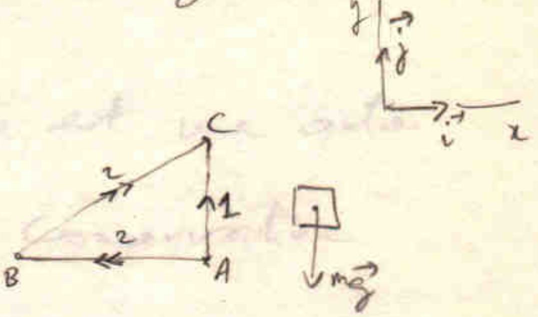
IV 4/ La conservation de l'énergie totale.

IV.4.1/ Les forces conservatives et énergie potentielle

* Une force est dite conservative si elle effectue toujours le même travail sur une particule qui se déplace de M_1 à M_2, peu importe la trajectoire suivie.



exemple : Le travail de la force de pesanteur sur un objet qui s'élève de A à C est le même pour les chemins 1 et 2 et pour tout autre chemin. $W(m\vec{g}) = -mg(y_C - y_A)$

$\int_A^C m\vec{g}\cdot d\vec{r}$

$-mg(y_C - y_A)$

On dit que la force de pesanteur est une <u>force conservative</u>.

* <u>Notion d'énergie potentielle</u>.

On peut écrire, dans l'exemple précédent,

$$W(m\vec{g}) = -\left[mgy_C - mgy_A\right] = -\left(E_p(C) - E_p(A)\right)$$

où $E_p(C) = mgy_C$ et $E_p(A) = mgy_A$.

E_p apparait comme une énergie due à l'état (ici la position) du système. Cette énergie s'appelle l'énergie potentielle.

Puisque A et B sont arbitraires, on peut écrire la relation précédente

$$W = -\int_A^C dE_p \Longrightarrow dW = -dE_p$$

et à partir de là

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = - dE_p = - \overrightarrow{grad}\, E_p \cdot \vec{dr}$$

soit $\boxed{\vec{F} = - \overrightarrow{grad}\, E_p}$

ce résultat, de validité générale, est une autre manière d'identifier une force conservative.

Lorsqu'il $\exists$ une fonction E_p / $\vec{F} = - \overrightarrow{grad}\, E_p$, on dit que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p.
Et une force qui dérive d'une énergie potentielle est une force conservative.

Remarque : 1°/ si l'on fait $\overrightarrow{rot}\, \vec{F}$ on trouve

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{F} = \overrightarrow{rot}\left(-\overrightarrow{grad}\, E_p\right) = - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} E_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

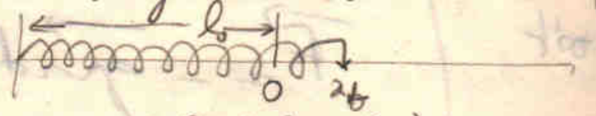
$$\boxed{\vec{F} \text{ dérive d'un potentiel} \Longleftrightarrow \overrightarrow{rot}\, \vec{F} = \vec{0}}$$

2°/ $\forall$ constante C, on a $\overrightarrow{grad}\, E_p = \overrightarrow{grad}(E_p + C)$

L'énergie potentielle est définie à une constante près.

Énergie potentielle d'un ressort

Calculons le travail effectué par un ressort qd sa longueur change de l_0+x_i à l_0+x_f



$$W_{res} = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Ce résultat ne dépend que des positions x_i et x_f $\Rightarrow$ la force $F = -kx$ est une force conservative

$$\Rightarrow \quad W_{res} = -\left(E_{p_f} - E_{p_i}\right) \text{ avec } E_{p_{f,i}} = \frac{1}{2}k\,x_{f,i}^2 + \text{cste}$$

Si on fait $x_i = 0$ (position où la longueur du ressort n'a pas changé et correspond à $F=0$)

et $x_f = x$ alors

$$W_{res} = -\frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow E_{p_{ressort}} = \frac{1}{2}kx^2$$

conserv.

1.4.2 / Conservation de l'énergie mécanique totale

le thm de la variation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$dW_{ext} = dE_c \quad \text{où } W_{ext} = \text{travail de toutes les forces extérieures}$$

Pour une force conservative on a : $dW_{ext} = -dE_p$

$$\Rightarrow -dE_p = dE_c \Rightarrow d(E_c + E_p) = 0 \Leftrightarrow$$

si $E_p \nearrow$ alors $E_c \searrow$ de la m̂ quantité et inversement.

$$\Rightarrow \boxed{E_c + E_p \equiv E_m \quad \text{constante}}$$

E_m = énergie mécanique totale

Lorsque les forces appliquées à une particule sont conservatives, l'énergie mécanique totale demeure constante tout au long du mouvement de la particule.

si à un instant t_1 la particule se trouve au point P_1 avec v_1
et si " t " " " P avec v

alors $$\frac{1}{2} m v^2 + E_p(P) = \frac{1}{2} m v_1^2 + E_p(P_1)$$

ex : si vous lancez à partir du sol un objet vers le haut avec v_0

alors $$\frac{1}{2} m v^2 + E_p(h) = \frac{1}{2} m v_0^2 + E_p(sol)$$

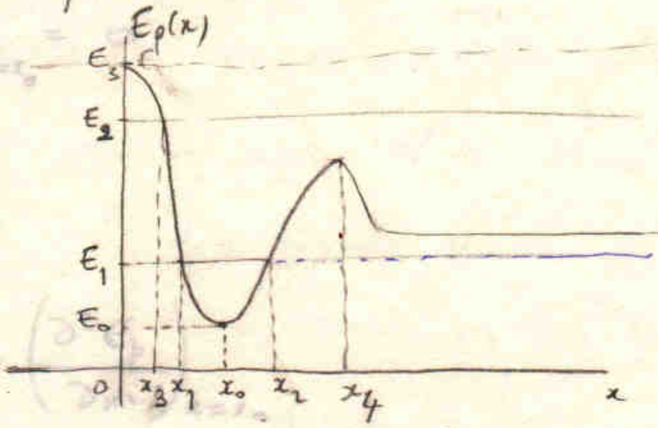
II.4.3 Etude énergétique d'un mvt à une dimension pour un système conservatif -

On a : $\frac{1}{2} m v^2 + E_p(x) = E_m$ cste $\Rightarrow E_m - E_p(x) = \frac{1}{2} m v^2$

il n'y a mvt que lorsque $v \neq 0$ càd $E_m - E_p(x) > 0$;

pour $E_m - E_p(x) = 0$ càd $E_m = E_p(x)$ il y a équilibre.

Prenons l'exemple de la courbe $E_p(x)$ illustrée ci-contre :



pour $E_m = E_0 \rightarrow$ le système ne possède aucune énergie cinétique $\Rightarrow$ le système sera au repos au pt x_0.

* pour $E_m = E_1$, on a $E_m \geq E_p(x)$ pour $x_1 \leq x \leq x_2$

$\Rightarrow$ La particule pourra se déplacer entre x_1 et x_2. Aux pts x_1 et x_2 la particule s'arrête et inverse son mvt.

* pour $E_m = E_2$, le mvt peut avoir lieu de x_2 à l'infini. Si au départ la particule se déplace dans le sens négatif elle s'arrêtera en x_2 pour repartir dans le sens des $x > 0$. Sa vitesse ↑ si $E_p(x)$ ↓ et vitesse ↓ si $E_p(x)$ ↑.

Pour $E_m \geq E_3$ le mvt se fera sans s'inverser. Sa vitesse dépendra de $E_p(x)$ en chaque point comme précédemment.

* Stabilité des équilibres :

Plaçons-nous en un point a et effectuons un petit déplacement $(x-a)$ à partir de cette position. En nous limitant au 2e ordre, nous pouvons écrire :

$$F(x) = F(a) + (x-a)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=a}$$

or $\vec{F}(x) = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\, Ep(x) \Rightarrow F = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$

$$\Rightarrow F(x) = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{x=a} - (x-a)\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right)_{x=a}$$

Pour un point tel que x_0 : la fonction $E_p(x)$ est minimum

et $\begin{cases} F(x_0) = \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow F(x) = -(x-x_0)\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right)_{x=x_0}$$

$\Rightarrow$ $F(x)$ est de signe contraire de $x - x_0$

$\Rightarrow$ la particule s'écarte de x_0, $F(x)$ a tendance à la ramener à sa position d'équilibre $\Rightarrow$ équilibre stable

Pour un point tel que x_4 : $E_p(x)$ est maximum et $\left.\dfrac{\partial^2 E_p(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_3} < 0$

$F(x)$ est de même signe que $x - x_4$; la particule tend à s'écarter de sa position d'équilibre $\rightarrow$ équil. instable.

$$F(x) = -(x-x_4)\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x=x_4}$$