1 ^{ère} Année Master

Analyse Numérique Matricielle

TD N^{0}1

$\frac{1}{2}$.

Exercice 1 Soit A une matrice normale. Calculer $\|A\|_2$.
En déduire la norme $\|A\|_2$ d'une matrice symétrique.

Exercice 2 Soit $U \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

1. U est unitaire.
2. $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$, $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$

En déduire que si U est unitaire alors $\|Ux\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$

1

1

Exercice 3 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors pour toute norme matricielle $\|.\|$ sur $M_n(\mathbb{C})$

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Cette inégalité peut être stricte?.

Exercice 4 Montrer que:

1. Si $\|A\| < 1$ pour une norme matricielle induite, alors $I_n - A$ est inversible et
$$\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$
2. Si $I_n - A$ est singulière, alors $\|A\| \geq 1$ pour toute norme matricielle.

Exercice 5 Soit A une matrice carrée. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

1. $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$
2. $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k x = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
3. $\rho(A) < 1$
4. $\|A\| < 1$ pour au moins une norme subordonée.

TD N°2

1ère Année Master

Analyse Numérique matricielle

Ex1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que:

1) $\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

2) $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty =} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

3) $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$.

Ex2: Soit le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système $Ax = b$ avec
- La méthode de Gauss
- La méthode de Cholesky
- La méthode LU

Ex3: Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par:
$a_{ii} = i+1 \ (1 \le i \le n)$; $a_{i,i+1} = -i \ (1 \le i \le n)$; $a_{i+1,i} = 1 \ (1 \le i \le n)$
et les autres éléments sont nuls.

1- Ecrire la matrice A.
2- Déterminer la matrice d'itération de Jacobi J
3- calculer $\|J\|_1$ et en déduire la convergence ou la divergence de la méthode de Jacobi pour le système $Ax = b$.

Ex4: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1- Montrer si $\rho(A) < 1$ alors $(I - A)$ est inversible et $(I-A)^{-1} = \lim_{k \to \infty} C_k$
avec $C_k = I + A + \dots + A^k$

2- On suppose que A inversible et B une approximation de A^{-1}. On pose $X = (I - AB)$ et on suppose que $\|X\| < 1$. Montrer que
$\|A^{-1} - B\| \le \dfrac{\|BX\|}{1 - \|X\|}$,

$A^{-1} - B = A^{-1}X = A^{-1}X - BX + BX$

$= (A^{-1} - B)X + BX$ $\quad 1 - \|X\|$

$\|A^{-1} - B\| \le \|A^{-1} - B\| \|X\| + \|BX\|$

...rsité de Batna
...lté des Sciences
...artement de Mathématiques
...année Master.

BATNA 2013/2014

TD N°3
Analyse numérique matricielle

: Soit $R_\omega = (D-\omega E)^{-1}[(1-\omega)D+\omega F]$. Montrer que $\rho(R_\omega) \geq |\omega - 1|$

: Soit A une matrice hermitienne décomposée en $A = M - N$ où M inversible. Soit $B = I - M^{-1}A = M^{-1}N$ la matrice de l'itération $x_{n+1} = Bx_n + c$

Supposons que $M + M^* - A$ soit défini positive.

1. Soit x un vecteur quelconque et on pose $y = Bx$. Montrer que:
$$\langle x, Ax\rangle - \langle y, Ay\rangle = \langle (x-y), (M+M^*-A)(x-y)\rangle$$
2. Supposons que A est définie positive. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ, $y = Bx = \lambda x$. Utiliser l'identité précédente pour montrer que $|\lambda| < 1$. Que peut-on conclure sur la convergence de la suite (x_n).

3- Supposons que $\rho(B) < 1$. Montrer que A définie positive

4- Supposons A décomposée sous la forme $A = D - E - F$. Montrer que la méthode de relaxation pour $0 < \omega < 2$ converge si et seulement si A définie positive.

Ex3. Soit A une matrice hermitienne décomposée en $A = I - E - F$. Pour résoudre le système $Ax = b$, on propose la méthode itérative définie par:
$$\begin{cases} (I-E)x_{2k+1} = Fx_{2k} + b \\ (I-F)x_{2k+2} = Ex_{2k+1} + b \end{cases}$$

1- Déterminer B et c pour que l'on ait: $x_{2k+2} = Bx_{2k} + c$

. Vérifier que $B = M^{-1}N$ et $A = M - N$ avec $M = (I-E)(I-F)$ et $N = EF$

.. Montrer que $M^* + N$ est une matrice définie positive et en déduire une C.N.S pour la convergence de la méthode.

Ex4. Soit A et B deux matrices réelles d'ordre (n,n) et $a, b \in \mathbb{R}^n$. On considère les deux itérations:
$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a \\ y_{k+1} = Ax_k + b \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (*)$$
et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$ donnés.

- Déterminer une C.N.S de convergence des deux suites (x_k) et (y_k).

Soit $z_k = \binom{x_k}{y_k} \in \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que $(*)$ peut s'écrire sous la forme $z_{k+1} = Cz_k + c$ où C est une matrice d'ordre $(2n, 2n)$

Montrer que $\rho(C) = \rho(AB)$.

On considère maintenant les deux itérations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = B y_k + a & k = 0,1,\dots \quad (x^0, y^0) \text{ donnés} \\ y_{k+1} = A x_{k+1} + b & (**) \end{cases}$$

donner une C.N.S de convergence de (x_k) et (y_k)

- Montrer que $(**)$ est équivalent à $z_{k+1} = D z_k + d$ où D est une matrice d'ordre $(2n, 2n)$.
- Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$
- Comparer les vitesses de convergence de $(*)$ et $(**)$.

Ex 6 : Soit A une matrice tridiagonale de type (n,n). Pour $\mu \in \mathbb{C}$, on note par $x_\mu = (x_1, \mu x_2, \dots, \mu^{n-1} x_n)^t$.

- Montrer que si λ est une valeur propre de la matrice de Jacobi J associée au vecteur propre x, alors $(\mu E + \frac{1}{\mu} F) x_\mu = \lambda D x_\mu$. En déduire que si $\lambda \neq 0$ valeur propre de J alors λ^2 est une valeur propre de la matrice de Gauss-Seidel G.
- Montrer que si λ^2 valeur propre de G alors λ est une valeur propre de
- Montrer que $\rho(G) = (\rho(J))^2$. En déduire que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément.

Université de BATNA - 2 -
Faculté des Mathématiques et Informatiques
Département de Mathématiques

Intérrogation (1^{re})

Master I : Analyse Numérique matricielle.

Ex 1 : Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible, $\|.\|$ une norme matricielle induite d'une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$. On note le conditionnement de A par rapport à la norme $\|.\|$ par

$$Cond(A) = \|A\| . \|A^{-1}\|$$

1) - Montrer que :
- $Cond(A) \geq 1$, $Cond(\alpha A) = Cond(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$,

$$Cond(AB) \leq Cond(A) . Cond(B).$$

2) On suppose que $\|.\| = \|.\|_2$ la norme induite de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$Cond_2(A) = \|A\|_2 . \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_n : \text{La plus grande valeur propre de } A^tA \\ \sigma_1 : \text{La plus petite} \quad " \quad " \quad " \end{array} \right.$$

Ex 2 : Pour résoudre le système $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - r(Ax_k - b) \\ \text{où } x_0 \in \mathbb{R}^n, \; r \in]0, +\infty[\end{array} \right.$$

1 - Montrer que cette méthode est de type $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$ avec $A = M - N$ et préciser M, N et $B = M^{-1}N$.

2) Donner une CNS sur r pour que la méthode converge dans le cas où A symétrique définie positive.

Université de BATNA ...
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Examen Final (2h)

Analyse Numérique matricielle

Master I - M.A

10p)

Exercice 1: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ induite d'une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$. On note le conditionnement de A par rapport à la norme $\|\cdot\|$ par $Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

1- Montrer que :

1p) a- $Cond(A) \geq 1$

1p) b- $Cond(\alpha A) = Cond(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$

1p) c- $Cond(AB) \leq Cond(A) \cdot Cond(B) \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

2- On suppose que $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ la norme induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

3p) d- $Cond_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}$ où σ_n (σ_1) la plus grande (petite) valeur propre de A^tA.

2p) e- En déduire si $A = A^t$, alors $Cond_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ où λ_n (λ_1) la plus grande (petite) valeur propre de A.

2p) f- Calculer $Cond_2(A)$ si $A = \alpha Q$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et Q est une matrice orthogonale.

Exercice 2: 10p) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2p) 1- Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la méthode de Jacobi converge

2- On suppose que $\alpha = \beta = 2$ et $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1p) a- La méthode de Jacobi est-elle convergente ?

2p) b- Montrer que dans la suite Jacobi, on a $x^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall k \geq 1$. Pourquoi ?

3- Ecrire la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ de la méthode de Gauss-Seidel et en

3p) 1) déduire la matrice G de la méthode

2p) 4- Pour quelles valeurs $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la méthode de Gauss-Seidel converge

Solution TD N°3

Ex1: $R_w = (D - wE)^{-1}[(1-w)D + wF]$ Montrons que $\rho(R_w) \geq |w-1|$?

$\rho(R_w) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$ où λ_i v.p de R_w $(\rho(R_w) < 1 \Rightarrow w \in]0,2[$

$\rho(R_w) \geq |\lambda_i|$ $\forall i \in \{1,\dots,n\} \Rightarrow \rho(R_w)^n \geq \prod^n |\lambda_i| \geq |\prod \lambda_i| = |\det R_w|$

or $\det(R_w) = \det(D - wE)^{-1} \det[(1-w)D + wF] = \frac{1}{\det D} * (1-w)^n \det(D) = (1-w)^n$.

donc $\rho(R_w)^n \geq |\det(R_w)| = |(1-w)|^n \Rightarrow \rho(R_w) \geq |(1-w)|$.

Ex2 $A = A^* = M - N$ et $B = I - M^{-1}A = M^{-1}N$ et $(M + M^* - A) = M^* + N$ déf. positive

1 - $x \in \mathbb{R}^n$ et $y = Bx$

$\langle Ax, x\rangle - \langle y, Ay\rangle \overset{?}{=} \langle (x-y), (M + M^* - A)(x-y)\rangle$.

on a: $y = Bx = (I - M^{-1}A)x = x - M^{-1}Ax \Rightarrow x - y = M^{-1}Ax$

$\langle x-y, (M+M^*-A)(x-y)\rangle = \langle M^{-1}Ax, (M+M^*-A)M^{-1}Ax\rangle =$

$\langle M^{-1}Ax, Ax\rangle + \langle M^{-1}Ax, M^*M^{-1}Ax\rangle - \langle M^{-1}Ax, AM^{-1}Ax\rangle = \langle x-y, Ax\rangle + \langle Ax, x-y\rangle - \langle x-y, AM^{-1}Ax\rangle$

$= \dots = \dots = \langle x, Ax\rangle - \langle y, Ay\rangle$.

2) A définie positive et soit λ v.p de B $\Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $y = Bx = \lambda x$

on a: $x - y = x - \lambda x = (1-\lambda)x$

* $\langle x, Ax\rangle - \langle y, Ay\rangle = (1 - |\lambda|^2)\langle x, Ax\rangle$ ①

et

$\langle x-y, (M+M^*-A)(x-y)\rangle = \langle (1-\lambda)x, (M+M^*-A)(1-\lambda)x\rangle = |1-\lambda|^2\langle x, (M+M^*-A)x\rangle$ ②

Comme $|1-\lambda|^2 > 0$ et $(M+M^*-A)$ définie positive ~~et~~ $x \neq 0$ alors $(1 - |\lambda|^2) > 0$

$\Rightarrow |\lambda| < 1$

$\Rightarrow$ la suite (x_n) converge.

* $x_{n+1} = Bx_n + c$ et $\rho(B) < 1 \Rightarrow$ la suite (x_n) converge.

3) $\rho(B) < 1 \overset{?}{\Rightarrow}$ A définie positive

par l'absurde, A non définie positive $\Rightarrow \exists x_0 \neq 0$ tq $\langle Ax_0, x_0\rangle < 0$

et soit $x_n = Bx_{n-1} = B^2 x_{n-2} = \dots = B^n x_0$ et $\alpha_n = \langle Ax_n, x_n\rangle$.

on a $\rho(B) < 1 \Rightarrow x_n \to 0$ et $\alpha_n \to 0$

or si $y = x_n$ et $x = x_{n-1}$ alors $\langle Ax, x\rangle - \langle Ay, y\rangle = \alpha_{n-1} - \alpha_n > 0$ ($M+M^*-A$ définie positive)

donc (α_n) est une suite décroissante converge vers $0 \Rightarrow$ contradiction

avec $\alpha_0 = \langle Ax_0, x_0\rangle < 0$.

4) A définie positive et $A = D - E - F$, pour la méthode de relaxation, on a

$M = \frac{D}{w} - E$, et $M + M^* - A = \left(\frac{D}{w} - E\right) + \frac{D^*}{w} - E^* - D + E + F = \frac{2-w}{w} D$ $\left(\begin{array}{l} A = A^* \Rightarrow \\ D = D^* \\ E^* = F,\ F^* = E \end{array} \right)$

donc pour $0 < w < 2$ on a $(M+M^*-A)$ définie positive $\xrightarrow{d'après (2)} \rho(B) = \rho(M^{-1}N) < 1$

Ex3 $\left\{ \begin{array}{l} (I - E)x_{2k+1} = Fx_{2k} + b \\ (I-F)x_{2k+2} = Ex_{2k+1} + b \end{array} \right.$ $\xrightarrow{\text{Calcul}}$ $x_{2k+2} = [(I-E)(I-F)]^{-1}EFx_{2k} + [(I-E)(I-F)]^{-1} b$

$= M^{-1}Nx_{2k} + M^{-1}b$ / $M = (I-E)(I-F)$, $N = EF$

Rq: $E(I-E) = (I-E)E$ et $[(I-E)]^{-1}E = E(I-E)^{-1}$

$M^* = ((I-E)^t(I-F))^t = M$ et $M^*+N = M+N = (I-E)(I-F)+ \dots$

$\langle M^*+N x, x\rangle = \langle (I-E)(I-F)x, x\rangle + \langle EFx, x\rangle = \|(I-F)x\|^2 + \|Fx\|^2 > 0$

$\Rightarrow M^*+N$ définie positive

3) d'après l'exercice N° 2, la C.N.S de la convergence est A définie positive

<u>Ex 4</u> 1 – $\begin{cases} x_{k+1} = BAx_k + c_1 \\ y_{k+1} = ABy_k + c_2 \end{cases} \Rightarrow$ (x_k) converge $\Leftrightarrow \rho(BA) < 1$ et (y_k) converge $\Leftrightarrow \rho(AB) < 1$

2) $z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \Rightarrow z_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} z_k + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C z_k + c$ i.e $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$

3) λ v.p de $C \overset{?}{\Leftrightarrow} \lambda^2$ v.p de AB

$\Rightarrow$) $Cz = \lambda z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} By = \lambda x \\ Ax = \lambda y \end{matrix} \Rightarrow ABy = A\lambda x = \lambda^2 y \Rightarrow \lambda^2$ v.p de AB.

$\Leftarrow$) α v.p. de AB et posons $\beta^2 = \alpha$ et $ABx = \alpha x = \beta^2 x \;/\; x \neq 0$

Posons $v = \begin{pmatrix} Bx \\ \beta x \end{pmatrix}$ et $Cv = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Bx \\ \beta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bx \\ ABx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bx \\ \beta^2 x \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} Bx \\ \beta x \end{pmatrix} = \beta v$

$\Rightarrow \beta$ valeur prop de C.

donc $\rho(C)^2 = \rho(AB)$

3) $D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ et $\rho(D) = \rho(AB)$.

<u>Ex 5</u> – λ valeur propre de J associée au vecteur $x \neq 0 \Rightarrow (E+F)x = \lambda D x$.

pour $\mu \in \mathbb{C}$ et $x_\mu = (x_1, \mu x_2, \dots, \mu^{n-1} x_n)$, on a d'après les calculs

$$\left(\mu E + \frac{1}{\mu} F\right) x_\mu = \lambda D x_\mu$$

a) – λ v.p de $J \overset{?}{\Rightarrow} \lambda^2$ v.p de G (Gauss-Seidel) $= (D-E)^{-1}F$

Pour $\mu = \lambda$, on a $\left(\lambda E + \frac{1}{\lambda} F\right) x_\lambda = \lambda D x_\lambda \Rightarrow F x_\lambda = \lambda^2 (D-E) x_\lambda$

$\Rightarrow G x_\lambda = \lambda^2 x_\lambda \Rightarrow \lambda^2$ v.p de G

(b) – λ^2 v.p de $G \overset{?}{\Rightarrow} \lambda$ v.p de J

$Gy = \lambda^2 y \Leftrightarrow Fy = \lambda^2 (D-E)y \Rightarrow \frac{1}{\lambda} Fy + \lambda E y = \lambda D y \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\lambda}F + \lambda E\right] y = \lambda D y$.

soit $x \in \mathbb{C}^n \;/\; y = x_\lambda \Leftrightarrow (y_i = x_{i\lambda} = \lambda^{i-1} x_i \;\; 1 \le i \le n) \Leftrightarrow$

$\left(x_i = \frac{y_i}{\lambda^{i-1}} \;\; 1 \le i \le n\right)$ donc $x \in \mathbb{C}^n \neq 0$ (car $y \neq 0$) et on a.

$\left(\frac{1}{\lambda}F + \lambda E\right) x_\lambda = \lambda D x_\lambda \Leftrightarrow (F+E)x = \lambda D x \Rightarrow \lambda$ v.p de J

ⓐ et ⓑ $\Leftrightarrow \rho(G) = \rho(J)^2$

– Conclusion : pour les matrices Tridiagonale les méthodes de J et G convergent ou divergent simultanément.

(08)