TD n° 1 Solution —— Décembre 2020

Si vous voyez des coquilles (fautes de frappe ou erreurs typographiques, etc.), vous serez gentils de me les signaler.

Exercice 1 : a) Pour déterminer la dimension, on utilise les formules connues les plus simples. On a $v = dx/dt \rightarrow [v] = [x]/[t] = L/T$ ou LT^{-1} ; $a = dv/dt \rightarrow [a] = [v]/[t] = (L/T)/T = L/T^2$ ou LT^{-2} ; $F = ma$ $\rightarrow [F] = [m][a] = ML/T^2$ ou MLT^{-2}.

b) On vérifie que les deux membres de l'équation possède la même dimension. On a : $[x] = L$, $[at^2/2] = [a][t^2] = [a][t]^2 = (L/T^2)T^2 = L$ donc $[x] = [at^2/2]$, l'équation est homogène.

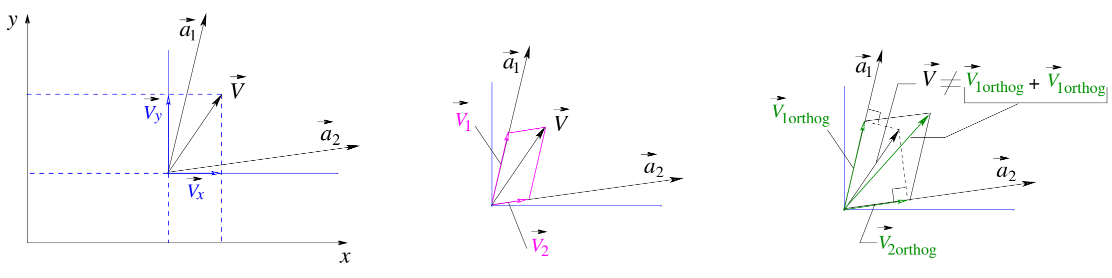
c) $\vec{F} + \vec{g} \rightarrow$ impossible car $\vec{F}$ et $\vec{g}$ n'ont pas la même dimension (on ne peut pas additionner deux grandeurs de dimensions différentes), $\vec{F} + m\vec{g} \rightarrow$ possible car $\vec{F}$ et $m\vec{g}$ sont deux vecteurs ayant la même dimension, $\vec{F} + mg \rightarrow$ impossible car $\vec{F}$ est un vesteur alors que mg est un scalaire (on ne peut pas additionner un vecteur et un scalaire).

d) $P - Q$: impossible car on ne peut pas additionner deux grandeurs de dimensions différentes.
PQ : possible (deux grandeurs physiques peuvent être multipliées même quand elles n'ont pas la même dimension, par exemple vt (vitesse fois le temps).
$P - \sqrt{Q}$ impossible car on ne peut pas additionner deux grandeurs de dimensions différentes. (possible si P et $\sqrt{Q}$ ont même dimension.
$1 - P/Q$: impossible car on ne peut pas additionner deux grandeurs de dimensions différentes. (possible si P et Q sont de même dimension)

e) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$ est un vecteur alors que 20 mètres est un scalaire. Un vecteur ne peut être égal qu'à un vecteur et un scalaire ne peut être égal qu'à un scalaire !

Exercice 2 : Pour fixer les idées on suppose que $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont de même sens. En définissant un vecteur unitaire $\vec{u}$ suivant $\vec{V}_1$, on peut écrire (i) $\vec{V}_1 = V_1\vec{u}$ et (ii) $\vec{V}_2 = V_2\vec{u}$. De (ii) on tire $\vec{u} = \vec{V}_2/V_2$ et alors $\vec{V}_1 = (V_1/V_2)\vec{V}_2 = \alpha\vec{V}_2$ avec $\alpha = (V_1/V_2)$. Inversement si on tire $\vec{u}$ de (i), on aura $\vec{u} = \vec{V}_1/V_1$ et alors $\vec{V}_2 = (V_2/V_1)\vec{V}_1 = (1/\alpha)\vec{V}_1$. Si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont de sens contraires, il y a un signe $-$ qui apparait dans le relation (ii), signe qui entraine le changement $\alpha = (-V_1/V_2)$. On retient que deux vecteurs (non nuls) colinéaires sont proportionnels et deux vecteurs proportionnels sont colinéaires.

Exercice 3 : a) et b) On décompose (figure ci-dessous) $\vec{V}$ suivant les axes x et y puis suivant les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ du plan xy. c) On projette orthogonalement $\vec{V}$ sur $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. Dans les situations a) et b) il est évident



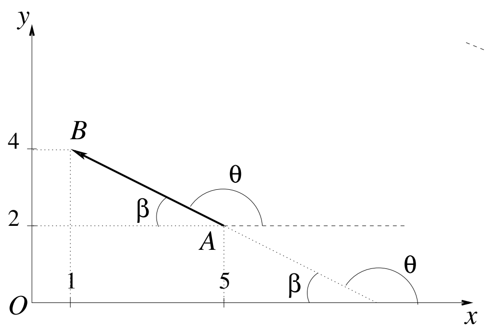
a) b) c)

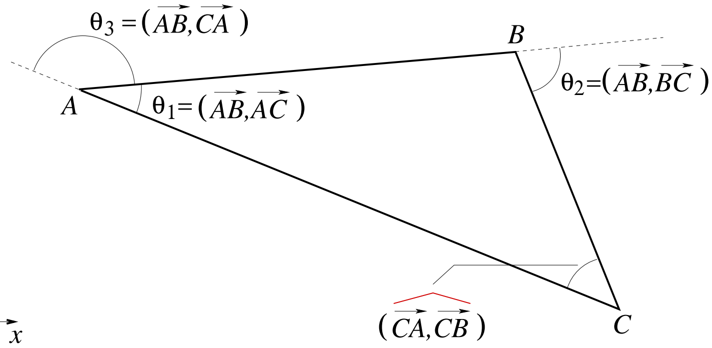
que $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$. Dans le cas c), $\vec{V} \neq \vec{V}_{1orthog} + \vec{V}_{2orthog}$ car la règle du parallélogramme n'est pas applicable entre les trois vecteurs. d) Puisque $\vec{V}_1 \parallel \vec{a}_1$ et $\vec{V}_2 \parallel \vec{a}_2$, on peut exprimer, d'après l'exercice 2, les relations de proportionalité : $\vec{V}_1 = \alpha\vec{a}_1$ et $\vec{V}_2 = \beta\vec{a}_2$, α et β réels. On peut donc écrire : $\vec{V} = \alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2$.
Deux choses à retenir ici : 1) Dans un plan, un vecteur peut toujours se décomposer suivant deux vecteurs non colinéaires. 2) Un vecteur qui s'écrit comme une combinaison de 2 vecteurs non colinéaires est forcément

dans le plan de ces deux vecteurs. Remarque : On sait que le produit mixte de 3 vecteurs coplanaires est nul ; on peut le vérifier pour $\vec{V}$, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_1$.

Exercice 4 : On utilise la définition du produit scalaire entre deux vecteurs : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1||\vec{V}_2|\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$. Quand $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{V}$, l'équation précédente devient : $\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}||\vec{V}|\cos(0)$, soit $\vec{V}^2 = |\vec{V}|^2$, CQFD. On peut tout aussi bien utiliser l'expression analytique du produit scalaire pour démontrer ce résultat.

Exercice 5 : I. On représente les points $A(5, 2)$ et $B(1, 4)$ dans un repère orthonormé Oxy. L'angle que





$\overrightarrow{AB}$ fait avec l'axe x est θ. Attention ! Si vous répondez β, c'est faux. On peut aussi voir θ comme l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec une parallèle à l'axe x, en particulier avec celle passant par A.

II. Montrons que $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\ BA\ BC \cos\widehat{B}$ où $\widehat{B} = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 \Longrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \Longrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. Le produit scalaire s'écrit : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB\,BC\ \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = AB\,BC\ \cos(\pi - \hat{B}) = -AB\,BC\ \cos\hat{B}$ et finalement $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\ BA\ BC \cos\hat{B}$, CQFD.

Exercice 5 : Soient $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 3.5\vec{j}$ et $\vec{V}_2 = \vec{i} - 3\vec{j}$. Calculer la somme $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$
$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2 + 1)\vec{i} + (3.5 - 3)\vec{j} = 3\vec{i} + 0.5\vec{j}$; $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (2 \times 1) + (3.5 \times (-3)) = 2 - 10.5 = -8.5$; $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 2\vec{i} \times \vec{i} + 2\vec{i} \times [-3\vec{j}] + 3.5\vec{j} \times \vec{i} + 3.5\vec{j} \times [-3\vec{j}] = -6\vec{k} - 3.5\vec{k} = -9.5\vec{k}$. On peut aussi utiliser les déterminants : $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3.5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (-6 - 3.5)\vec{k} = -9.5\vec{k}$

Exercice 6 : On dessine $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_s$ et $\vec{V}_d$. Sur la figure on voit que $\vec{V}_2 + \vec{V}_d = \vec{V}_1$, soit $\vec{V}_d = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$. Donc

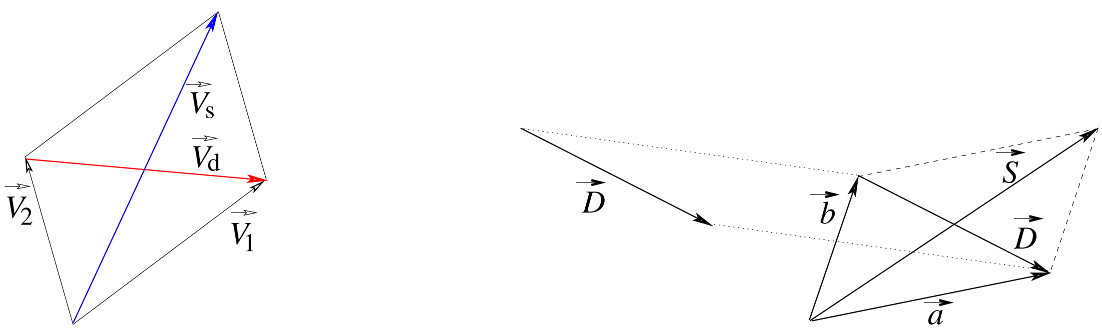


FIGURE 1 – figure de gauche : exercice 6, figure de droite : exercice 7

$\vec{V}_d$ représente la différence $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$.

Exercice 7 : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs dont on connaît graphiquement la somme $\vec{S}$ et la différence $\vec{D}$. Trouver graphiquement $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
On ramène les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{D}$ de manière à ce qu'ils se coupent en leur milieu. Puis on trace le parallélogramme ayant $\vec{S}$ et $\vec{D}$ pour diagonales.

Exercice 8 : Est-il possible d'avoir deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tels que $|\vec{v}_1+\vec{v}_2| = |\vec{v}_1-\vec{v}_2|$? Si oui, l'illustrer à l'aide d'une figure.
$|\vec{v}_1+\vec{v}_2| = |\vec{v}_1-\vec{v}_2| \Longrightarrow |\vec{v}_1+\vec{v}_2|^2 = |\vec{v}_1-\vec{v}_2|^2 \Longrightarrow v_1^2+v_2^2+2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = v_1^2+v_2^2-2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \Longrightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = -\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \Longrightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0 \Longrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.

Exercice 9 : On donne deux vecteurs $\vec{A} = 4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{B} = \vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$? a) Calculer le produit scalaire $\vec{A}\cdot\vec{B}$ puis les modules $|\vec{A}|$ et $|\vec{B}|$. En déduire le cosinus de l'angle θ entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$. b) Calculer $|\vec{A}|+|\vec{B}|$, $|\vec{A}+\vec{B}|$, $|\vec{A}-\vec{B}|$ et $|\vec{A}|-|\vec{B}|$.
c) Calculer le produit vectoriel $\vec{A}\times\vec{B}$ ainsi que son mon module $|\vec{A}\times\vec{B}|$. Rappeler la définition du produit et vérifier que $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ reproduit la valeur du module calculé précédemment.
d) Trouver le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal au plan des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et qui forme un trièdre direct avec $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

a) $\vec{A}\cdot\vec{B} = (4\times1)+(1\times2)+(1\times(-2)) = 4$. $|\vec{A}| = \sqrt{4^2+1^2+1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|\vec{B}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$.
b) $|\vec{A}|+|\vec{B}| = 3\sqrt{2}+3 = 3(\sqrt{2}+1)$, $|\vec{A}+\vec{B}| = |(4+1)\vec{i}+(1+2)\vec{j}+(1-2)\vec{k}| = |5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}| = \sqrt{5^2+3^2+1^2} = \sqrt{35}$, $|\vec{A}-\vec{B}| = |(4-1)\vec{i}+(1-2)\vec{j}+[1-(-2)]\vec{k}| = |3\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}| = \sqrt{3^2+1^2+3^2} = \sqrt{19}$, $|\vec{A}|-|\vec{B}| = 3\sqrt{2}-3 = 3(\sqrt{2}-1)$
On déduit le cosinus de la relation de définition
$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \to \cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{B} \div (|\vec{A}|\,|\vec{B}|) = \frac{4}{9\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

c) $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i}+9\vec{j}+7\vec{k}$. $|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(-4)^2+9^2+7^2} = \sqrt{146}$. Le produit vectoriel est par définition donné par : $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et orienté suivant l'avancement d'une vis lorsqu'on la tourne de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$. Donc $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ n'est autre que le module de $\vec{A}\times\vec{B}$ et doit reproduire la valeur calculée précédemment. Vérifions-le. Pour cela calculons d'abord $\sin\theta$: On sait que $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1 \to \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(2\sqrt{2}/9)^2} = \sqrt{73}/9$. Il vient : $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = 3\sqrt{2}\times3\times\sqrt{73}/9$, ce qui donne bien $\sqrt{146}$.
d) Le vecteur $\vec{n}$ est simplement le vecteur unitaire normal introduit dans la définition du produit vectoriel (voir précédemment), donc $\vec{n} = A\times\vec{B}/|A\times\vec{B}| = (-4\vec{i}+9\vec{j}+7\vec{k})/\sqrt{146}$

Exercice 10 : Étant donné les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{2\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{5}}$ et $\vec{e}_2 = \frac{\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{6}}$. a) Vérifier que ces deux vecteurs sont unitaires et orthogonaux. b) Trouver le vecteur $\vec{e}_3$ qui complète une base orthonormée *directe*.

a) On a : $|\vec{e}_1|^2 = (4+1)/5 = 1$, $|\vec{e}_2|^2 = (1+4+1)/6 = 1$ et $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = (2\times1-1\times2+0\times1)/(\sqrt{5}\sqrt{6}) = 0$, donc $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont unitaires et orthogonaux.
b) $\vec{e}_3 = \vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k})$. Sachant que ce vecteur doit être unitaire et orthogonal $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, l'étudiant doit penser à vérifier (souvent la vérification peut se faire mentalement) que $|\vec{e}_3|^2 = 1$, $\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 = 0$ et $\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 = 0$. S'il ne trouve pas ce qu'il faut, cela veut dire que son résultat contient des erreurs et il doit le réviser.