Analyse Numérique Matricielles

Les matrices

Notation :

. on désigne par K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

. on note par $M_{n,m}(K)$ le K. espace vectorielle des matrices m lignes et n. colonnes à coefficient dans K. et on note $M_n(K)$ les matrices carrés.

Définitions principales :

soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ on dit que :

* A symétrique si $A = A^t$
* orthogonale si $AA^t = A^tA = I_n$

soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ on dit que :

* A hermitienne si $A = A^*$ où $A^* = (\bar{A})^t$
* A unitaire si $AA^* = A^*A = I_n$.
* A normale si $AA^* = A^*A$.

Trace d'une matrice : soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$

on définit trace A par :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii})$$

Spectre d'une matrice.

Le spectre d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des valeurs propres de A et on note par $Sp(A)$

Rayon spectrale :

Le rayon spectral de A est la plus grande valeur propre de A en module et on note par $\rho(A)$ avec : $\rho(A) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ / λ_i valeur propre de A.

Matrice définie postive :

Soit $A \in M_n(K)$, on dit que A est définie postive si $\langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \in K^n - \{0\}$ et semi-définie positive si $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K^n$.

propriétés des matrices définies positives

→ tous les éléments diagonaux de $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont positive. ($a_{ii} > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$)

→ Tous les valeurs propres d'une matrice symétrique (hermitienne) définies postives sont des valeurs de $\mathbb{R}_+^*$

Rq : λ valeur propre $\Leftrightarrow \exists x \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x) = \lambda \|x\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$

→ Le déterminant des mineurs principaux d'une matrice définie positive sont positive.

Réduction des matrices :

matrices semblables :

Les matrices A et $B \in M_n(K)$ sont dite semblables s'il existe $P \in M_n(K)$ inversible telle que $B = P^{-1} A P$

Théorème de Schur :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire telle que $U^* A U$ est une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure).

Remarque :

→ si A est normale, alors $U^* A U$ est une matrice diagonale.

→ les éléments diagonaux de $U^* A U$ sont des valeurs propres de A.

définition :

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ on appelle les valeurs singulières de A les racines carrées des valeurs propres de $A^* A$

théorème :

pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ où $m \geq n$ il existe deux matrices unitaires $U \in M_m(\mathbb{C})$ et $V \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$UAV^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ 0 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_n \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où λ_1 sont les valeurs singulières de A.

Normes vectorielles :

une norme sur K^n, $n \geq 1$ est une application de K^n dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

1/ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{K^n}$

2/ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in K, \forall x \in K^n$

3/ $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in K$.

Les normes vectorielles les plus utilisées :

sont : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $\quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

remarque :

1) soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$

tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (inégalité de Hölder)

2) pour $p = q = 2$ on a $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$

(inégalité de couchy-schwartz)

orthogonalité :

définition : soit $U, V \in K^n$, on dit que U, V sont orthogonaux si $\langle U, V \rangle = 0$

une famille $\{U_1, V_2 \text{ ——— } V_k\}$ est orthogonale si $\langle U_i, U_j \rangle = 0$ et orthonormée si $\langle U_i, U_j \rangle = \delta_{ij}$ / $\delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Norme matricielle

une norme matricielle est une application $\|\cdot\|$ de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0_{M_n(K)}$

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \quad \forall \lambda \in K, \forall A \in M_n(K)$

3) $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

4) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$

Norme matricielle subordonnée (induite)

Soit $\|\cdot\|_v$ une norme vectorielle sur K^n

proposition :

l'application $\|\cdot\|$ définie de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}$

par $\|\cdot\| \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$A \longrightarrow \|A\|$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_v = \sup_{\|x\|_v = 1} \|Ax\|_v$$

est une norme matricielle.

Définition: La norme $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$ est appelée la norme subordonnée (induite) par la norme vectorielle $\|\cdot\|_v$

Remarque:

si $\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée alors $\|I_n\| = 1$

Proposition (Exo 1): soit $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(k)$ alors

$$\|A\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

Exemple: soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\|A\|_1 = \max(10, 8, 9) = 10$

$\|A\|_\infty = \max(6, 15, 6) = 15$

Norme de Schur (Frobenius):

soit $\|\ \|_F : \mathcal{M}_n(k) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$A = (a_{ij}) \longrightarrow \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$$

$\|A\|_F$ est une norme matricielle appelée la norme de Schur et non subordonnée

Remarque: $\|A\|_F = \sqrt{Tr(A^*A)}$

Exercice:

Montrer que $\|\ \|_F$ et $\|\ \|_2$ sont équivalentes

Suite de matrices

Théorème

soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0_{\mathcal{M}_n(k)}$

b) $\lim_{k \to +\infty} A^k x = 0_{k^n} \quad \forall x \in k^n$

c) $\rho(A) < 1$

d) il existe une norme matricielle induite $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| < 1$

Résolution des systèmes linéaire

1) pour le cas général voir (cours ANANum 1 et 2)

2) système tridiagonale:

Les matrices tridiagonales interviennent très souvent à la résolution de nombreux problèmes de différences finies pour les équations différentielles avec conditions aux limites et la recherche des valeurs et vecteurs propre des matrices.

Définition:

soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ est une matrice tridiagonale si $(a_{ij} = 0)$ pour $|i-j| \geqslant 2$

et A est une matrice diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| \geqslant 1$

* résolution de système linéaire par la méthode de Gauss

$$Ax = b \xrightarrow{\text{méthode de Gauss}} Bx = d$$

où B est une matrice triangulaire supérieur

proposition 1 (EXO 2)

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ avec $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| \geqslant 2$

Si on applique la méthode de Gauss pour transformer $Ax = b$ au système $Bx = d$ alors on a:

$$b_{ij} = 0 \quad \text{pour } j-i \geqslant 2.$$

Proposition 2 (EXO 3)

soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ avec A symétrique définie positive et $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| \geqslant 2$

alors si on applique la méthode Cholesky $A = LL^T$ avec L est une matrice triangulaire inférieur on a:

$$l_{ij} = 0 \quad \text{pour } i-j \geqslant 2$$

Méthodes itératives:

Le principe des méthodes itératives consiste à construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la forme $x_{k+1} = Hx_k + C$ où H est une matrice de type (n,n) et $C \in \mathbb{R}^n$

dans le cas de convergence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers $\bar{x}$ alors $\bar{x}$ est une solution de système $Ax = b$.

Exemple:

à toute décomposition de A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible, on peut l'associé la méthode itérative $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$.

et le cas de la convergence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers x

on a : $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \iff Mx = Nx + b$

$\iff (M-N)x = b \iff Ax = b$.

proposition

Soit A inversible et $A = M - N$ avec M est une matrice inversible alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$ converge vers x solution de $Ax = b$ si seulement si

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

Théorème

Soit A une matrice hermitienne et inversible. Soit une décomposition de $A = M - N$. où M est inversible et $M^* + N$ définie positive.

alors la suite $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$ converge si et seulement si A est définie positive.

Exemple de la décomposition de A sous la forme $M - N$:

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

on la décompose A sous la forme $A = D - E - F$

où $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

i.e. $A = D - E - F$.

D est une matrice Diagonale.

E est une matrice triangulaire inférieur strictement

F est une matrice triangulaire supérieur strictement

à partir de cette décomposition, on construire trois méthodes itératives:

Méthode de Jacobi:

on écrit $A = M - N$ ou $M = D$, $N = E + F$.

(i.e $A = D - E - F$).

et la suite $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$.

$\iff x_{k+1} = D^{-1}(E+F)x_k + D^{-1}b \iff Dx_{k+1} = (E+F)x_k + b$.

$$\Leftrightarrow x_{k+1}^{i} = \frac{-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_k^j + b_i}{a_{ii}} \qquad 1\leq i\leq n$$

et la méthode de Jacobi converge si

$$\rho(M^{-1}N) = \rho\left(D^{-1}(E+F)\right) < 1.$$

2) méthode de Gauss-Seidel:

Elle consiste à prendre $M = D - E$, $N = F$.

et la suite (x_k) est définie par :

$$x_{k+1} = M^{-1}N x_k + M^{-1} b \Leftrightarrow x_{k+1} = (D-E)^{-1} F x_k (D-E)^{-1} b$$

$$\Leftrightarrow (D-E)x_{k+1} = F x_k + b.$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1}^{i} = \frac{-\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_{k+1}^{j} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_k^j\right) + b_i}{a_{ii}} \qquad 1\leq i\leq n$$

définition:

soit $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{C})$, on dit que A est une matrice à diagonale dominante (strictement) à diagonale dominante si

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \qquad \forall\, 1\leq i\leq n$$

$$\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall\, 1\leq i\leq n\right)$$

(13)

Proposition:

si A est une matrice à diagonale strictement dominante alors la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel converge.

Proposition:

soit A est une matrice symétrique définie positive alors la méthode de Gauss Seidel converge.

Dém:

D'après le théorème précédent on a :

$$M^t + N = (D-E) + F = D - E^t + F.$$

Or A symétrique $\Leftrightarrow E^t = F$ donc $M^t + N = D$.

A définie positive $\Rightarrow D$ est définie positive,

donc d'après le théorème précédent

la méthode de Gauss-Seidel converge.

Méthode de Jacobi et Gauss Seidel par blocs:

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ inversible, on pose A sous la forme :

$$A \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

(14)

où A_{ii} des matrices carrées inversibles de type (P_i, P_i) avec $\sum_{i=1}^{m} P_i = n$

on définie la décomposition $A = \tilde{D} - \tilde{E} - \tilde{F}$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{m,m} \end{pmatrix}, \tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ -A_{ij} & & 0 \end{pmatrix}, \tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & & -A_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode de Jacobi est de la forme:

$$x_{k+1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}x_k + \tilde{M}^{-1}b \text{ où } \tilde{M} = \tilde{D}, \tilde{N} = \tilde{E} + \tilde{F}$$

La méthode de Gauss-Seidel est sous la forme

$$x_{k+1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}x_k + \tilde{M}^{-1}b \text{ où } \tilde{M} = \tilde{D} - \tilde{E}, \tilde{N} = \tilde{F}$$

3) méthode de relaxation:

Soit $w \neq 0$ et $A = M - N$

où $M = \left(\frac{D - wE}{w}\right)$ $N = \left(\frac{1-w}{w}\right)D + F$

et la suite de la méthode de relaxation est définie par:

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1} = (D - wE)^{-1}((1-w)D + wF)x_k + w(D - wE)^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow (D - wE)x_{k+1} = ((1-w)D + wF)x_k + wb.$$

Système non linéaire

Soit $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et on cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solution de $g(\bar{x}) = 0$

Remarque: Si $g(x) = Ax - b$ alors le système est linéaire

On étudiera deux familles de méthodes de résolution:

* les méthodes de point fixe.
* les méthodes de type Newton

1) Les méthodes de point fixe:

Point fixe de contraction:

définition: Soit E un espace métrique complet et $f: E \longrightarrow E$, on dit que f est contractante s'il existe $k \in]0,1[$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$ $\forall x, y \in$

théorème de point fixe:

Soit E un espace métrique complet et $f: E \to E$ une application contractante:

alors il existe une unique point fixe $\bar{x} \in E$ qui vérifie $f(\bar{x}) = \bar{x}$ et la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $\bar{x}$.