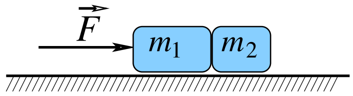
TD n° 3 ——— Novembre 2022

Question : Deux masses sphériques de même volume, l'une pesant 1 kg et l'autre 100 kg sont lâchées d'une même hauteur au même instant sans vitesse initiale. Laquelle des deux masses touchera le sol la première. On négligera la résistance de l'air.

SOLUTION : Elles toucheront le sol <u>en même temps</u> car si on néglige la résistance de l'air, les deux masses seront soumises uniquement à la pesanteur et auront la même accélération $\vec{g}$. Et puisqu'elles sont lâchées sans vitesse initiales, elles auront aussi la même vitesse à chaque instant. Étant parties d'une même hauteur, elles vont être côte à côte (جنبا إلى جنب) à chaque instant et vont donc arriver au sol en même temps. Autrement dit, si on néglige la résistance de l'air, la valeur de la masse n'affecte pas le mouvement.

Exercice 1 : Deux masses m_1 et m_2 sont disposées sur un plan horizontal sur lequel elle peuvent glisser sans frottement (figure ci-contre). Une force horizontale $\vec{F}$ est appliquée à m_1. Exprimer en fonction des données



a) la force nette (la résultante) exercée sur l'ensemble $[m_1 + m_2]$.
b) la force exercée par m_1 sur m_2.
c) la force exercée par m_2 sur m_1.
d) la force exercée par m_1 sur le sol.

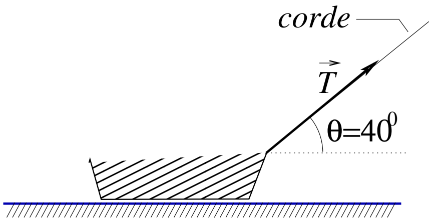
SOLUTION : a) Les forces appliquées au système $[m_1 + m_2]$ sont : $\vec{F}$, $m_1\vec{g}$ (poids de m_1), $m_2\vec{g}$ (poids de m_2), $\vec{R}_1$ (réaction du plan sur m_1) et $\vec{R}_2$ (réaction du plan sur m_2). L'absence de mouvement vertical fait que $m_1\vec{g}$ et $\vec{R}_1$ se compensent de même que $m_2\vec{g}$ et $\vec{R}_2$. La force nette (la résultante) exercée sur l'ensemble $\{m_1 + m_2\}$. Seule la force $\vec{F}$ subsiste qui est donc la force nette exercée sur l'ensemble $\{m_1 + m_2\}$.

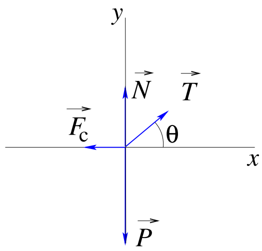
b) Les forces agissant sur m_2 sont : $\vec{F}_{1/2}$ (la force exercée par m_1), $m_2\vec{g}$ et $\vec{R}_2$. La résultante est $\vec{F}_{1/2}$ puisque $m_2\vec{g}$ et $\vec{R}_2$ se compensent. Si $\vec{a}$ désignent l'accélération de l'ensemble $\{m_1+m_2\}$, le PFD appliqué à $\{m_1+m_2\}$ donne $\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a}$ (i). D'autre part, le PFD appliqué séparément à m_2 s'écrit $\vec{F}_{1/2} = m_2\vec{a}$ (ii). De (i) on tire $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{(m_1+m_2)}$ et par substitution dans (ii), on obtient $\vec{F}_{1/2} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\vec{F}$.

c) La force exercée par m_2 sur m_1 est, d'après le principe des actions réciproques, $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$. Soit $\vec{F}_{2/1} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\vec{F}$. (Notez que ce résultat peut être retrouvé en appliquant le PFD à m_1.)

d) Le sol exerce sur m_1 la force verticale $\vec{R}_1$. Donc, d'après le principe des actions réciproques, m_1 exerce sur le sol la force $\vec{F}_{1/s} = -\vec{R}_1$. Mais puisque $\vec{R}_1 + m_1\vec{g} = \vec{0}$, il vient $-\vec{R}_1 = m_1\vec{g}$ et par suite $\vec{F}_{1/s} = m_1\vec{g}$.

Exercice 2 :
Un traîneau de 8 kg est tiré à *vitesse constante* à l'aide d'une corde sur un plan horizontal. Quelle force T exerce-t-on sur le traîneau si le coefficient de frottement cinétique μ_c vaut 0.20 et la corde fait un angle $\theta = 40°$ avec le plan ? Pour l'accélération de la pesanteur, prendre $g = 9.8\,\text{m/s}^2$.





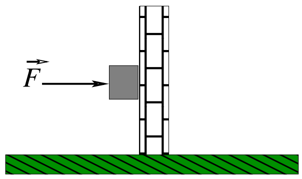
SOLUTION : Les forces agissant sur le traîneau sont (figure de droite ci-dessus) : son poids $\vec{P}$, la traction $\vec{T}$, la force de frottement cinétique $\vec{F}_c$ et la force normale exercée par le plan. Le traîneau n'étant pas accéléré, la deuxième loi de Newton projetée sur les axes donne : $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$, soit, $T\cos\theta - F_c = 0$ et $T\sin\theta + N - P = 0$. On sait que $F_c = \mu_c N$. Pour trouver T, il faut éliminer F_c et N de ces trois équations et on obtient :

$$T = \frac{\mu_c\, P}{\cos\theta + \mu_c\, \sin\theta} \tag{1}$$

Application numérique :

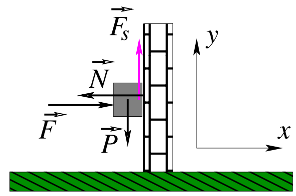
$$T = \frac{0.2 \times 8 \times 9.8}{\cos 40 + 0.2 \times \sin 40} = 17.5\,\mathrm{N} \tag{2}$$

Exercise 3 :
A brick weighing 24 N is pressed against a rough vertical wall by a force $\vec{F}$, as shown, figure below. The coefficient of static friction between the brick and the wall is $\mu_s = 0.6$.a) What forces does the wall exert on the brick ? b) In addition to forces found in a), what are the other forces applied to the brick ? c) Find the magnitude of the minimum value of $\vec{F}$ to prevent the brick from sliding down the wall.



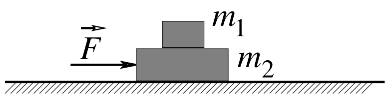
SOLUTION :a) The wall exerts on the brick the static friction force $\vec{F}_s$ and the normal force $\vec{N}$.

b) In addition to $\vec{F}_s$ and $\vec{N}$, the other forces applied to the brick are $\vec{P}$ (its weight) and $\vec{F}$ (the pressing force).

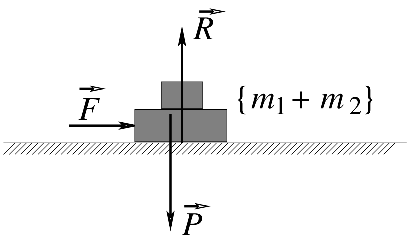


c) As long as the brick does not move (i.e. does not slide), the Newton's second law reads : $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_s + \vec{P} = \vec{0}$. By projecting onto x-axis and then onto y-axis, we obtain : $F - N = 0$, i.e. $N = F$ (i) and $F_s - P = 0$, i.e. $P = F_s$ (ii). The static friction force $\vec{F}_s$ adapts itself to compensate for P until its maximum value F_{smax} is reached. In other words, the brick doesn't slide down as long as $F_{smax} \geq P$. Knowing that $F_{smax} = \mu_s N$, or, from equation (i), $F_{smax} = \mu_s F$, this leads to : $\mu_s F \geq P$. From the latter equation, we have : $F \geq P/\mu_s = 24/0.6 = 40\,\mathrm{N}$. The magnitude of the minimum value of $\vec{F}$ to prevent the brick from sliding down the wall is 40 N.

Exercice 4 : On dépose un bloc de masse $m_1 = 4$ kg sur un bloc de masse $m_2 = 5$ kg. Pour faire glisser m_1 sur m_2, une force horizontale d'au moins 12 N sur m_1 est nécessaire.
L'ensemble repose maintenant sur une surface plane horizontale dépourvue de tout frottement (figure ci-contre). Trouver la force maximum horizontale F que l'on peut appliquer à m_2 pour que les deux masses se déplacent ensemble sans que m_1 ne bouge par rapport à m_2. Quelle est alors l'accélération des deux blocs ?



SOLUTION : La première partie du problème nous dit que la force de frottement maximum entre m_1 et m_2 vaut : $F_{smax} = 12\,\mathrm{N}$. Tant que m_1 ne bouge pas par rapport à m_2, on peut appliquer le PFD au système $\{m_1 + m_2\}$. Les forces qui s'exercent sur $\{m_1 + m_2\}$ sont $\vec{F}$, $\vec{R}$ (la réaction de la susrface) et le poids $(m_1 + m_2)$g de l'ensemble $\{m_1 + m_2\}$. Les deux dernières forces se compensent et le PFD se réduit à $F = (m_1 + m_2)a$, ce qui conduit à une accélération

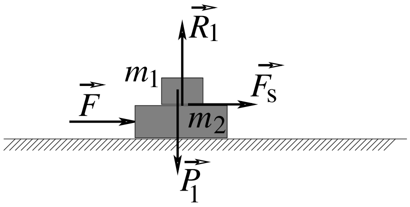


$$a = F/(m_1 + m_2) \tag{3}$$

L'accélération étant dans le sens de la force appliquée $\vec{F}$, la masse m_1 aura tendance à glisser vers l'arrière. Elle est empêchée de glisser par la force de frottement statique $\vec{F}_s$, celle-ci est donc dirigée vers l'avant (figure

ci-contre).
Le poids P_1 de m_1 étant compensé par la force de réaction R_1 exercée par m_2, la loi de Newton sur m_1 s'écrit $\vec{F}_s = m_1\,\vec{a}$, soit en module :

$$F_s = m_1\, a \tag{4}$$



ou encore, compte tenu de (3),

$$F_s = \frac{m_1}{m_1+m_2} F \tag{5}$$

La masse m_1 ne glisse pas sur m_2 tant que la force de frottement statique F_s ne dépasse pas sa valeur maximale F_{smax}, ce qui se traduit par (voir (5)) :

$$\frac{m_1}{m_1+m_2} F \leq F_{\text{smax}} \tag{6}$$

La valeur maximum de F est donc

$$F_{\text{max}} = \frac{m_1+m_2}{m_1} F_{\text{smax}} = \frac{4+5}{4} \times 12 = 27\,\text{N} \tag{7}$$

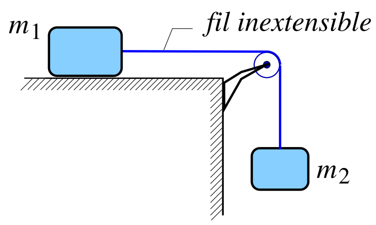
b) L'accélération des deux blocs s'obtient à partir de l'équation ((3)) quand $F = F_{\text{max}}$:

$$a = F_{\text{max}}/(m_1+m_2) = 27/9 = 3\,\text{m/s}^2$$

Notons qu'on peut aussi utiliser l'équation $m_1\, a = F_{\text{smax}}$ (équation (4) pour $F_s = F_{\text{smax}}$), d'où l'on tire

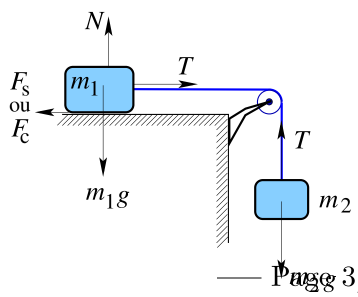
$$a = \frac{F_{\text{smax}}}{m_1} = \frac{12}{4} = 3\,\text{m/s}^2$$

Exercice 5 (→ *3 points*) :
Une masse $m_1 = 1.40\,\text{kg}$ est reliée à une masse m_2 par un fil inextensible (غير قابل للإمتداد) de masse négligeable (كتلة ضئيلة), comme le montre la figure ci-contre. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre m_1 et la surface horizontale sont $\mu_s = 0.5$ et $\mu_c = 0.2$. On prendra $\text{g} = 9.8\,\text{m/s}^2$.



a) Jusqu'à quelle valeur maximum $m_{2\text{max}}$ peut-on augmenter m_2 sans qu'il y ait mouvement ? b) Le mouvement se déclenchera-t-il si $m_2 = 0.82\,\text{kg}$? Si oui, calculez l'accélération. On admettra que la tension du fil (قوة الشد للخيط) est la même en tous ses points.

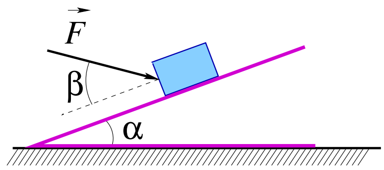
SOLUTION : a) Les forces appliquées à m_1 (voir figure ci-contre) sont : son poids $m_1\text{g}$, la réaction N de la surface horizontale, la force de frottement (F_c s'il y a mouvement ou F_s sinon), et la tension du fil T. Les forces appliquées à m_2 sont son poids $m_2\text{g}$ et la tension du fil T (la tension est la même en tous les points du fil). En l'absence de mouvement, la somme des forces sur chacune des masses donne zéro. On a donc



pour m_1 : $T - F_s = 0$ (i) et $m_1 g - N = 0$ (ii)
pour m_2 : $m_2 g - T = 0$ (iii).
L'équation (i) montre que le mouvement ne se déclenche pas tant que
$T \leq F_{\text{smax}}$ (iv).
De l'équation (iii) on tire : $T = m_2 g$ et l'équation (iv) devient : $m_2 g \leq F_{\text{smax}}$ (v).
On peut augmenter m_2 sans qu'il y ait mouvement jusqu'à m_{2max} telle que $m_{2max} g = F_{\text{smax}} \implies m_{2max} = F_{\text{smax}}/g$. Sachant que, par définition, $F_{\text{smax}} = \mu_s N$ et que $N = m_1 g$ (d'après l'équation (ii)), il vient : $m_{2\text{max}} = \mu_s m_1 = 0.7\,\text{kg}$.

b) Si $m_2 = 0.82\,\text{kg}$, alors $m_2 > m_{2\text{max}}$ et le mouvement va se déclencher. Puisqu'il y a mouvement, c'est le frottement cinétique F_c qui entre en jeu. Les deux masses auront la même accélération a car le fil est inextensible. La 2ème loi de Newton appliquée aux deux masses donnent
pour m_2 : $m_2 g - T = m_2 a$ (1)
pour m_1 : $T - F_c = m_1 a$ (2) et $m_1 g - N = 0$ (3)
(1)+(2) donne : $m_2 g - F_c = (m_1 + m_2)a \implies a = (m_2 g - F_c)/(m_1 + m_2)$. Par définition $F_c = \mu_c N$ et de (3) on tire $N = m_1 g$, donc
$a = g(m_2 - \mu_c m_1)/(m_1 + m_2)$. A.N. : $a = 9.8(0.82 + 0.2 \times 1.40)/(1.40 + 0.82) = 2.38\,\text{m/s}^2$.

Exercice 6 : Un bloc de $2\,\text{kg}$ se trouve sur un plan incliné de $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale et est soumis à une force $F = 11\,\text{N}$ qui agit, comme indiqué dans la figure ci-contre, selon un angle $\beta = 35°$ par rapport au plan. On néglige les frottements entre le bloc et le plan et on prendra $g = 9.8\,\text{m/s}^2$. Trouvez :
a) l'accélération du bloc ;
b) la force exercée par le plan sur le bloc.



SOLUTION : a) Désignons par m la masse du bloc et par $\vec{a}$ son accélération. La deuxième loi de Newton appliquée à m s'écrit :
$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$, $\vec{P} = m\vec{g}$ ($P = mg$) étant le poids du bloc et $\vec{N}$ la force exercée par le plan sur le bloc.
Projection sur x : $F\cos\beta - mg\sin\alpha = ma$ (1)
Projection sur y : $N - F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$ (2)
a) De l'équation (1), on tire : $a = (F\cos\beta - mg\sin\alpha)/m$
A.N. : $a = 11\cos 35 - 2 \times 9.8\sin 20 = 1.15\,\text{m/s}^2$.
b) De l'équation (2), on tire : $N = F\sin\beta + mg\cos\alpha$
A.N. : $N = 11\sin 35 + 2 \times 9.8\cos 20 = 24.7\,\text{N}$.