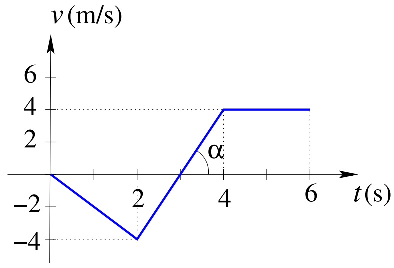
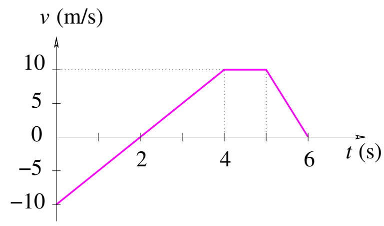
TD n° 2 —— Octobre 2023 (3 séances)

Exercice 1 :
À partir du graphe ci-contre représentant la vitesse v d'une particule en mouvement rectiligne en fonction du temps t, trouver : a) le ou les temps où la vitesse s'annule ; b) à quel instant, le cas échéant, la particule inverse le sens de son mouvement ; c) l'accélération moyenne entre $t = 1\,\text{s}$ et $t = 4\,\text{s}$; d) l'accélération instantanée à $t = 3\,\text{s}$, $t = 3.5\,\text{s}$ et à $t = 5\,\text{s}$.



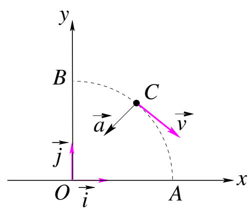
Solution : a) La vitesse s'annule à $t = 0\,\text{s}$ et $t = 3\,\text{s}$. b) La particule inverse le sens de son mouvement à $t = 3\,\text{s}$ (car elle s'annule en passant de $-$ à $+$). c) $a_{moy} = \Delta v/\Delta t = (v(4) - v(1))/(4-1) = (4-(-2))/3 = 6/3 = 2\,\text{m/s}^2$. d) L'accélération à un intant t quelconque est donnée par la pente de $v(t)$ à l'instant t. Cette pente est donnée par $\tan\alpha$, donc, l'accélération a à $t = 3\,\text{s}$ vaut (voir figure) $a = \tan\alpha =$ côté opposé/côté adjacent $= 4/1 = 4\,\text{m/s}^2$.

Exercice 2 : Trouver à partir du graphe $v(t)$ ci-contre : a) le vecteur vitesse moyenne entre $t = 0\,s$ et $t = 6\,s$. b) la vitesse scalaire moyenne pour le même intervalle de temps. La *vitesse scalaire* moyenne est définie comme la distance parcourue divisée par le temps mis pour la parcourir.



Solution : On sait que $v_{moy} = \Delta x/\Delta t$. Mais attention, ici on vous demande d'utiliser le graphique ci-contre donnant v en fonction de t. a) On sait que pour avoir x il faut intégrer v. Sur le graphe, l'intégrale est donnée par l'aire (algébrique) de la surface comprise entre la courbe $v(t)$ et l'axe des t. L'aire vaut -10 entre $t = 0$ et $t = 2$; $+10$ entre $t = 2$ et $t = 4$; $+10$ entre $t = 4$ et $t = 5$; $+5$ entre $t = 5$ et $t = 6$. Donc, entre $t = 0$ et $t = 6$, le déplacement est $\Delta x = -10 + 10 + 10 + 5 = 15$ et $v_{moy} = 15/6 = 2.5\,\text{m/s}$. Pour la distance totale parcourue d, il faut prendre chaque parcourt effectuté en valeur absolue, ce qui donne entre $t = 0\,\text{s}$ et $t = 6\,\text{s}$ $d = |-10| + |+10| + |+10| + |+5| = 35\,\text{m}$. La vitesse scalaire moyenne est donc $v_{scalmoy} = 35/6 = 5.83\,\text{m/s}$.

Exercise 3 : A particle covers a quarter circle, of radius $r = 5\,\text{m}$, in 5 seconds (see Figure 3 above). Initially, the particle is in B. a) What is the covered distance ? b) What is the covered displacement ? c) What is the average speed ? d) What is the average velocity ? e) Draw the velocity at point C. f) Sketch the acceleration at point C.



Solution : a) The covered distance is equal to the length of the arc $\overset{\frown}{BA}$, that is : $r \times \pi/2 = 5 \times 3.14/2 = 7.85\,\text{m}$. b) The covered displacement is juste equal to $\overrightarrow{BA}$, that is : $\overrightarrow{BA} = 5\,\vec{i} - 5\,\vec{j}$. c) The average speed is distance over time, i.e. : $7.85\,\text{m}/5\,\text{s} = 1.57\,\text{m/s}$. The average velocity is displacement over time, i.e. : $\vec{v}_{av} = \overrightarrow{BA}/\text{time} = (5\,\vec{i} - 5\,\vec{j})/5 = (\vec{i} - \vec{j})\,\text{m/s}$. e) $\vec{v}_C$ is tangent to the arc in the direction of motion. f) $\vec{a}_C$ is directed to the interior of concavity.

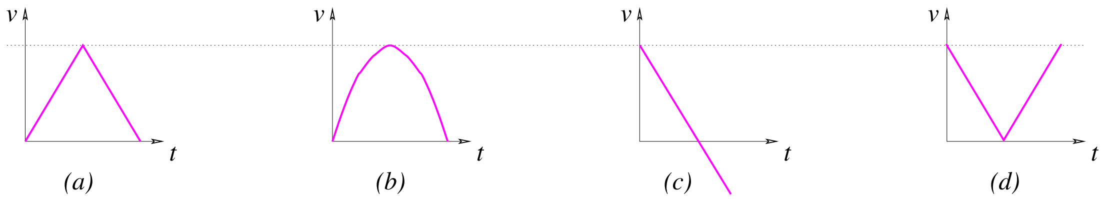
Exercice 4 : On laisse tomber à l'instant $t_0 = 0$, sans vitesse initiale, une pierre dans un puits de $490\,\text{m}$ de profondeur. 1) Calculer la vitesse avec laquelle la pierre atteint le fond du puits. 2) Sachant que la vitesse du son dans l'air est de $340\,\text{m/s}$, au bout de combien de temps, après avoir lâché la pierre, entend-t-on le bruit de l'impact au fonds du puits ? Prendre $g = 9.8\,\text{m/s}^2$.

Rép. : 1. La pierre atteint le fond à la vitesse de $98\,\text{m/s}$, 2. On entend le bruit de l'impact après $11.44\,\text{s}$.

Exercice 5 : On lance une balle du toit d'un bâtiment haut de 44 m avec une vitesse initiale v_0 orientée suivant un angle θ au-dessous de l'horizontale. La balle atterrit 2 s plus tard, le point d'impact est situé à 32 m de la base du bâtiment. Trouvez θ et v_0. Prendre g $= 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

Solution : On a : $v_0 \cos\theta \times 2 = 32 \implies v_0 \cos\theta = 16(i)$ et $0 = -9.8 \times 2^2/2 - v_0 \sin\theta \times 2 + 44 \implies v_0 \sin\theta = 12.2(ii)$. (ii)/(i) $\implies \tan\theta = (12.2/16) \implies \theta = 37.3°$ au-dessous de l'horizontale. (i) $\implies v_0 = 16/\cos 37.3 = 20.1$m.

Exercice 6 : Une bille est lancée verticalement vers le haut, elle monte jusqu'à une hauteur maximale puis elle retombe au sol. Lequel des graphes ci-dessous représente le mieux la variation de sa vitesse en fonction du temps ? Justifier.



Solution : Une fois lancée (avec une vitesse initiale v_0), la vitesse de la bille s'écrit : $v(t) = -gt + v_0$. Si on dessine la courbe $v(t)$ on obtiendra quelque chose de similaire au graphe (c). Le graphe (c) est donc celui qui représente le mieux la courbe de variation de $v(t)$.

Exercice 7 : La position d'un point M au court du temps, dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est donnée par : $\vec{r} = \vec{i} + 4t^2\vec{j} + t\vec{k}$. a) Exprimer la vitesse et l'accélération de M en fonction du temps dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. b) Quelle est la forme de la trajectoire de M ?

Solution : On a : $\vec{r} = \vec{i} + 4t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k} \quad \to$ a) $\vec{v} = d\vec{r}/dt = 8t\,\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{a} = d\vec{v}/dt = 8\,\vec{j}$.
b) Le vecteur $\vec{r}$ s'écrit $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ avec $x = 1, y = 4t^2$ et $z = t$. On élimine t et on obtient : $x = 1$ et $y = 4z^2$. C'est une parabole située dans le plan $x = 1$, de sommet $(x = 1, y = 0, z = 0)$ et qui a pour axe la droite $(z = 0$ et $x = 1)$.

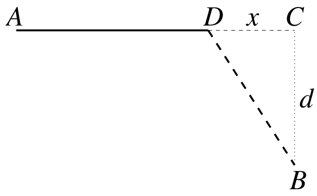
Exercice 8 : Une camionnette file en ligne droite dans le sens ouest-est à $v_1 = 90$ km/h. Soudain, elle entame une phase de décélération constante (freinage) sur une distance de 80 m faisant réduire sa vitesse à $v_2 = 54$ km/h. a) Exprimer v_1 et v_2 en m/s. b) Calculer sur cette phase la grandeur et la direction de l'accélération ? c) Calculer la durée de la décélération. d) En supposant que la camionnette continue avec la même décélération au delà des 80 m, quel temps et quelle distance lui seront nécessaires pour s'immobiliser complètement ?

Solution : a) $v_1 = 90 \times 1000/3600\,\mathrm{m/s} = 25\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 54 \times 1000/3600\,\mathrm{m/s} = 15\,\mathrm{m/s}$.
b) $v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \implies a = (v_2^2 - v_1^2)/[2(x_2 - x_1)] \to a = (15^2 - 25^2)/(2 \times 80) = (225 - 625)/160 = -2.5\,\mathrm{m/s^2}$. L'accélération a une grandeur de 2.5 $\mathrm{m/s^2}$, son signe $-$ indique qu'elle a un sens opposé à celui de la vitesse (ce qui est normal puisque c'est une phase de décélération). c) Si t_1 et t_2 désignent le début et la fin de la phase de décélération, la durée de la décélération est $\Delta t_{21} = t_2 - t_1$. On sait que durant cette phase la vitesse de la camionnette est donnée par (voir cours : mouvement rectiligne uniformément décéléré) : $v = a(t - t_1) + v_1$. On a alors : $v_2 = a(t_2 - t_1) + v_1 = a\Delta t_{21} + v_1 \implies \Delta t_{21} = (v_2 - v_1)/a$ soit, $\Delta t_{21} = (15 - 25)/(-2.5) = (-10)/(-2.5) = 4\,\mathrm{s}$

d) On va considérer la phase allant de t_2 jusqu'à l'instant $t = t_3$ où la comionnette s'immobilise complètement

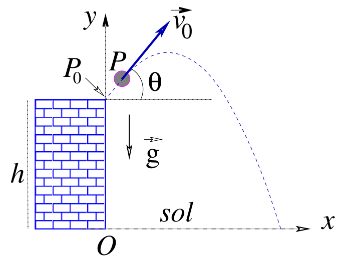
($v(t_3) = 0$). Puisque la décélération est la même que dans la phase précédente, on a : $0^2 - v_2^2 = 2a(x_3 - x_2)$, x_3 désigne la position de la comionnette au temps t_3. La distance qui lui est nécessaire pour s'immobiliser complètement est donc : $\Delta x_{32} = (x_3 - x_2) = -v_2^2/2a = -15^2/(2 \times -2.5) = 45\,\mathrm{m}$. Durant cette phase la vitesse s'écrit : $v = a(t - t_2) + v_2$. Cette vitesse s'annule à $t = t_3$: $0 = a(t_3 - t_2) + v_2$. Le temps nécessaire à la comionnette pour s'immobiliser complètement est donc $\Delta t_{32} = (t_3 - t_2) = v_2/(-a) = 15/2.5 = 6\,\mathrm{s}$.

Exercice 9 : Un tracteur agricole part d'un point A situé sur une route droite pour se rendre en un point B situé dans un champ à la distance $d = CB$ de la route, figure ci-contre.
En quel point D (autrement dit à quelle distance $DC = x$) l'engin doit-il quitter la route pour effectuer le trajet ADB dans un temps minimal ? Les trajets AD et DB sont supposés rectilignes et parcourus à vitesse constante par l'engin qui va deux fois moins vite dans le champ que sur la route.



Solution : Le tronçon AD est parcouru avec la vitesse $2v$ en un temps $t_1 = (AC - x)/2v$. Le tronçon DB est parcouru avec la vitesse v en un temps $t_2 = DB/v = \sqrt{x^2 + d^2}/v$. Il faut trouver le minimum de $t_1 + t_2$ par rapport à x. On doit avoir pour cela : $\frac{d(t_1+t_2)}{dx} = 0$. Calculons cette dérivée : $\frac{d(t_1+t_2)}{dx} = \frac{dt_1}{dx} + \frac{dt_2}{dx} = \frac{-1}{2v} + \frac{1}{2v}\frac{2x}{\sqrt{x^2+d^2}}$. L'égalisation à 0 du résultat précédent conduit à : $2x = \sqrt{x^2 + d^2} \implies 4x^2 = x^2 + d^2 \implies 3x^2 = d^2 \implies x = \pm d/\sqrt{3}$. Sachant que x est une distance (une distance est positive par définition), on rejette la solution négative et on a donc $x = d/\sqrt{3}$.

Exercice 10 : On lance à $\theta = 30°$ de l'horizontale, du toit d'un bâtiment haut de $h = 16$ m, un projectile P avec une vitesse $v_0 = 21$ m/s. On ignore la résistance de l'air.
a) Exprimer à un instant t quelconque le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ du projectile en fonction de $\vec{v}_0$ et de l'accélération $\vec{g}$ de la pesanteur. En déduire que le mouvement du projectile se fait dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$. b) Calculer le temps d'envol. Prendre $g = 9.8\,m/s^2$. c) Trouver la portée horizontale P du mouvement. d) Calculer la hauteur maximum atteinte par rapport au sol. e) Calculer la vitesse quand le projectile se trouve à 2 m au-dessus de l'immeuble. f) Calculer l'angle sous lequel le projectile frappe le sol.



Solution : a) Par rapport au point de lancement P_0, la position du projectile P est donnée par $\overrightarrow{P_0P}$. Si on néglige la résistance de l'air, le projectile, une fois lancé, n'est soumis qu'à l'accélération $\vec{g}$ de la pesanteur. Donc $\vec{a} = \vec{g}$. Il s'ensuit que

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t \tag{1}$$
$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 \tag{2}$$

Le cours sur les vecteurs nous a appris que quand un vecteur s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires, il est forcément dans le plan formé par ces deux vecteurs. Donc $\overrightarrow{P_0P}$ est, à chaque instant, dans le plan de $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$, autrement dit, le mouvement du projectile P s'effectue dans le plan $(\vec{v}_0, \vec{g})$, qu'on va appeler dans la suite le plan Oxy, l'origine O est au niveau du sol et Oy contient P_0 (voir figure).
b) Par rapport au repère Oxy, la position du projectile est : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$. En

projetant sur les axes x et y on a :

$$
\begin{aligned}
x &= v_0 \cos\theta \, t && (3)\\
y &= h + v_0 \sin\theta \, t - \frac{1}{2}\mathrm{g}\, t^2 && (4)
\end{aligned}
$$

L'envol se termine quand P arrive au sol, c'est-à-dire quand $y = 0$. On a alors

$$16 + 10.5t - 4.9t^2 = 0 \Longrightarrow t_{\text{envol}} = \frac{-10.5 \pm \sqrt{10.5^2 - 4 \times (-4.9) \times 16}}{2 \times (-4.9)} = 3.17\,\mathrm{s};\ -1.03\,\mathrm{s} \quad (5)$$

On obtient deux solutions, une solution positive et une solution négative. La solution négative est physiquement rejetée car, après l'instant de lancement choisi comme origine des temps, t ne peut être que positif. Donc $t_{\text{envol}} = 3.17\,\mathrm{s}$.

c) La portée horizontale R est donnée par la distance parcourue suivant x durant le vol :

$$R = v_0 \cos\theta \, t_{\text{envol}} = 21 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3.17 = 57.7\,\mathrm{m}. \quad (6)$$

d) Quand P atteint sa hauteur maximale $h_{\max}$, sa vitesse suivant y s'annule. Pour calculer $h_{\max}$, on peut calculer le temps où $v_y = 0$, puis rempacer dans l'équation (4). Mais on peut faire plus simplement et plus rapidement en utilisant la relation (qui ne fait pas intervenir explicitement le temps t) entre le point de lancement et le sommet de la trajectoire : $0^2 - (v_0 \sin\theta)^2 = -2\mathrm{g}(h_{\max} - h)$ d'où l'on tire

$$h_{\max} = h + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2\mathrm{g}} = 16 + \frac{(21 \times 0.5)^2}{2 \times 9.8} = 16 + 5.6 = 21.6\,\mathrm{m}$$

e) La vitesse suivant x ne change pas et vaut à chaque instant $v_x = v_0 \cos\theta = 21 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18.2\,\mathrm{m}$. La vitesse v_y quand le projectile se trouve à 2 m (c'est-à-dire à $y = h + 2 = 16 + 2 = 18\,\mathrm{m}$) au-dessus du toit est donnée par l'équation :

$$v_y^2 - (v_0 \sin\theta)^2 = -2\mathrm{g}(18 - 16) = -4\mathrm{g} \Longrightarrow v_y = \pm\sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 - 4\mathrm{g}} = \pm\sqrt{10.5^2 - 4 \times 9.8} = \pm 8.4\,\mathrm{m}. \quad (7)$$

Il y a deux solutions pour v_y. Les deux sont valables, le projectile monte à 2 m au-dessus du toit, continue jusqu'au sommet de sa trajectoire et redescend pour se retrouver une deuxième fois à 2 m au-dessus de l'immeuble. Ceci mène donc à deux solutions pour la vitesse : $\vec{v}_1 = 18.2\vec{i} + 8.4\vec{j}$ et $\vec{v}_2 = 18.2\vec{i} - 8.4\vec{j}$. *Le projectile revient à la même hauteur avec la même vitesse (en module).*

f) Si $v_{x\text{sol}}$ et $v_{y\text{sol}}$ désignent les composantes de la vitesse au moment où P touche le sol, l'angle α entre $\vec{v}$ et l'axe x est tel que : $\tan\alpha = v_{y\text{sol}}/v_{x\text{sol}}$. Sachant $v_y = v_0 \sin\theta - \mathrm{g}t$, il vient $v_{y\text{sol}} = v_0 \sin\theta - \mathrm{g}t_{\text{envol}} = 10.5 - 9.8 \times 3.17 = -20.6\,\mathrm{m} \rightarrow \tan\alpha = -20.6/18.2 = -1.13$, ce qui donne $\alpha = -48.5°$, autrement dit, 48.5° en dessous de l'axe horizontal x.

Exercice 12 : Deux voitures A et B roulent, l'une vers l'autre, sur une même voie rectiligne, à des vitesses de 16 m/s et 8 m/s respectivement. Lorsqu'elles sont à 45 m l'une de l'autre, les deux conducteurs actionnent les freins. Les deux voitures décélèrent alors au taux de 2 m/s^2 pour A et de 4 m/s^2 pour B. a) Quand et où les deux voitures entrent en collision ? b) Si la voiture A pouvait freiner plus fortement, quelle devrait être la décélération minimale qui éviterait la collision ? c) Dans les mêmes conditions de vitesse et de décélération qu'en a), quelle distance minimale est nécessaire entre les deux voitures au moment où on actionne les freins pour qu'il n'y ait pas collision ?

On désigne la voie rectiligne par un axe $x'x$ orienté vers la droite. Prenons pour instant initial $t = 0$, l'instant où les deux conducteurs actionnent les freins et où les deux voitures sont à 45 m l'une de l'autre et choisissons la position de la voiture A à $t = 0$ comme origine de $x'x$. Les conditions initiales sont alors : $x_{0A} = 0$, $x_{0B} = 45\text{m}$, $v_{0A} = 16\text{m/s}$, $v_{0B} = -8\text{m/s}$, $a_A = -2\text{m/s}^2$, $a_B = +4\text{m/s}^2$ et les équations horaires s'écrivent : $x_A = 16t - t^2$ (i) et $x_B = 45 - 8t + 2t^2$ (ii). a) Quand et où les deux voitures entrent en collision ? Elles entrent en collision quand $x_A = x_B$. Cette égalité mène à l'équation $3t^2 - 24t + 45 = 0$ (E) qui fournit deux racines : $t = 3\text{s}$ et $t = 5\text{s}$. Laquelle des deux correspond au temps où les deux voitures entrent en collision ? Les données du problèmes indiquent que la collision aura lieu quelque part entre x_{0A} et x_{0B}. Pour $t = t_2 = 5$, on a : $x_A = x_B = 55$, ce qui signifierait que les voitures entrent en collision à l'extérieur du segment $[x_{0A}, x_{0B}]$, en contradiction avec les données du problème. Donc, la collision ne peut pas avoir lieu à $t = t_2 = 5$. Pour $t = t_1 = 3$, on a : $x_A = x_B = 39$. Cette position se trouve dans le segment $[x_{0A}, x_{0B}]$ et on peut être tenté de conclure que la collision à lieu à $t = 3\,\text{s}$ et à $x = 39\,\text{m}$.
En fait, aucune des deux racines n'est la solution ; le raisonnement précédent n'est pas rigoureux. Pourquoi ? Il faut être prudent et bien observer le mouvement des deux voitures quand on résout le problème. En réalité, en décélérant au taux de 4 m/s^2 la vitesse de la voiture B va décroître jusqu'à s'annuler au temps t_b tel que : $v_B = -8 + 4t_b = 0 \implies t_b = 2\,\text{s}$. À ce moment-là, la voiture B se trouve à (d'après l'équation (ii)) l'arrêt à $x_B = 37\,\text{m}$ pendant que la voiture A roule toujours. La voiture B restera là jusqu'à ce que la voiture A vienne la percuter. L'équation à résoudre est donc $16t - t^2 = 37$ et non l'équation (E) ! !. On obtient les racines $t = 2.8\,\text{s}$ et $t = 13.2\,\text{s}$. La collision aura lieu à $t = 2.8\,\text{s}$ et à $x = 37\,\text{m}$. On rejette $t = 13.2\,\text{s}$ car la collision n'a lieu qu'une seule fois.

b) B étant déjà à l'arrêt à la position $x_B = 37\,\text{m}$, pour éviter la collision, la voiture A doit freiner avec une décélération a_A tel qu'elle puisse s'arrêter, à instant t_a, avant de toucher la voiture B : $16t_a + a_A t_a^2/2 \leq 37$ (iii) et $16 + a_A t_a = 0$ (iv). De (iv), on tire $t_a = -16/a_A$ et par substitution dans (iii) on obtient : $a_A \leq -16^2/(2 \times 37) \approx -3.46\text{m/s}^2$. La décélération minimale doit être de 3.46m/s^2.

c) À partir du moment où les freins sont actionnés, la voiture A roule (s'il n'y a pas d'obstacle) jusqu'à s'immobiliser : $v_A = 16 - 2t_c = 0 \implies t_c = 8\,\text{s}$ et aura alors parcouru une distance de $x_A = 16 \times 8 - 8^2 = 64\,\text{m}$ pendant que B aura parcouru $|x_B(t_b) - x_{0B}| = 8\,\text{m}$ dans le sens opposé avant de s'immobiliser. Pour éviter la collision, la distance minimale doit être de $64 + 8 = 72\,\text{m}$.

Exercice 12 : On considère l'hélice circulaire d'équations paramétriques $(x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta,\ z = h\theta)$, où R et h sont des constantes positives et θ est l'angle entre Ox et $\overrightarrow{Om}$, m étant le projeté orthogonal du point (x, y, z) sur le plan (xy). a) Par un calcul similaire à celui de l'exercice précédent, montrer que le rayon de courbure en n'importe quel point de l'hélice vaut $\rho = R(1 + h^2/R^2)$. b) Calculer la longueur de l'arc d'hélice compris entre θ et $\theta + \pi$.

Solution : Le rayon de courbure, voir le cours, s'écrit :$\rho = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}}{[(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})^2+(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})^2+(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})^2]^{1/2}}$.
Calculons :
$\dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta, \quad \ddot{x} = -R\dot{\theta}^2\cos\theta - R\ddot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{x}^2 = R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$
$\dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta, \quad \ddot{y} = -R\dot{\theta}^2\sin\theta + R\ddot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{y}^2 = R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$
$\dot{z} = h\dot{\theta}, \quad \ddot{z} = h\ddot{\theta}, \quad \dot{z}^2 = h^2\dot{\theta}^2$
$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2} = \dot{\theta}^3(R^2 + h^2)^{3/2}$
$[(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2)]^{1/2} = R^2\dot{\theta}^3[1 + h^2R^2\theta^6]^{1/2} = \theta^3R(R^2 + h^2)^{1/2}$

$$\rho = \frac{\dot{\theta}^3 (R^2 + h^2)^{3/2}}{\theta^3 R (R^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{(R^2 + h^2)}{R} = R\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)$$

On obtient une constante : le rayon de courbure de l'hélice circulaire est le même en tous les point de l'hélice.

b) Entre l'arc élémentaire ds et le module v de la vitesse, on a la relation (voir le cours) : $v = ds/dt$. On tire $ds = vdt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt = \sqrt{R^2 + h^2}\dot{\theta}dt = \sqrt{R^2 + h^2}d\theta \implies s = \int_{\theta}^{\theta+\pi} \sqrt{R^2 + h^2}d\theta = \pi\sqrt{R^2 + h^2}$, soit encore $s = \pi R\sqrt{1 + h^2/R^2}$.