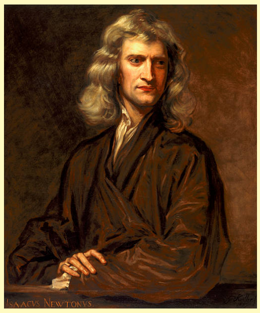


L'équation de la trajectoire de P est : $y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\,x^2 + \tan\theta\,x + h$. La vitesse de la bille lorsqu'elle arrive au sol vaut $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.
En fonction de $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ le rayon de courbure de M (figure de droite) s'écrit : $\rho = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}$.





Tout référentiel dans lequel le principe d'inertie (première loi de Newton) est vérifiée est appelé référentiel galiléen.
'Et pourtant elle tourne' (Eppure si muove). Galilée aurait marmonné cette phrase en 1633 après avoir été forcé par le tribunal de l'Inquisition d'abjurer sa théorie ...



Ci-dessus, la figure en bleu (à gauche) montre la trajectoire d'une petite bille P lancée du haut d'un bâtiment (hauteur h) avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle θ avec l'horizontale. Les expressions à sa droite donne l'équation de la trajectoire de la bille et sa vitesse au moment où elle touche le sol. La figure tout à fait à droite permet de définir le rayon de courbure en un point de la trajectoire. Quand M' tend vers M (tajectoire (T) en rouge), les normales aux tangentes en M et M' se rencontrent en un point C appelé centre de courbure. Les longueurs CM et CM' sont alors égales à une une quantité ρ qu'on appelle rayon de courbure. Un cercle de centre C et de rayon ρ passera nécessairement par M et M'.
Quant aux deux photos portraits d'en bas, elles sont de Galilée (à gauche) et Newton (à droite), deux grands savants qui ont marqué l'histoire des sciences et ont grandement contribué à la mécanique.

Prof. M. A. Belkhir

Table des matières

1 Vecteurs, système SI et rappels mathématiques **3**
- 1.1 Système d'unités SI 3
- 1.2 Analyse dimensionnelle et homogénité des équations en physique 4
- 1.3 Vecteurs 5
  - 1.3.1 Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles 5
  - 1.3.2 Représentation graphique et notation d'un vecteur 5
  - 1.3.3 Composantes d'un vecteur : expression d'un vecteur par rapport à un système d'axes . 6
  - 1.3.4 Addition analytique de deux vecteurs 7
- 1.4 Produits de vecteurs 7
  - 1.4.1 Produit scalaire 7
    - 1.4.1.1 Définitions équivalentes du produit scalaire 8
    - 1.4.1.2 Expression du produit scalaire en fonction des composantes 8
  - 1.4.2 Produit vectoriel 8
    - 1.4.2.1 Expression analytique du produit vectoriel 10
  - 1.4.3 Le produit mixte 10
  - 1.4.4 Produit vectoriel de trois vecteurs ou double produit vectoriel 11
- 1.5 Quelques rappels de mathématiques 12
  - 1.5.1 Trigonométrie 12
  - 1.5.2 Dérivées et intégrales par rapport à x 13
  - 1.5.3 Fonction scalaire à plusieurs variables 13
  - 1.5.4 Dérivation, différentiation et intégration vectorielle 13
- 1.6 Lettres de l'alphabet grec 14

Chapitre 1

Vecteurs, système SI et rappels mathématiques

La physique fait énormément appel aux vecteurs et on va les utiliser beaucoup dans ce cours. C'est pourquoi ce chapitre leur est dédié presque totalement. Mais avant d'aborder vraiment les vecteurs, nous allons présenter le système international d'unités (système SI), parler brièvement de l'analyse dimensionnelle ainsi que de l'homogénéité des équations en physique. Nous terminerons ce chapitre avec quelques rappels de mathématiques très utiles.

1.1 Système d'unités SI

Pour mesurer une grandeur physique, il est nécessaire d'utiliser une unité de mesure (ou un étalon). Il existe différents systèmes d'unités basés sur des choix différents du jeu d'unités fondamentales, mais de nos jours le système d'unités le plus utilisé est le Système international d'unités (SI), dans lequel il y a sept unités de base. Elles sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Grandeur physique		**DIMENSION**	**Unité de mesure**	
Nom de la grandeur	Symbole	de la grandeur	Unité SI de l'unité	Symbole de l'unité
Longueur	$\ell, x, y, \ldots$	L	(le) mètre	m
Masse	M, m	M	(le) kilogramme	kg
Temps	t	T	(la) seconde	s
Intensité électrique	I, i	I	(un, l') ampère	A
Température	T, θ	Θ	(le) kelvin	K
Intensité lumineuse	I_v, I	J	(la) candela	cd
Quantité de matière	n	N	(la) mole	mol

Table 1.1 – Unités fondamentales du système SI

Les symboles θ et Θ qui apparaissent dans le tableau se prononcent *thêta* et représentent la huitième lettre de l'alphabet grec. D'autres lettres grecques seront rencontrées tout au long de ce cours. Voir le tableau de l'alphabet grec à la section 1.6.

Unité dérivées : les unités formées d'une combinaison de plusieurs unités de base sont appelées *unités dérivées*. Par exemple, mètres par secondes (m/s) pour la vitesse ou kilogrammes par mètre cube $\mathrm{kg/m^3}$ pour la masse volumique, etc.

Certaines unités dérivées prennent un nom particulier ; par exemple le $\mathrm{kg \cdot m/s^2}$ est l'unité de force qui découle de la loi de Newton $F = ma$, elle s'appelle le newton (N) : 1 N$= 1\,\mathrm{kg \cdot m/s^2}$.

Radian et stéradian : Notons que le radian (unité d'angle plan ; symbole rad) et le stéradian (unité d'angle solide ; symbole sr) sont considérées comme des unités dérivées.
Elles sont adimensionnelles car elles sont définies par un rapport de deux longueurs pour l'angle plan et de deux surfaces pour l'angle solide. Leur **utilisation** ou **non** dans les expressions d'autres unités dérivées SI se fait selon les besoins.

Exemples :
1- Utilisation $\rightarrow$ Vitesse de rotation (ou vitesse angulaire) ω d'un point M en mouvement sur un cercle de rayon R s'exprime en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ pour la distinguer de la fréquence qui elle se mesure en s^{-1}.

2- Non-utilisation $\rightarrow$ Sur un cercle de rayon R, la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre α est $L = \alpha R$. L'unité de L est bien sûr m et non rad·m.

Unités non SI : des unités <u>non SI</u> sont aussi très utilisées : °C, km/h, eV, pouce (in : inch en anglais), etc. On doit savoir faire la conversion unités non SI vers unités SI et vice versa. Exemple, convertir 72 km/h en m/s :

$$72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{72 \times 1000}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s}$$

1.2 Analyse dimensionnelle et homogénité des équations en physique

<u>On ne peut pas additionner (ou soustraire) deux grandeurs qui ont des dimensions différentes</u> : écrire Longueur + largeur c'est sensé mais Longueur + surface ou 2 kg + 5 m/s n'ont aucun sens ! Donc la somme $a + b$ n'a de sens que si les quantités a et b ont la même dimension.

Par contre, il est tout à fait possible de <u>multiplier</u> ou <u>diviser</u> deux grandeurs physiques de même dimension ou de dimensions différentes : $v = L/t \rightarrow \mathrm{m/s}$, $S = L \times l \rightarrow\ \mathrm{m} \times\ \mathrm{m} =\ \mathrm{m}^2$, $P = m\,\mathrm{g} \rightarrow\ \mathrm{kg} \cdot\ \mathrm{m/\,s}^2$.

notation : La dimension d'une grandeur X se note $[X]$ (les sympboles [et] s'appellent *crochets*).

Homogénéité : Une équation ou relation physique n'est homogène que si ses deux membres ainsi que chaque terme additif constituant chaque membre ont même dimension. L'équation $a + b = c$ n'est homogène que si $[a] = [b] = [c]$.
L'analyse dimensionnelle est un outil puissant pour détecter une erreur : *une relation non homogène est forcément fausse.*

Si A, B et C sont des grandeurs quelconques et α, β et γ des nombres, les règles suivantes s'appliquent :
1) Les nombres sont adimensionnels : $[5] = [21572] = [-513] = 1$. Exemple : $[2A] = [2][A] = 1[A] = [A]$.
2) $[A^\alpha] = [A]^\alpha$.
3) L'équation $[A]^\alpha + [B]^\beta = [C]^\gamma$ est homogène $\Longleftrightarrow [A]^\alpha = [B]^\beta = [C]^\gamma$.
4) Si $A^\alpha B^\beta = C^\gamma$ alors $[A]^\alpha [B]^\beta = [C]^\gamma$.

Prenons par exemple l'équation $x = at^2/2$, où x est l'espace parcouru dans le temps t par une particule qui part du repos avec l'accélération a. Pour voir si l'équation est homogène, on calcule la dimension de chaque membre. On a :

$$[x] = L$$

$$[at^2/2] = [a][t^2] = [a][t]^2 = (L/T^2)T^2 = L$$

donc $[x] = [at^2/2]$, on conclut que l'équation est homogène.

1.3 Vecteurs

1.3.1 Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles

Certaines grandeurs physiques sont complètement définies à l'aide d'un *nombre*, suivi ou non d'une unité de mesure. On les appelle des *scalaires*. La masse (un bloc de 2 kg), le temps (une séance de cours de 1h30mn), l'énergie (une consommation d'énergie électrique de 30 kwh par jour), la température (une température de 25 °C), l'indice de réfraction (l'indice de réfraction du verre vaut 1,5), la densité (le fer a une densité de 7,86), etc. ; sont des **grandeurs scalaires** ou simplement ***des scalaires***.

Il existe, cependant, d'autres quantités physiques qui ne peuvent pas être définies complètement par un simple nombre. Par exemple, si je vous demande de vous déplacer de 5 m vers l'avant ce n'est pas pareil que de vous dire vers l'arrière, à droite ou à gauche. Pour effectuer le déplacement désiré, il est important de préciser la direction et le sens du déplacement, en plus de la valeur de 5 m. Le déplacement n'est pas un scalaire, c'est un ***vecteur***. À la différence d'un scalaire, un vecteur est donc caractérisé par une ***direction***, un ***sens*** et une valeur appelée ***module***. La vitesse, l'accélération, la force, le champ électrique, etc., sont aussi des vecteurs.

Remarque : Dans les ouvrages anglo-saxons, on se limite à deux caractéristiques (longueur et direction) pour définir un vecteur. Le mot **direction** inclut dans son acception l'orientation du vecteur. On dira par exemple un avion qui vole dans la direction Est-Ouest, un projectile lancé à 30° de l'axe $+x$, etc. Pour ce qui nous concerne, on adoptera la même définition quand le sens du vecteur est implicite, sinon, si le besoin se fait sentir on précisera le sens.

1.3.2 Représentation graphique et notation d'un vecteur

Un vecteur est représenté graphiquement par un segment de droite allant d'une **origine** (A par exemple) à une **extrémité** (B par exemple).

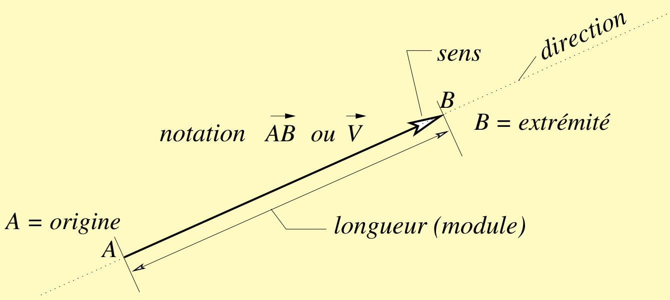


FIGURE 1.1 – Représentation graphique et notation d'un vecteur

- On le note $\overrightarrow{AB}$ ou par une simple lette $\vec{V}$ par exemple. Au lieu de mettre une flêche au dessus, on note parfois les vecteurs avec des lettres en **gras** : **AB**, **V**.
- Le module d'un vecteur $\vec{V}$ se note $\|\vec{V}\|$, $|\vec{V}|$ ou simplement V.
- synonymes : module , longueur, grandeur, valeur,
intensité (d'une force, d'un champ électrique, ...),
norme d'un vecteur (surtout en mathématiques)

Addition, Commutativité et Associativité

1. $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$; l'addition de deux vecteurs est commutative.
2. $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$; l'addition des vecteurs est associative.

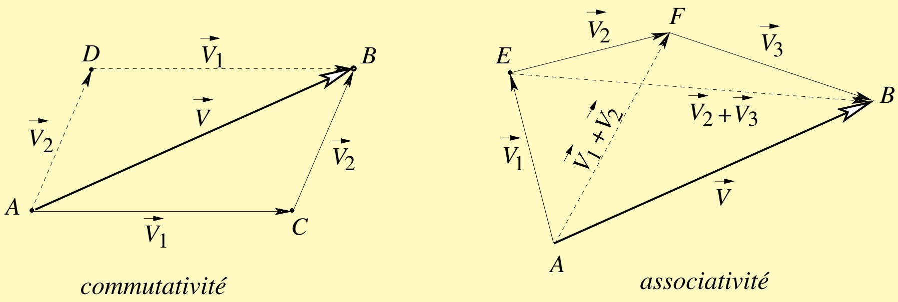


FIGURE 1.2 – Addition de vecteurs : méthode graphique

3. Vecteur nul : Si on bouge pas de A, ou si on part de A et on revient en A, le déplacement effectué dans les deux cas est *nul*. Il correspond au vecteur nul noté $\overrightarrow{0}$ (i.e. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$).
4. Le vecteur $\overrightarrow{0}$ est un élément neutre pour l'addition vectorielle : $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$. Bien sûr $\|\vec{0}\| = 0$.
5. Opposé d'un vecteur : l'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ est le vecteur $\overrightarrow{V'}$ tel que la somme $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}$ donne $\vec{0}$, d'où $\overrightarrow{V'} = -\overrightarrow{V}$.
6. Soustraction de deux vecteurs : $\overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{V}_1 + (-\overrightarrow{V}_2)$, soustraire un vecteur revient à ajouter son opposé.
7. Multiplication par un scalaire, α et β deux réels : $\alpha\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V'}$, $\overrightarrow{V'}$ a la même direction que $\overrightarrow{V}$, de même sens si $\alpha > 0$, de sens contraire si $\alpha < 0$.
8. Le module de $\alpha\overrightarrow{V}$ est $|\alpha|\ \|\overrightarrow{V}\|$.
9. Pour $\alpha = 0$: $0\overrightarrow{V} = \vec{0}$.
10. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{V} = \alpha\overrightarrow{V} + \beta\overrightarrow{V}$
11. $\alpha(\beta\overrightarrow{V}) = \beta(\alpha\overrightarrow{V}) = \alpha\beta\overrightarrow{V}$
12. $\alpha(\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2) = \alpha\overrightarrow{V}_1 + \alpha\overrightarrow{V}_2$
13. **Vecteur unitaire** : Un vecteur unitaire est un vecteur de module égal à 1. Un vecteur unitaire suivant un vecteur $\overrightarrow{V}$ quelconque non nul est donné par $\vec{u} = \overrightarrow{V}/V$. Notons qu'un vecteur unitaire n'a pas de dimension (car c'est un rapport de 2 grandeurs de même dimension). Les vecteurs unitaires de base d'un système d'axes orthonormé $Oxyz$ sont souvent notés : $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

1.3.3 Composantes d'un vecteur : expression d'un vecteur par rapport à un système d'axes

Sur la figure 1.3 (a) on a : $\vec{V} = -3\vec{i}$, ce qui revient à dire que la composante de $\vec{V}$ suivant $\vec{i}$ vaut -3. Sur la figure (b) on a : $\vec{V} = 5\vec{i} + 1.5\vec{j}$, ce qui signifie que la composante de $\vec{V}$ suivant x vaut 5 et celle suivant y 1.5. Sur la figure (c) on a : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 2.5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, ce qui signifie les composantes de $\vec{V}$ sont +2.5 suivant x, +4 suivant y et +3 suivant z. V_{xy} et V_{xz} sont les projections orthogonales de $\vec{V}$ sur les plans xy et yz respectivement.

De manière générale, dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un vecteur $\vec{a}$ s'écrit : $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$. Il est facile de vérifier (théorème de Phytagore) que le module de $\vec{a}$ est donné par :

$$\boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \text{ ou encore } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{1.1}$$

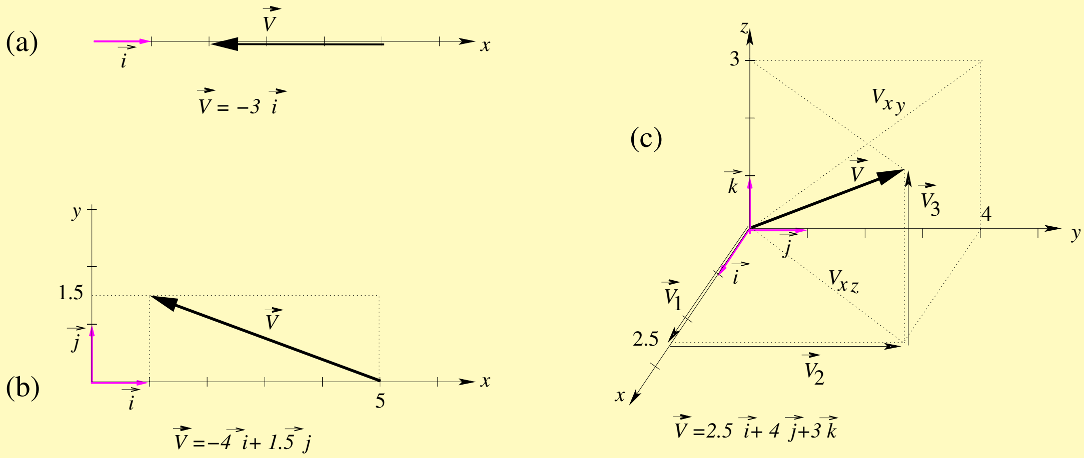


FIGURE 1.3 – Vecteur à 1, 2 et 3 dimensions dans un système d'axes

Si $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$, l'égalité $\vec{a} = \vec{b}$ équivaut à $\boxed{a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z}$.

1.3.4 Addition analytique de deux vecteurs

Soit $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ et $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. En fonction des compsantes la somme $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ s'écrit :

$$\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}, \tag{1.2}$$

ce qui donne : $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ avec

$$\boxed{c_x = a_x + b_x, \qquad c_y = a_y + b_y, \qquad c_z = a_z + b_z}. \tag{1.3}$$

1.4 Produits de vecteurs

1.4.1 Produit scalaire

Considérons deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ faisant entre eux un angle θ.[1] Leur produit scalaire, noté $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et lu *a* scalaire *b* ou *a* point *b*, est défini par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\theta \tag{1.4}$$

Quand il n' y a pas d'ambiguïté on préfère la notation simple :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\,\cos\theta \tag{1.5}$$

produit scalaire de deux vecteurs = module de l'un fois module de l'autre multiplié par le cosinus de l'angle saillant entre eux.

Le produit scalaire, comme son nom l'indique, est **un scalaire**. Son signe est celui de $\cos\theta$ puisque a et b, étant des modules, sont positifs. Par conséquent, le produit scalaire est positif si $\cos\theta > 0$ i.e.

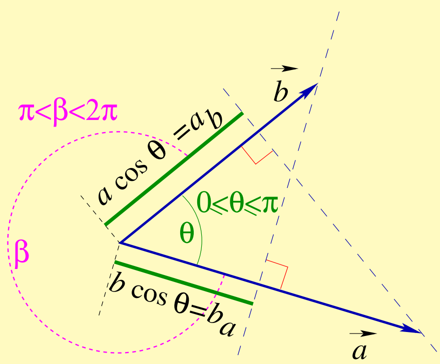


FIGURE 1.4 – Produit scalaire de deux vecteurs

1. Entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ il y a deux angles : l'angle β (dit renrant) compris 180°et 360°, et l'angle θ (dit saillant) compris 0°et 180°. C'est l'angle saillant qu'gvfon considère dans la définition du produit scalaire.

$0 \leq \theta < \pi/2$; négatif si $\cos\theta < 0$ i.e. $\pi/2 \leq \theta < \pi$, nul si $a = 0$ ou $b = 0$ ou $\cos\theta = 0$ i.e. $\theta = \pi/2$. Ce dernier cas signifie que si le produit scalaire de deux vecteurs (non nuls) est nul, alors ils sont **perpendiculaires**.

Propriétés :

1- $ab\cos\theta = ba\cos\theta \implies \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} \rightarrow$ le PS est commutatif.

2- $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{a}\|\,\|\overrightarrow{a}\|\cos 0$, soit puisque $\cos 0 = 1$,

$$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{a}\|^2 \text{ ou bien } \overrightarrow{a}^2 = a^2} \tag{1.6}$$

Le carré du vecteur est égal au carré du module. Ce résultat est important et il faut le retenir.

3- $\alpha\vec{a}\cdot\beta\overrightarrow{b} = \beta\vec{a}\cdot\alpha\overrightarrow{b} = \alpha\beta\,\vec{a}\cdot\overrightarrow{b}$

4- $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition.

1.4.1.1 Définitions équivalentes du produit scalaire

En posant $b\cos\theta = \overline{b}_a$ =projection de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$, l'équation (1.5) peut se réécrit :
2ème définition

2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a\underbrace{b\cos\theta}_{\overline{b}_a} = a\,\overline{b}_a$ (= module de $\overrightarrow{a}$ fois la projection *algébrique*[2] de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$.

3ème définition

3) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = b\underbrace{a\cos\theta}_{\overline{a}_b} = b\,\overline{a}_b$ (= module de $\overrightarrow{b}$ fois la projection algébrique de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$.

1.4.1.2 Expression du produit scalaire en fonction des composantes

Dans un système d'axes orthonormé $Oxyz$ muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ et $\overrightarrow{b} = b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) && (1.7)\\
&= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k} && (1.8)\\
&+ a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{y}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k} && (1.9)
\end{aligned}$$

D'après la définition (1.5) et du fait que $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sont unitaires on a : $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$, et $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$. Il vient :

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{1.10}$$

En appliquant (1.6) et (1.10) on a : $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, on retrouve le résultat (1.1).

1.4.2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ **est un vecteur**
- de module $ab\sin\theta$, θ étant l'angle saillant (le plus petit, $0 < \theta < \pi$) entre les deux vecteurs,
- de direction perpendiculaire au plan des deux vecteurs et
- son sens est tel qu'il forme un trièdre direct avec $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ (voir plus bas).

2. Le mot algébrique signifie ici que la projection peut prendre des valeurs négatives. C'est ce qui arrive en effet quand l'angle θ est compris entre $\pi/2$ et π .

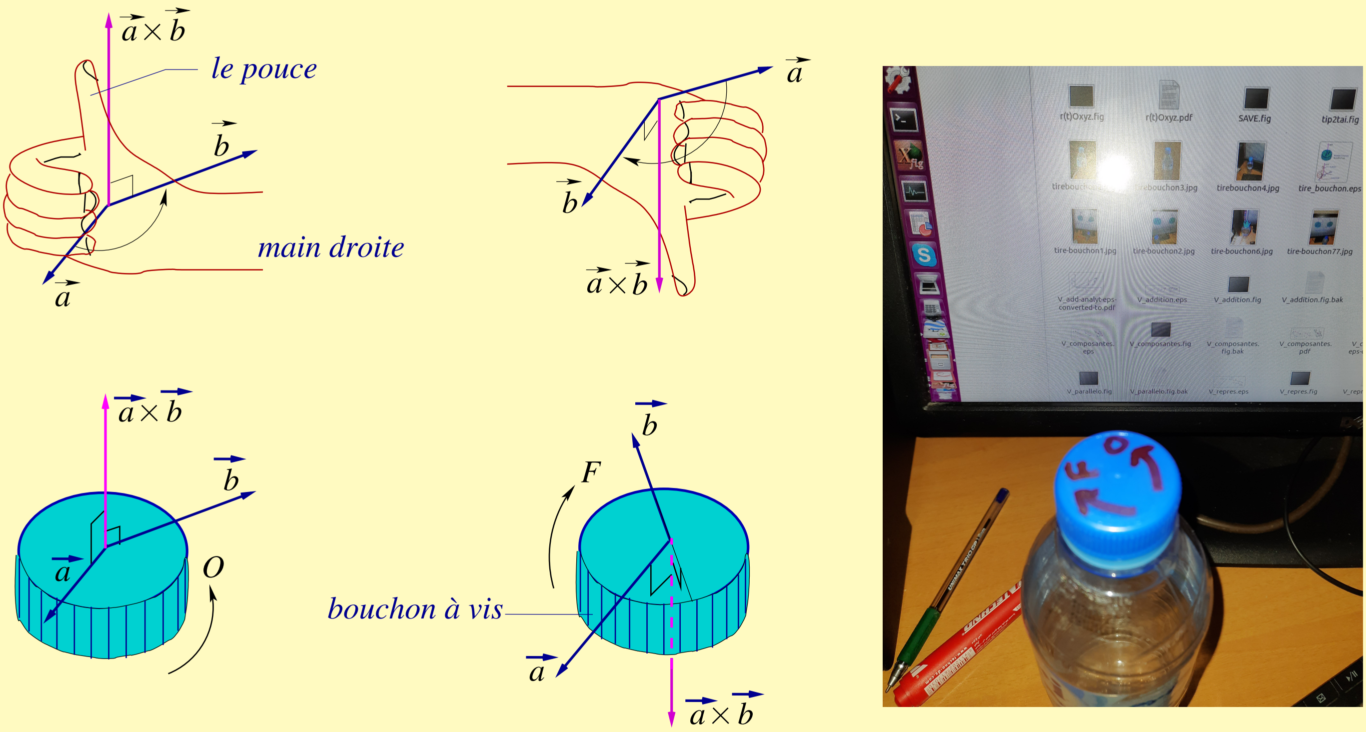


FIGURE 1.5 – Sens du produit vectoriel : règle de la main droite et règle du bouchon à vis

Le produit vectoriel
- s'écrit $\vec{a} \times \vec{b}$,
- se lit a vectoriel b ou a croix b.

En définissant le vecteur unitaire $\vec{n}$ porté par $\vec{a} \times \vec{b}$ et de même sens, le produit vectoriel prend l'expression :

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\theta\, \vec{n}. \tag{1.11}$$

Il existe plusieurs règles qui permettent de déterminer le sens de $\vec{a} \times \vec{b}$. La figure 1.4.2 ci-dessous montre les deux règles les plus utilisées.

1) Règle de la main droite : Les doigts de la main droite (sauf le pouce) sont courbés dans le sens allant du premier vecteur vers le deuxième. Le pouce levé indique alors le sens de leur produit vectoriel.

2) Règle du bouchon à vis (d'une bouteille d'eau par exemple) : Imaginez que les deux vecteurs reposent sur le bouchon comme indiqué sur la figure 1.5. Si $\vec{a}$ vers $\vec{b}$ va dans le sens de l'ouverture (sens O) alors le bouchon sort et $\vec{a} \times \vec{b}$ est dirigé vers l'extérieur de la bouteille. Si $\vec{a}$ vers $\vec{b}$ va dans le sens de la ferméture (sens F) alors le bouchon rentre et $\vec{a} \times \vec{b}$ est dirigé vers l'intérieur de la bouteille.

Propriétés

i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ car le sens de $\vec{n}$ s'inverse quand on tourne de $\vec{b}$ vers $\vec{a}$. Le produit vectoriel est *anticommutatif*.

ii) Le module $ab \sin\theta$ du produit vectoriel s'interprète géométriquement comme la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs.

iii) Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires (parallèles ou antiparallèles) est nul car le sinus s'annule pour $\theta = 0$ ou π. En partculier, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
iv) $\alpha\vec{a} \times \beta\vec{b} = \alpha\beta\,(\vec{a} \times \vec{b})$

v) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
vi) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

1.4.2.1 Expression analytique du produit vectoriel

On a : $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ et $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) && (1.12)\\
&= a_xb_x\,\vec{i} \times \vec{i} + a_xb_y\,\vec{i} \times \vec{j} + a_xb_z\,\vec{i} \times \vec{k} && (1.13)\\
&+ a_yb_x\,\vec{j} \times \vec{i} + a_yb_y\,\vec{j} \times \vec{j} + a_yb_z\,\vec{j} \times \vec{k} && (1.14)\\
&+ a_zb_x\,\vec{k} \times \vec{i} + a_zb_y\,\vec{k} \times \vec{j} + a_zb_z\,\vec{k} \times \vec{k} && (1.15)
\end{aligned}$$

Mais, d'après la définition du produit vectoriel, on a :[3]

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \tag{1.16}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}. \tag{1.17}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \vec{0} + a_xb_y\,\vec{k} - a_xb_z\vec{j} - a_yb_x\,\vec{k} + \vec{0} + a_yb_z\,\vec{i} + a_zb_x\,\vec{j} - a_zb_y\,\vec{i} + \vec{0} && (1.18)\\
&= (a_yb_z - a_zb_y)\,\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k} && (1.19)
\end{aligned}$$

À l'aide des déterminants, on peut réécrire cette expression de manière plus concise et plus pratique :

$$\vec{a} \times \vec{b} = + \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}, \tag{1.20}$$

L'équation (1.20) peut se mettre sous la forme d'un déterminant 3×3 :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{array} \tag{1.21}$$

On retiendra les signes alternés $+$,$-$,$+$ dans l'équation (1.20) qu'on ne doit pas oublié d'appliquer quand on utilise l'équation (1.21).

1.4.3 Le produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs quelconques $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est le scalaire défini par :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

3. Pour retrouver sans calcul les relations (1.17), on peut utiliser ce moyen mnémotechnique : on écrit la liste $\vec{i}$,$\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{i}$,$\vec{j}$, $\vec{k}$ dans cet ordre et le produit vectoriel de deux vecteurs consécutifs est alors donné par le vecteur suivant sur la liste avec un signe $+$ si on va de gauche à droite et $-$ si on va de droite à gauche. Par exemple $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ mais $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$.

Le produit mixte peut être positif, négatif ou nul. Il s'annule si :
- un des trois vecteurs au moins est nul,
- les trois vecteurs sont coplanaires. En effet, si les trois vecteurs sont dans le même plan, alors $(\vec{b} \times \vec{c})$ est un vecteur perpendiculaire au plan, donc à $\vec{a}$, et par suite leur produit scalaire est nul. Cette propriété est très utile pour démontrer que 3 vecteurs issus d'une même origine sont situés dans un même plan.

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire des trois vecteur c'est-à-dire :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

En vertu de la commutativité du produit scalaire, l'égalité de $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ et $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ se réécrit :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

résultat qui montre que le produit mixte ne change pas si on échange les symboles $\cdot$ et $\times$. Pour cette raison, on le note parfois $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sans avoir besoin de préciser où placer le $\cdot$ et le $\times$.

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$, le produit mixte peut s'écrit (on fait usage de (1.20)) :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(+ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot \left(c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \right) \tag{1.22}$$

$$= + \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z \tag{1.23}$$

Cette dernière expression est aussi celle d'un déterminant 3×3 :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.24}$$

Par rapport à une base orthonormée <u>directe</u> $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$, un produit mixte $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ positif signifie que le trièdre $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ est direct ; si, au contraire, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ est négatif alors le trièdre $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ est indirect.

Remarques :
- Un produit mixte positif signifie que les trois vecteurs forment un trièdre direct.
- Un produit mixte négatif signifie que les trois vecteurs forment un trièdre indirect.
- La valeur absolue d'un produit mixte donne le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs.

1.4.4 Produit vectoriel de trois vecteurs ou double produit vectoriel

Avec trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ on peut former deux doubles produits vectoriels : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ et $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. On admet que (mais on peut le démontrer) :

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{1.25}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \tag{1.26}$$

Il est facile de voir qu'avec le changement $\vec{c} = \vec{a'}$, $\vec{a} = \vec{b'}$ et $\vec{b} = \vec{c'}$, la formule (1.26) devient, grâce à l'anticommutativité du produit vectoriel et la commutativité du produit scalaire : $\vec{a'} \times (\vec{b'} \times \vec{c'}) = \vec{b'}(\vec{a'} \cdot \vec{c'}) - \vec{c'}(\vec{a'} \cdot \vec{b'})$. On retrouve la forme (1.25).

On peut retrouver rapidement ces formules à l'aide de ce moyen mnémotechnique : *on sort le vecteur du milieu, on met un signe $-$ devant l'autre vecteur de la parenthèse et on rajoute les produits scalaires des deux autres vecteurs*. Exercez-vous à retrouver à l'aide de ce moyen les relations (1.25) (1.26).

1.5 Quelques rappels de mathématiques

1.5.1 Trigonométrie

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon égal à 1 et centré à l'origine O des axes des abscisses x et des ordonnées y. Les coordonnées x et y d'un point P du cercle correspondent tout simplement au cosinus et au sinus de l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe des x : $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$. Ce cercle peut vous aider à repérer les valeurs remarquables ci-dessous sur $[0,2\pi]$.

$\cos 0 = \cos 2\pi = 1,$
$\cos \pm\pi/2 = 0,$
$\cos \pm\pi/3 = 1/2,$
$\cos \pm\pi/6 = \sqrt{3}/2,$
$\cos \pm\pi = -1.$

$\sin 0 = \sin \pm\pi = \sin 2\pi = 0,$
$\sin \pm\pi/2 = \pm 1 \rightarrow \arcsin 1 = \pi/2,$
$\sin \pm\pi/3 = \pm\sqrt{3}/2 \rightarrow \arcsin \sqrt{3}/2 = \pi/3,$
$\sin \pm\pi/6 = \pm 1/2 \rightarrow \arcsin 1/2 = \pi/6.$

$\arcsin 0 = 0$	$\arcsin 1/2 = \pi/6$	$\arcsin \sqrt{2}/2 = \pi/4$
$\arcsin \sqrt{3}/2 = \pi/3$	$\arcsin 1 = \pi/2$	
$\arccos 0 = 1$	$\arcsin 1/2 = \pi/3$	$\arcsin \sqrt{2}/2 = \pi/4$
$\arcsin \sqrt{3}/2 = \pi/6$	$\arccos 1 = 0$	
$\arctan 0 = 0$	$\arctan \sqrt{3}/3 = \pi/6$	$\arctan 1 = \pi/4$
$\arctan \sqrt{3} = \pi/3$	$\arctan \infty = \pi/2$	

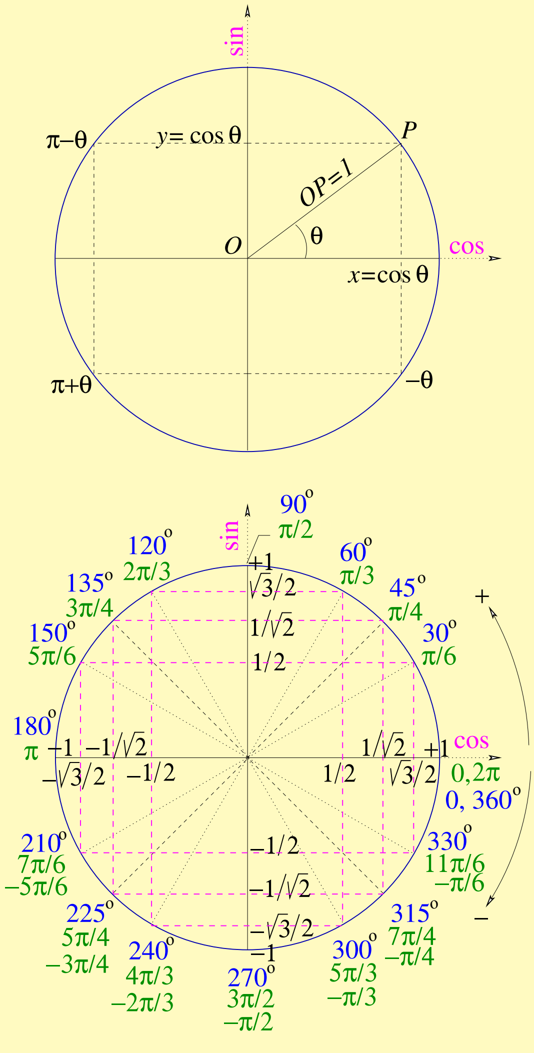


Figure 1.6 – Cercle trigonométrique

$\forall\,\alpha$ et β réel, on a :
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

Des relations précédentes on déduit que :
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha - 1\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\forall k$ entier et $\forall\theta$ réel, on a :
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta \rightarrow \tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta \rightarrow \tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\tan(2x) = 2\tan x/(1-\tan^2 x)$

$\sin(\pi/2-\theta) = \cos\theta$; $\cos(\pi/2-\theta) = \sin\theta$;
$\sin(\pi/2+\theta) = \cos\theta$; $\cos(\pi/2+\theta) = -\sin\theta$;

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta\,;\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta\,;$
$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta\,;\ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta.$

1.5.2 Dérivées et intégrales par rapport à x

La dérivée en x d'une fonction scalaire $f(x)$ est par définition : $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ où Δx est un accroissement de x et Δf l'accroissement correspondant de f. La fonction dérivée f' se note aussi $\frac{df}{dx}$.
Quelques propriétés :
$d(f \pm g)/dx = df/dx \pm dg/dx$
$d(\alpha f)/dx = \alpha df/dx$
$d(fg)/dx = df/dx + dg/dx$
$d(f/g)/dx = (gdf/dx + fdg/dx)/g^2$
$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1} \to \int x^\alpha dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ + constante
$(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$
$(\sin x)' = \cos x \to \int \cos x dx = \sin x +$ constante
$(\cos x)' = -\sin x\ \int \sin x dx = -\cos x +$ constante
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x \to \int (1/\cos^2 x) dx = \tan x +$ constante

$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2} \to \int 1/\sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x$ + constante
$(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2} \to \int 1/\sqrt{1-x^2} dx = -\arccos x$ + constante
$(\arctan x)' = 1/(1+x^2) \to \int 1/(1+x^2) dx = \arctan x$ + constante

$(\ln(x))' = 1/x \to \int 1/x dx = \ln(x) +$ constante
$(\exp(x))' = \exp(x) \to \int \exp(x) dx = \exp(x) +$ constante

1.5.3 Fonction scalaire à plusieurs variables

Exemple : $f(x, y, z) = x^3 + 2z/y + zx$
Dérivée partielle par rapport à x (notation $\partial f/\partial x$) : lors de la dérivation, y et z sont traités comme des constantes, $\partial f/\partial x = 3x^2 + z$, $\partial f/\partial y = -2z/y^2$ et $\partial f/\partial z = 2/y + x$.

Différentielle totale : $df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz = (3x^2 + 2/y + z)\, dx + (-2x/y^2)\, dy + xdz.$

1.5.4 Dérivation, différentiation et intégration vectorielle

$\vec{V}$ dépend d'une seule variable t : la dérivée s'écrit $\frac{d\vec{V}}{dt}$ et se calcule comme dans le cas d'une fonction scalaire.
Si dans un repère $(Oxyz)$ $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ alors dans ce repère
1) $\frac{d\vec{V}}{dt} = dV_x/dt\,\vec{i} + dV_y/dt\,\vec{j} + dV_z/dt\,\vec{k}$, et
2) $\int \vec{V}\, dt = \vec{i} \int V_x\, dt + \vec{j} \int V_y\, dt + \vec{k} \int V_z\, dt.$

Autres Propriétés :

3) $\frac{(d\alpha\vec{V})}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{V} + \alpha\frac{d\vec{V}}{dt}$
4) $\frac{d(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} + \frac{d\vec{V}_2}{dt}$
5) $\frac{d(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \frac{d\vec{V}_2}{dt}$
6) $\frac{d(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \frac{d\vec{V}_2}{dt}$

Si $\vec{V}$ dépend de plusieurs variables x,y,z, la différentielle s'écrit
7) $d\vec{V} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\,dz$

1.6 Lettres de l'alphabet grec

Un bon nombre de lettres grecques sont très utilisées en mathématiques et en physique pour nommer des nombres, désigner des variables ou certaines fonctions. Quelques exemples : Σ pour la somme, le nombre π (ou constante d'Archimède $\pi = 3.14159265...$), Δ pour le laplacien, ω pour la vitesse de rotation, θ et ϕ pour les coordonnées sphériques, etc. Il est donc important de connaître leur forme, savoir les lire et les écrire. On les résume dans le tableau ci-dessous.

Majuscule	**Minuscule**	**Nom français**		**Majuscule**	**Minuscule**	**Nom français**
A	α	alpha		**N**	ν	nu
B	β	bêta		Ξ	ξ	ksi/xi
Γ	γ	gamma		**O**	**o**	omicron
Δ	δ	delta		Π	π et ϖ	pi
E	ϵ et ε	epsilon		**P**	ρ et ϱ	rhô
Z	ζ	zêta		Σ	σ et ς	sigma
H	η	êta		**T**	τ	tau
Θ	θ et ϑ	thêta		Υ	υ	upsilon
I	ι	iota		Φ	ϕ et φ	phi
K	κ et $\varkappa$	kappa		**X**	χ	khi/chi
Λ	λ	lambda		Ψ	ψ	psi
M	μ	mu		Ω	ω	oméga

TABLE 1.2 – Les lettres de l'alphabet grec avec leur nom et leur prononciation en français. Vous remarquerez que certaines d'entre elles (lettres en couleur **Magenta**) ont la même graphie que les lettres latines et seront considérées comme telles.