Chapitre 3

# TRANSFORMEES ORTHOGONALES DE L'IMAGE

## 1. INTRODUCTION

Les transformées orthogonales de l'image permettent de passer de la représentation spatiale d'une image à une représentation spectrale de celle-ci.

## 2. TRANSFORMEE DE FOURIER

### 2.1. Transformée de Fourier continue bidimentionnelle

On considère un signal $x(t,u)$ continu. La transformée de Fourier de $x(t,u)$, notée $\mathbf{X}(f_1,f_2)$, peut être exprimée par :

$$\mathbf{X}(f_1,f_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t,u)\, e^{-j2\pi(f_1 t + f_2 u)} dt\, du \qquad \textbf{(1)}$$

### 2.2. Transformée de Fourier discrète 2D (TFD 2D)

On considère une image numérique $g$, sur une grille régulière carrée et spatialement restreinte : $M$ lignes, $N$ colonnes et échantillonnage en fréquence. La TFD 2D, $G$, de l'image est calculée par :

$$G(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} g(m,n)\, e^{-j2\pi\left(\frac{km}{M}+\frac{ln}{N}\right)} \qquad \textbf{(2)}$$

$$(k,l) \in \left[\frac{-M}{2}+1\,,\ \frac{M}{2}\right] \times \left[\frac{-N}{2}+1\,,\ \frac{N}{2}\right]$$

$(m,n)$ représente les coordonnées spatiales, $g(m,n)$ est appelée représentation spatiale de l'image. $(k,l)$ représente les fréquences spatiales discrètes et $G(k,l)$ est appelée représentation spectrale de l'image dans le domaine de Fourier, exprimée par la TFD 2D.

### 2.3. Propriétés de la TFD 2D

Les propriétés de la TFD 2D peuvent être résumées comme suivant :

- La valeur de la TFD à l'origine est la moyenne de l'image x NM.
- Si l'image est réelle :
  - On a une symétrie par rapport à l'origine du module de la TFD ;
  - La TFD 2D est complexe : la quantité d'information reste inchangée.
- Une rotation d'angle α dans le domaine spatial se traduit par une rotation d'angle α dans le domaine fréquentiel.
- La réponse fréquentielle de G(k,l) comporte une information structurelle sur la direction des fréquences spatiales.
- Les lignes directrices fortement représentées dans les images sont mises en valeur dans les spectres

**Tableau 1 –** Propriétés de la TFD 2D

| ***Propriétés*** | ***TFD 2D*** | |
|---|---|---|
| | *g(m,n)* | *G(k,l)* |
| *Linéarité* | $\alpha.\ g_1(m,n) + \beta.\ g_2(m,n)$ | $\alpha.G_1(k,l) + \beta.G_2(k,l)$ |
| *Translation* | $g(m - m_0\ ,\ n - n_0)$ | $G(k,l)\ e^{-j2\pi\left(\frac{k\,m_0}{M}+\frac{l\,n_0}{N}\right)}$ |
| | $g(m,n)\ e^{j2\pi\left(m\frac{\nu_0}{M}+l\frac{\mu_0}{N}\right)}$ | $G(k - \nu_0\ ,\ l - \mu_0)$ |
| *Convolution* | $g_1(m,n) * g_2(m,n)$ | $G_1(k,l)\ .\ G_2(k,l)$ |
| *Produit* | $g_1(m,n)\ .\ g_2(m,n)$ | $G_1(k,l) * G_2(k,l)$ |

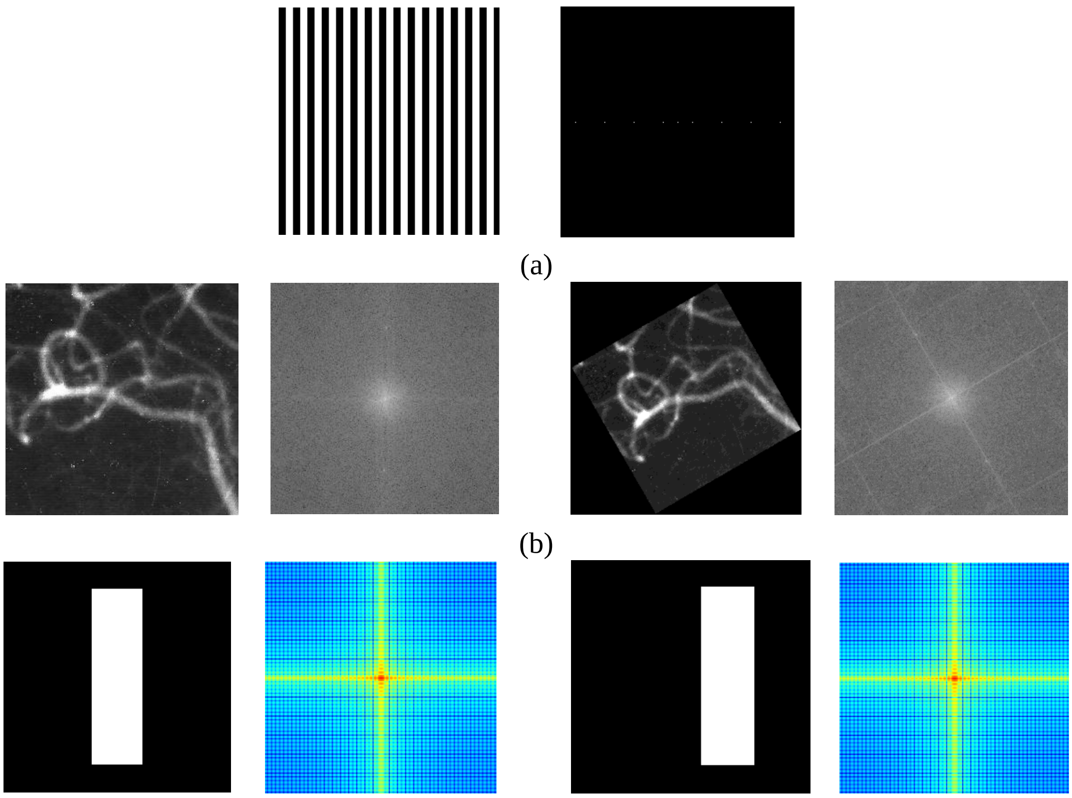
## 2.4. TFD 2D inverse

La TFD2D inverse se calcule par :

$$g(m,n) \;=\; \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1}\ \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} G(k,l)\ e^{j2\pi\left(\frac{k\,m}{M}+\frac{l\,n}{N}\right)} \qquad \textbf{(3)}$$

$$(m,n)\ \in\ [0\ ,\ M-1]\times[0\ ,\ N-1]$$

## 2.5. Exemples



(a) (b) (c)

**Fig. 1 –** Exemples de la TFD 2D. (a) TFD d'une sinusoïde 2D. (b) Rotation d'un angle de 30°. (c) Invariance de la TFD par translation dans le domaine spatial.

### 1.6. Applications de la TFD 2D

La TFD 2D est utilisée dans de nombreuses applications telles que la compression, le débruitage, la restauration, la détection de contours, etc.

## 2. TRANSFORMEE EN COSINUS DISCRETE (DCT)

### 2.1. DCT et IDCT

La DCT et la IDCT (DCT inverse) d'une image numérique **I** se calculent de la manière suivante :

**DCT :**
$$F(u,v) = \sqrt{\frac{2}{M\,N}}\; c(u)\,c(v) \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{I}(m,n)\, \cos\left(\pi \frac{(2m+1)u}{2M}\right) \cos\left(\pi \frac{(2n+1)v}{2N}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

**IDCT :**
$$\mathbf{I}(m,n) = \sqrt{\frac{2}{M\,N}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} c(u)\,c(v)\,F(u,v)\, \cos\left(\pi \frac{(2m+1)u}{2M}\right) \cos\left(\pi \frac{(2n+1)v}{2N}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Avec :

- *M* et *N* représentent la hauteur et la largeur de l'image, en pixels;
- *F(u,v)* correspond au cofficient de la transformée;
- *c(u)* et *c(v)* sont les facteurs d'orthogonalité de la transformée, tels que:

$$c(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & si\ \alpha = 0 \\ 0\ , & si\ \alpha \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

### 2.2. Propriétés

La DCT possèdent plusieurs propriétés, en particulier:

- Transformée à coefficients réels (simples à calculer).
- Transformation sans pertes (le signal orignal peut être retrouvé à l'identique par transformée inverse).
- Concentration de l'information dans les coefficients de basse fréquence.

### 2.3. Applications

- La DCT est très utilisée en traitement de l'image, en particulier en compression:
  - grâce à son excellente propriété de *regroupement* de l'énergie, l'information est essentiellement portée par les coefficients basses fréquences.
  - Grâce à sa capabilité de fournir une décorrélation optimale des coefficients, permettant à un petit nombre de coefficients non nuls de reconstruire l'image par transformée inverse.

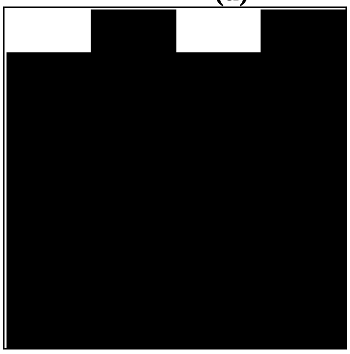
### 2.4. Exemple

L'exemple ci-dessous montre l'application de la DCT à un bloc d'image de taille 8 x 8.

**(a)**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 128 | 128 | 0 | 0 | 128 | 128 | 0 | 0 |
| 128 | 128 | 0 | 0 | 128 | 128 | 0 | 0 |
| 128 | 128 | 0 | 0 | 128 | 128 | 0 | 0 |
| 128 | 128 | 0 | 0 | 128 | 128 | 0 | 0 |
| 128 | 128 | 0 | 0 | 128 | 128 | 0 | 0 |
| 128 | 128 | 0 | 0 | 128 | 128 | 0 | 0 |
| 128 | 128 | 0 | 0 | 128 | 128 | 0 | 0 |
| 128 | 128 | 0 | 0 | 128 | 128 | 0 | 0 |

**(b)**



**(c)**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 362.04 | 362.04 | 0 | 0 | 362.04 | 362.04 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**(d)**

**Fig. 2 –** Exemples de calcul de la DCT d'un bloc image 8x8. (a) Bloc original. (b) Matrice 8x8 originale. (c) Bloc des coefficients DCT. (d) Matrice des coefficients DCT.