UNIVERSITE DE BATNA_2
SERIE DE TD N° 3

FACULTE DE MEDECINE
DE BIOSTATISTIQUES

1ère Année Médecine, 2022/2023

TD sur l'analyse combinatoire

Exercice 1

Combien de nombres différents de 6 chiffres existent-t-il

a) S'il n'y a aucune restriction ?
b) Si les répétitions de chiffres sont exclues ?

Solution

Le premier chiffre ne peut pas être zéro « 0 » car si tel était, le nombre voulu aurait 5 chiffres.

a) On applique le principe de dénombrement donc : 9×10×10×10×10×10× = 900 000.
b) On applique toujours le même principe mais cette fois-ci comme les répétitions sont exclues on va avoir : 9 × 9 × 8 × 7 × 6 × 5 = 136 080, car chaque chiffre choisi ne peut plus être utilisé à nouveau.

Exercice 2

a) Dénombrer les anagrammes du mot « MATHS ».
b) Combien y a-t-il de nombres de 10 chiffres tous différents alternant chiffres pairs et impairs ?
Notons que les nombres 1234567890 et 2345678901 sont convenables, mais pas le nombre 0123456789 qui n'a en fait que 9 chiffres (il s'écrit 123456789).

Solution

a) Une anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot.
Comme MATHS a 5 lettres toutes différentes, on calcule : 5 ! = 120.
Le mot MATHS possède donc 120 anagrammes.
b) Il y a 4 possibilités paires et 5 possibilités impaires pour le premier chiffre (qui ne peut pas être nul).
   - Détermination du nombre de nombres dont ***le premier chiffre est pair***.
   Cela donne 4 possibilités (car il ne peut pas être nul). On répartit alors les 4 autres chiffres pairs sur leurs emplacements (de rangs 3, 5, 7 et 9).
   Cela donne 4 ! permutations possibles.
   On répartit les 5 chiffres impairs sur leurs emplacements (de rangs 2, 4, 6, 8 et 10). Cela donne 5 ! permutations possibles. On calcule alors : 4 × 4 ! × 5 ! = 11 520.

   Il y a **11 520** nombres convenables dont le premier chiffre est pair.
   - Détermination du nombre de nombres dont ***le premier chiffre est impair***.
   Cela donne 5 possibilités. On répartit alors les 4 autres chiffres impairs sur leurs emplacements (de rangs 3, 5, 7 et 9). Cela donne 4 ! permutations possibles. On répartit les 5 chiffres pairs sur leurs emplacements (de rangs 2, 4, 6, 8 et 10). Cela donne 5 ! permutations possibles.

On calcule alors : $5 \times 4! \times 5! = 5! \times 5! = 14\,400$.

Il y a **14 400** nombres convenables dont le premier chiffre est impair.

Ensuite on utilise le principe additif, en sommant : 11 520 + 14 400 = 25 920.

Il y a donc au total : **25 920** nombres de 10 chiffres tous différents alternant chiffres pairs et impairs.

Exercice 3

De 25 calculatrices, 5 ont un défaut. On en choisit 4 de manière aléatoire. Quel est le nombre de façons qu'aucune de ces 4 ne soit défectueuse ?

Solution

C_{25}^{4} = 12 650 possibilités de choisir 4 machines parmi 25 sans contraintes.

Le nombre de choisir "4 machines non défectueuses" est de C_{20}^{4} = **4 845** (ce nombre est le choix de 4 calculatrices parmi 20 en état de marche).

Exercice 4

Pour se mettre en tenue règlementaire, un chirurgien possède 7 callots (3 bleus et 4 blancs), 6 bavettes (3 bleues et 3 blanches) et 8 blouses (5 bleues et 3 blanches).

a) De combien de façon peut-il s'habiller ?
b) Le chirurgien refuse de s'habiller tout en bleu, quel est le nombre de tenues qu'il pourra mettre ?

Solution

a) Le chirurgien peut s'habiller de : $7 \times 6 \times 8$ = **336** façons
b) Puisque le chirurgien refuse de s'habiller tout en bleu.

1ère méthode : les possibilités sont schématisées comme suit :

Callots bleus	Bavettes bleues	Blouses bleues	Nombre de façons
0	0	0	$4 * 3 * 3 = 36$
1	0	0	$3 * 3 * 3 = 27$
1	1	0	$3 * 3 * 3 = 27$
1	0	1	$3 * 3 * 5 = 45$
0	1	0	$4 * 3 * 3 = 36$
0	1	1	$4 * 3 * 5 = 60$
0	0	1	$4 * 3 * 5 = 60$

On obtient **291** façons

2ème méthode : le nombre de tenues bleues étant égal à $3*3*5 = 45$ qu'on va déduire du nombre total de tenues pour avoir : 336 – 45 = **291** façons d'obtenir des tenues non toutes bleues et acceptables par le chirurgien.

Exercice 5

Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants.

De combien de façons différentes peut-on les placer sur une ligne si :

a) Ils peuvent se placer librement ?
b) Les hommes désirent rester ensemble ?

Solution

a) On considère les individus (10 + 8 + 7 = 25) comme étant tous discernables, nous sommes dans le cas d'une permutation de 25 éléments, le résultat est de **25 !** permutations possibles.

b) On considère les hommes comme étant un seul et unique individu. Ayant regroupé les 10 hommes en un seul individu, alors en sommant (1 + 8 + 7 = 16 éléments) à permuter ensemble pour donner 16 ! permutations possibles.

Mais, à l'intérieur du groupe d'homme nous avons 10 ! permutations possibles. En appliquant le principe fondamental du dénombrement on obtient finalement 16 ! × 10 !

Exercice 6

L'enseignant de Biostatistique dispose de 6 exercices de dénombrement, 15 de statistique univariée et 9 de statistique double.

a) Il compose le sujet de la 1$^{\text{ère}}$ EMD contenant un exercice de dénombrement, un de statistique univariée et un de statistique double.

Combien de sujets différents peut-il composer si l'ordre des exercices n'est pas important ?

b) L'enseignant se rend compte que de tels sujets sont trop longs. Il pense qu'un sujet contenant exactement 2 exercices de types différents suffit.

Combien de sujets différents peut-il finalement composer si l'ordre des exercices n'est toujours pas important ?

Solution

a) On utilise le principe multiplicatif. On calcule : 6 × 15 × 9 = 810.

Le professeur peut composer **810** sujets différents.

b) On cherche combien y a-t-il de sujets contenant un exercice de dénombrement et un exercice de statistique univariée. On calcule : 6 × 15 = 90

Le professeur peut composer **90** sujets de ce type.

On fait de même avec les sujets contenant un exercice de dénombrement et un exercice de statistique bivariée. On calcule : 6 × 9 = 54

Le professeur peut composer **54** sujets de ce type.

On recommence avec les sujets contenant un exercice de statistique univariée et un exercice de statistique double. On calcule : 15 × 9 = 135

Le professeur peut composer **135** sujets de ce type.

On utilise enfin le principe additif de l'analyse combinatoire. En sommant, on trouve un total de : 90 + 54 + 135 = 279

Le professeur peut composer **279** sujets différents.

Exercice 7

L'état de santé d'un malade nécessite la prescription de deux sirops différents et de trois variétés de comprimés ; son médecin traitant détient trois types de sirops et quatre variétés de comprimés qui auraient des effets analogues.

De combien de façons différentes pourrait-il rédiger son ordonnance, sachant toutefois qu'un certain sirop ne doit en aucun cas être pris en même temps qu'un certain comprimé ?

Solution

1) Nombre total d'ordonnances que le médecin peut prescrire avec deux sirops parmi trois et de trois comprimés parmi quatre : $C_3^2 * C_4^3$ = 12 ordonnances différentes.

   On combine 2 sirops parmi 3 : $\rightarrow S_1S_2 ; S_2S_3 ; S_1S_3$.

   On combine 3 comprimés parmi 4 : $\rightarrow C_1C_2C_3 ; C_1C_2C_4 ; C_1C_3C_4 ; C_2C_3C_4$

   Donc le nombre d'ordonnances est le produit : 3 * 4 = 12 ordonnances $\neq$.

2) Le nombre d'ordonnances avec le sirop S_1 et sans le comprimé C_1 ($C_3^2 * C_{4-1}^3$) ou avec le comprimé C_1 et sans le sirop S_1 ($C_{3-1}^2 * C_4^3$) et enfin on retranche l'ordonnance avec le sirop S_1 et le comprimé C_1 ($C_2^2 * C_3^3$) ; au final on aura ce qui suit : $\rightarrow$

$$C_3^2 * C_{4-1}^3 + C_{3-1}^2 * C_4^3 - C_2^2 * C_3^3 = 3 + 4 - 1 = 6 \text{ ordonnances différentes.}$$

<u>*Autre méthode :*</u> Le nombre d'ordonnances avec le sirop x et le comprimé y dans l'ordonnance : (sirop$_x$ C_1^1). C_{3-1}^1 * (comp$_y$ C_1^1) * $C_{4-1}^2 = 2 * 3 = 6 \rightarrow 12 - 6 = 6$ ord $\neq$.

Donc *le nombre d'ordonnances à prescrire* est le complémentaire c'est-à-dire où le sirop x et le comprimé y ne figurent pas ensemble *est de* : 12 – 6 = 6 ordonnances différentes.

<u>*Exercice 8*</u>

Une ville d'Algérie dispose de 5 cliniques. Une intoxication alimentaire a touché 15 personnes. De combien ces 15 personnes intoxiquées peuvent-elles être réparties sur les 5 cliniques (au regard du nombre d'intoxiquées affectés à chaque clinique : les intoxiqués ne sont pas discernables).

a) Si le nombre d'intoxiqués que reçoit chaque clinique n'est pas limité ?
b) Si une certaine clinique des 5 reçoit exactement 7 personnes intoxiquées ?
c) Si deux certaines clinique (A et B) reçoivent entre-elles 10 intoxiqués ?

Solution

L'ordre ne doit pas être respecté car les intoxiqués ne sont pas discernables. Il y a répétition car plusieurs intoxiqués peuvent aller dans la même clinique.

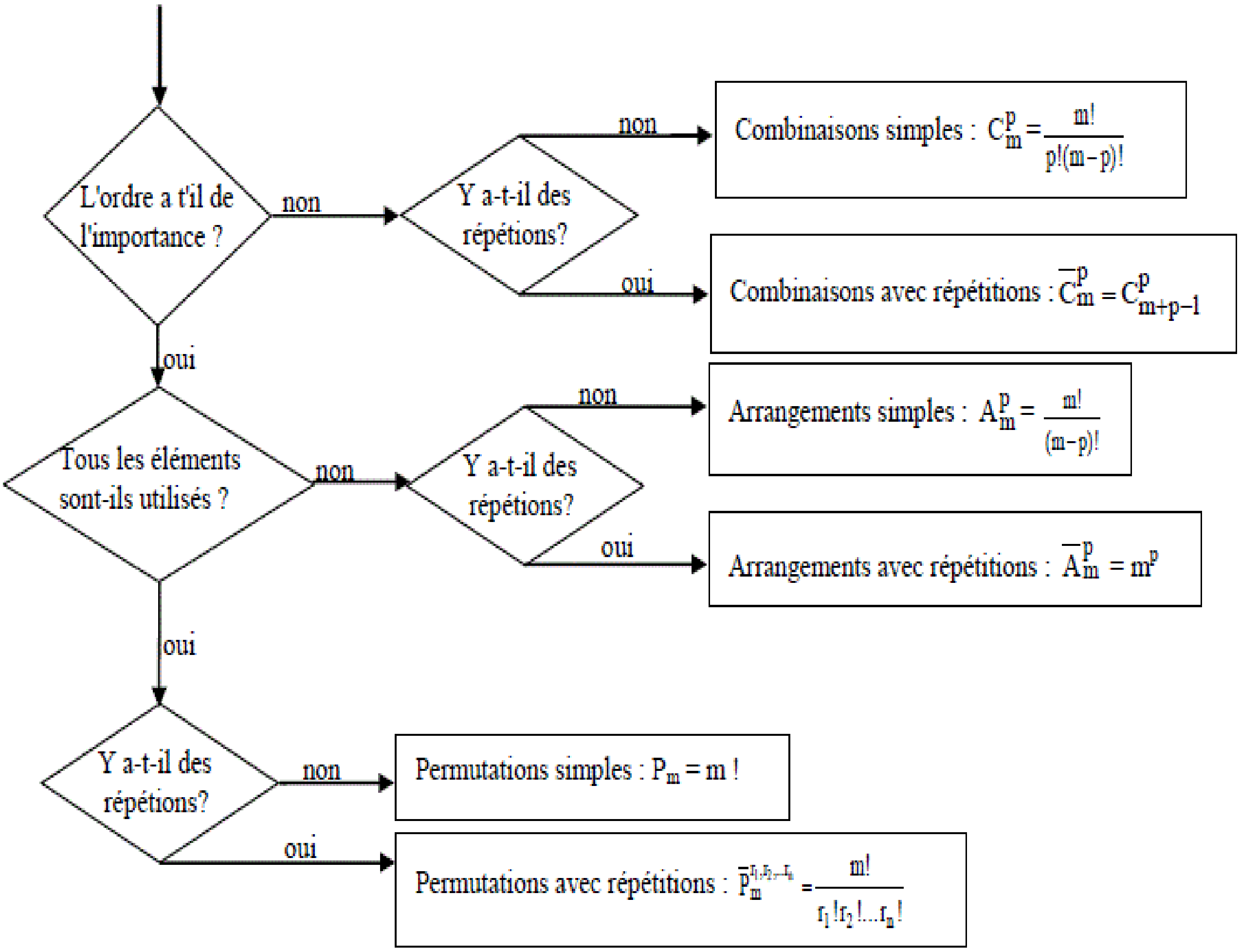
a) Nous avons 5 cliniques et 15 intoxiqués.
   La formule du dénombrement à utiliser est donc la combinaison avec répétition des 15 intoxiqués dans les 5 cliniques : $K_5^{15} = C_{5+(15-1)}^{15} = C_{19}^{15}$ = 3 876 répartitions différentes.
b) Si une certaine clinique (disons A par exemple) reçoit exactement 7 intoxiqués ; ces 7 intoxiqués vont être choisis d'une seule manière $K_1^7 = C_7^7 = 1$ et le reste des intoxiqués va être distribué sur les 4 cliniques restantes : $K_1^7 * K_4^8 = C_{1+(7-1)}^7 * C_{4+(8-1)}^8 =$

$$C_7^7 * C_{11}^8 = 1 * 165 = 165 \text{ répartitions différentes.}$$

c) Les deux cliniques (par exemple A et B) reçoivent entre-elles 10 intoxiqués et ces 10 intoxiqués vont être choisis de $K_2^{10} = C_{2+(10-1)}^{10} = 11$ manières différentes $\Rightarrow$
   Alors le résultat final va être : $K_2^{10} * K_3^5 = C_{11}^{10} * C_7^5 = 11 * 21 = 231$ répartitions différentes.

Organigramme de la résolution d'un problème en analyse combinatoire

Quelles questions se poser lors de la résolution d'un problème d'application directe en analyse combinatoire ?



Ultérieurement, nous rencontrerons des situations plus générales qui ne peuvent être résolues uniquement par le questionnement de ce tableau.