## **TD n° 1** —— Décembre 2020

*Quand un vecteur $\vec{V}$ est écrit sous la forme $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$, le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne une base ortohnormée directe. Pour mieux aborder certains exercices, il est recommandé de revoir les notions de base de trigonométrie.*

**Exercice 1 :** a) Exprimer la dimension d'une vitesse puis celle d'une force en fonction de $L$, $T$ et $M$ où $L$, $T$ et $M$ désignent les dimensions d'une longueur, d'un temps et d'une masse respectivement.

b) Considérons l'équation $x = at^2/2$, où $x$ est l'espace parcouru dans le temps $t$ par une particule qui part du repos avec l'accélération $a$. Vérifier l'homogénéité dimensionnelle de cette équation.

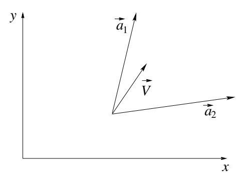
c) Si $\vec{F}$ désigne une force, $m$ une masse et $\vec{g}$ une accélération, lesquelles parmi les opérations suivantes sont possibles : $\vec{F} + \vec{\mathrm{g}}$, $\vec{F} + \mathrm{m}\vec{\mathrm{g}}$, $\vec{F} + \mathrm{mg}$.

d) Soient $P$ et $Q$ deux grandeurs physiques telles que $[P] \neq [Q]$ (dimensions différentes). Lesquelles parmi les opérations suivantes sont possibles : $P - Q$, $PQ$, $P - \sqrt{Q}$, $1 - P/Q$ ?

e) Les vecteurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ désignent des déplacements. Qu'est-ce qui est faux dans l'égalité suivante $\vec{d_1} + \vec{d_2} = 20$ mètres ?

**Exercice 2 :** Montrer que lorsque deux vecteurs non nuls $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont colinéaires (ou parallèles), ceci peut s'exprimer par la relation de proportionnalité : $\vec{V_1} = \alpha\vec{V_2}$ (ou $\vec{V_2} = \alpha'\vec{V_1}$), $\alpha$ et $\alpha'$ sont des réels.

**Exercice 3 :** La figure ci-contre montre trois vecteurs $\vec{V}$, $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ du plan $xy$. a) Décomposer graphiquement $\vec{V}$ suivant les axes $x$ et $y$. b) Projeter orthogonalement $\vec{V}$ sur $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. Noter que la somme des projections ne donnent pas $\vec{V}$ ! Pourqui ? c) Décomposer graphiquement $\vec{V}$ suivant les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. d) En vous aidant de l'exercice précédent, monter qu'on peut écrire : $\vec{V} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$, $\alpha$ et $\beta$ réels.




**Exercice 4 :** Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque. Démontrer que $\vec{V}^2 = |\vec{V}|^2$.

**Exercice 5 :** I) Représenter les points $A(5, 2)$ et $B(1, 4)$ dans un repère orthonormé $Oxy$. Montrer sur la figure l'angle (on le notera $\theta$) que fait le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec l'axe $x$.

II) Dessiner un triangle $ABC$. Montrer sur le dessin les angles $\theta_1 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\theta_2 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ et $\theta_3 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$. c) Montrer que $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\ BA\ BC \cos\hat{B}$ où $\hat{B}$ désigne l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Que vous rappelle ce résultat lorsque l'angle $\hat{B}$ vaut $\pi/2$ ?

**Exercice 6 :** a) Dessiner deux vecteurs quelconques $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ non nuls, non colinéaires et possédant la même origine. b) Représenter le vecteur-somme $\vec{V_s} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$. c) Dessiner le vecteur $\vec{V_d}$ qui part de l'extrémité de $\vec{V_2}$ et aboutit à l'extrémité de $\vec{V_1}$. Que représente $\vec{V_d}$ ?

**Exercice 7 :** $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs dont on connaît graphiquement la somme $\vec{a} + \vec{b}$ et la différence $\vec{a} - \vec{b}$. Trouver graphiquement $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

**Exercice 8 :** 1) Est-il possible d'avoir deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tels que $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ ? Si oui, l'illustrer à l'aide d'une figure. 2) Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont tels que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$. Quel est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ?

**Exercice 9 :** On donne deux vecteurs $\vec{A} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ? a) Calculer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$ puis les modules $|\vec{A}|$ et $|\vec{B}|$. En déduire le cosinus de l'angle $\theta$ entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$. b) Calculer $|\vec{A}| + |\vec{B}|$, $|\vec{A} + \vec{B}|$, $|\vec{A} - \vec{B}|$ et $|\vec{A}| - |\vec{B}|$.
c) Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$ ainsi que son mon module $|\vec{A} \times \vec{B}|$. Rappeler la définition du produit vectoriel et vérifier que $|\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$ reproduit la valeur du module calculé précédemment.
d) Trouver le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal au plan de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et formant un trièdre direct avec $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

**Exercice 10 :** Étant donné les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{5}}$ et $\vec{e}_2 = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$. a) Vérifier que ces deux vecteurs sont unitaires et orthogonaux. b) Trouver le vecteur $\vec{e}_3$ qui complète une base orthonormée *directe*.