UNIVERSITE DE BATNA_2

SERIE DE TD N° 4

FACULTE DE MEDECINE

DE BIOSTATISTIQUES

1ère Année Médecine, 2022/2023

TD sur le calcul des probabilités

Exercice 1

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « Tirer une boule blanche ».

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».

C : « Tirer une boule noire ou une boule rouge ».

1) A et B sont-ils incompatibles ?
2) B et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase : négation de A, négation de B.

Solution :

1) A et B sont incompatibles car une boule ne peut pas être simultanément blanche et non blanche.
2) B et C ne sont pas incompatibles car le tirage d'une boule noire les réalise simultanément.
3) L'évènement $\bar{A}$ est « Tirer une boule noire ou rouge ».
4) L'évènement $\bar{B}$ est « Tirer une boule blanche ou rouge »

Exercice 2

Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux évènements suivants :

A : « La somme obtenue est au moins égale à 5 ».

B : « La somme obtenue est au plus égale à 5 ».

C : « La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ».

1) A et B sont-ils contraires ?
2) B et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase $\bar{C}$.
4) A et $\bar{C}$ sont-ils incompatibles ?

Solution :

1) A et B ne sont pas contraires car une somme égale à 5 les réalise simultanément.
2) B et C sont compatibles.
3) L'évènement $\bar{C}$ est « la somme obtenue est supérieure ou égale à 3 »
4) A et $\bar{C}$ ne sont pas incompatibles car ils se réalisent simultanément par une somme supérieure ou égale à 5.

Exercice 3

Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine un tiers de la population. On a constaté qu'un malade sur 10 est vacciné et que la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit grippée est de 0.25.

Quelle est la probabilité pour un individu vacciné d'être grippé malgré tout ?

Solution

Soient les évènements : V « Individu vacciné » et G « Individu grippé »

On a par hypothèse : P (G) = 0.25

$P(V) = 1/3 \Rightarrow P(\bar{V}) = 2/3$; $P(V|G) = 1/10 \Rightarrow P(\bar{V}|G) = 9/10$.

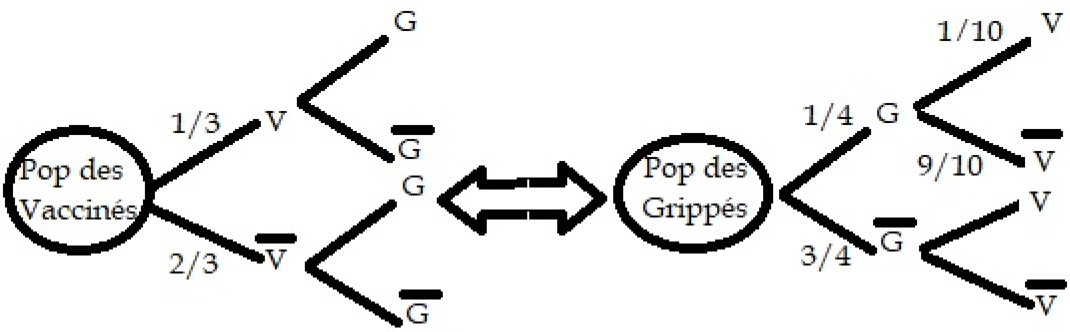
La formule des probabilités totales appliquée au système complet des évènements $\{G, \bar{G}\}$ permet de calculer :

$P(V) = P(G) * P(V|G) + P(\bar{G}) * P(V|\bar{G}) = 1/3$; posons $P(V|\bar{G}) = x \Rightarrow$

$P(V) = 0.25 * 0.1 + 0.75 * x = 1/3 \Rightarrow x = 37/90$

$P(G|V) = \frac{P(G\cap V)}{P(V)} = \frac{P(G)*P(V|G)}{P(V)} = \frac{(1/4)*(\frac{1}{10})}{1/3} = \frac{3}{40} = 0.075$

<u>Les diagrammes arborescents nécessaires au calcul des probabilités</u>



Exercice 4

Pour contrôler un lot de médicament (Amoxicilline) on prélève simultanément 5 comprimés d'un bocal contenant 40 comprimés de mêmes dimensions et de couleurs différentes : 12 rouges, 8 jaunes, 10 blancs et 10 gris. Quelle est la probabilité que :

1) Les 5 comprimés soient jaunes ?
2) Au moins un comprimé soit rouge ?

Solution

Du bocal de 40 comprimés (12 R ; 8 J ; 10 B ; 10 G), on tire simultanément 5 comprimés. Les évènements élémentaires (comprimés dans le bocal) sont équiprobables ; le nombre de cas possibles de 5 comprimés est C_{40}^{5} = 658 008 résultats différents.

a) Le nb de cas favorables « 5 J » est C_8^5 = 56 résultats différents et la probabilité que les 5 comprimés tirés soient jaunes est le rapport p (5 jaunes) = $\frac{56}{658\ 008} = 8.5 \times 10^{-5}$

<u>*Autre méthode :*</u> En utilisant le théorème des probabilités composées, on peut écrire :

$P(5 \text{ jaunes}) = p(J \cap J \cap J \cap J \cap J) = p(J)*p(J/J)*p(J/J \cap J)*p(J/J \cap J \cap J)*p(J/J \cap J \cap J \cap J) = \frac{8.7.6.5.4}{40.39.38.37.36} = 8.5 \times 10^{-5}$

b) P (au moins 1 rouge) est : p(1R ∪ 2R ∪ 3R ∪ 4R ∪ 5R) = p(1R) + p(2R) + p(3R) + p(4R) + p(5R) car ces évènements sont incompatibles (évènements exclusifs). Le nombre de cas favorables à l'évènement « au moins 1 rouge » est : $C_{12}^{1} * C_{28}^{4} + C_{12}^{2} * C_{28}^{3} + C_{12}^{3} * C_{28}^{2} + C_{12}^{4} * C_{28}^{1} + C_{12}^{5} * C_{28}^{0}$ = 12x20475 + 66x3276 + 220x378 + 495x28 + 792 = 559 728

Donc la probabilité cherchée : p (au moins 1 rouge) = $\frac{559\ 728}{658\ 008} = 0.85064 \cong 85\ \%$.

<u>Autre méthode :</u> par le complémentaire. P (au moins 1R) = 1 – p (aucun rouge)

$1 - \frac{C_{12}^{0} * C_{28}^{5}}{C_{40}^{5}} = 1 - 0.149359887 = 0.850640113 \cong 85\ \%$.

Exercice 5

On place dans une boite vingt gélules d'un médicament de mêmes dimensions mais de couleurs différentes ; dix jaunes et dix vertes. On tire successivement six gélules, chaque gélule tirée est remise dans la boite après qu'on ait examiné sa couleur. Calculer la probabilité :

1) D'avoir tiré quatre gélules jaunes et deux gélules vertes dans cet ordre.
2) D'avoir tiré six gélules vertes.
3) Que les six gélules tirées ne soient pas toutes de même couleur.

Solution

C'est un tirage successif (l'une après l'autre) avec remise (non exhaustif) de 6 gélules d'un médicament d'une boîte contenant 20 gélules ; c'est donc un arrangement avec répétition dont la formule est $R_n^p = R_{20}^6 = 20^6$ = 64 000 000 cas possibles.

a) Probabilité d'avoir 4 gélules jaunes et 2 gélules vertes : P (4J + 2V) = p (J ∩ J ∩ J ∩ J ∩ V∩V) = p(J)*p(J)*p(J)*p(J)*p(V)*p(V) = $(0.5)^4 * (0.5)^2 = 0.5^6$ = 0.015625

<u>Autre méthode :</u> P (4J + 2V) = $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{10^4\, 10^2}{20^6} = 0.015625$

b) Probabilité d'avoir 6 gélules vertes : P (6V) = p (V ∩ V ∩ V ∩ V ∩ V∩V) = p(V)*p(V)*p(V)*p(V)*p(V)*p(V) = 0.5^6 = 0.015625

c) Probabilité qu'elles ne soient pas toutes de même couleur = ? On procède par l'évènement complémentaire ; probabilité qu'elles soient toutes de même couleur c'est-à-dire ou bien jaunes ou bien vertes. Cette probabilité est égale à deux fois la probabilité de 6 gélules vertes calculée en b)

Probabilité d'avoir (6 gélules de couleur différente) = 1 – Probabilité (même couleur) = 1 – 2*0.015625 = 0.96875 d'où la probabilité cherchée = 0.96875

<u>Note :</u> Il y a une *<u>2ème Méthode</u>* pour calculer la probabilité d'avoir 6 gélules de couleur différente ; cette méthode est la ***loi binomiale*** **B (n = 6 ; p = 0.5)** à être étudiée ultérieurement.

Exercice 6

Lors d'un référendum, deux questions étaient posées. 65 % des personnes ont répondu « oui » à la première question, 51 % ont répondu « oui » à la seconde question et 46 % ont répondu « oui » aux deux questions.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondue « oui » à l'une ou l'autre des questions ?
2) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondue « non » aux deux questions ?

Solution

Soient les évènements suivants :

V_1 = « Répondre Oui à la 1ère question » $\Rightarrow P(V_1) = 65\ \%$

V_2 = « Répondre Oui à la 2ème question » $\Rightarrow P(V_2) = 51\ \%$

$V_1 \cap V_2$ = « Répondre Oui aux 2 questions » $\Rightarrow P\ (V_1 \cap V_2) = 46\ \%$

a) $P\ (V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P\ (V_1 \cap V_2) = 65\ \% + 51\ \% - 46\ \% = 70\ \%$

b) $P\ (\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = ?$ Les Lois de MORGAN sont les suivantes :
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   Donc $P\ (\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = P\ (\overline{V_1 \cup V_2}) = 1 - P\ (V_1 \cup V_2) = 1 - 0.7 = 0.3 = 30\ \%$.

Exercice 7

Les cultures des tissus végétaux peuvent être infectées soit par des champignons, soit par des bactéries. La probabilité d'une infection par un champignon est 0.15 et la probabilité d'une infection par une bactérie est 0.08.

1) Quelle est la probabilité d'une infection simultanée par champignons et bactéries
   a) Dans le cas où les infections sont indépendantes ?
   b) Dans le cas où les champignons secrètent un antibiotique auquel sont sensibles les bactéries ; la présence des champignons empêche alors le développement des colonnes bactériennes dans 50 % des cas ?
2) Calculer la probabilité d'une infection quelle que soit l'origine ? comme dans les deux cas de la question précédente.

Solution

Soient les évènements suivants : B = « la culture est infectée de bactéries » ;
C = « la culture est infectée de champignons »

Les données sous forme d'un tableau de contingence :

%	B	$\overline{B}$	Total
C	$P\ (B \cap C) = 1.2$	13.8	15
$\overline{C}$	6.8	78.2	85
Total	8	92	**100**

1) Probabilité d'infection simultanée par champignons et bactéries.
   a. Si les infections sont indépendantes

   On cherche la probabilité de l'évènement $B \cap C$.

   Par définition de l'indépendance des évènements en probabilité, on a :

$P(B \cap C) = P(B) * P(C) = 0.08 * 0.15 = 0.012$

b. D'après les hypothèses, les champignons secrètent un antibiotique ayant une influence sur les bactéries, et par conséquent on a une probabilité conditionnelle qui est $P(B|C)$.

Alors, la probabilité conditionnelle : $P(B|C) = ½ * P(B) = 0.04$

$P(B \cap C) = P(B|C) * P(C) = 0.04 * 0.15 = 0.006$

2) Calcul de la probabilité d'une infection quelle que soit l'origine, il s'agit donc des évènements compatibles et on applique la formule : $\mathbf{P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C \cap B)}$

a. Evènements indépendants $\Rightarrow P(C \cap B) = P(C) * P(B)$

$P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C) * P(B) = 0.15 + 0.08 - 0.012 = 0.218$

b. Evènements liés (dépendants) $\Rightarrow P(C \cap B) = P(C) * P(B|C)$

$P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C) * P(B|C) = 0.15 + 0.08 - 0.15 * 0.04 = 0.224$

Exercice 8

Une maladie (exemple : Cancer) est présente dans une population dans la proportion d'une personne malade sur 10 000, soit 0.01 %

Un patient vient de passer le test pour le dépistage de cette maladie. Le médecin le convoque pour lui annoncer le résultat : mauvaise nouvelle, il est positif. Il lui indique alors que ce test est plutôt fiable : « si vous êtes malade, le test sera positif dans 99 % des cas ; si vous ne l'êtes pas, il sera négatif dans 99.8 % des cas ».

A votre avis, puisque le test est positif, quelle est la probabilité que le patient ait la maladie ?

Solution

Soient les évènements suivants : C = « le patient a la maladie du Cancer » ; $P(C) = 0.01$

T = « le test est positif » ; $P(T|C) = 99\ \%$; $P(\bar{T}|\bar{C}) = 99.8\ \%$

Les données sous forme d'un tableau de contingence :

%	C	$\bar{C}$	Total
T	$P(C \cap T) = 0.99*10^{-4}$	$P(\bar{C} \cap T) = 19.998*10^{-4}$	$20.988*10^{-4}$
$\bar{T}$	$P(C \cap \bar{T}) = 0.01*10^{-4}$	$P(\bar{C} \cap \bar{T}) = 9979.002*10^{-4}$	$9979.012*10^{-4}$
Total	10^{-4}	$9999*10^{-4}$	**1**

$P(C|T) = \frac{99}{2098.8} = 0.047169811 \cong 4.7\ \%$ $\quad$ $P(\bar{C}|T) = \frac{1998.8}{2098.8} = 0.952830188 \cong 95.3\ \%$

$P(C|\bar{T}) = \frac{1}{997901.2} = 1.002*10^{-6} \cong 0\ \%$ $\quad$ $P(\bar{T}|\bar{C}) = \frac{997900.2}{997901.2} = 0.999998997 \cong 100\ \%$

Exercice 9

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades (M) un vacciné (V) pour quatre non–vaccinés ($\bar{V}$). On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a) Démontrer que la probabilité de tomber malade est de 5/48.
b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour une personne non–vaccinée ?
c) Le vaccin est–il efficace ?

Solution

Soient les évènements : V « vacciné » et M « malade »

On a : $P(V) = 1/4$ et donc $P(\overline{V}) = ¾$ De plus : $P(\overline{V} \mid M) = 4 * P(V \mid M)$;

Puisqu'on a : $P(V \mid M) + P(\overline{V} \mid M) = 1 \Rightarrow P(V \mid M) = 1 - P(\overline{V} \mid M) = 1 - 4 * P(V \mid M) \Rightarrow P(V \mid M) = 1/5$ et donc $P(\overline{V} \mid M) = 4/5$.

Par hypothèse, on a aussi : $P(M \mid V) = 1/12$ et donc $P(\overline{M} \mid V) = 11/12$.

a) La formule des probabilités totales appliquée au système complet des évènements $\{V, \overline{V}\}$ permet de calculer :

$P(M) = P(V) * P(M \mid V) + P(\overline{V}) * P(M \mid \overline{V})$; or $P(M \mid \overline{V}) = \frac{P(M \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{P(M) * P(\overline{V} \mid M)}{P(\overline{V})} = \frac{P(M) * (4/5)}{(3/4)} \Rightarrow P(M \mid \overline{V}) = \frac{16 * P(M)}{15}$ d'où $P(M) = \frac{1}{4} * \frac{1}{12} + \frac{3}{4} * \frac{16}{15} * P(M) \Rightarrow$

$$P(M) = \frac{1}{48} + \frac{4}{5} P(M) \Rightarrow P(M)\{1 - \frac{4}{5}\} = \frac{1}{48} \Rightarrow P(M) = \frac{5}{48}$$

Autre méthode : à partir du 1[er] diagramme arborescent, et en suivant le 1er et le 3[ème] chemin on aura $P(M) = \frac{1}{48} + \frac{1}{12} = \frac{5}{48}$

b) $P(M \mid \overline{V}) = \frac{16 * P(M)}{15} = \frac{16}{15} * \frac{5}{48} = \frac{1}{9}$

c) ***<u>D'après ces calculs :</u>*** 12 personnes tombent malades et 96 ne tombent pas malades sur 108 non vaccinées.

<u>Par contre :</u> 9 personnes seulement tombent malades et 99 ne tombent pas malades sur 108 vaccinées. ***<u>C'est un peu efficace</u>***.

<u>Vérification du Théorème de BAYES</u> :

$P(M \mid V) = 1/12$ et $P(\overline{M} \mid V) = 11/12$

$P(M \mid \overline{V}) = 1/9$ et $P(\overline{M} \mid \overline{V}) = 8/9$

- $P(M) = 1/4 * 1/12 + ¾ * 1/9 = 5/48$
- $P(\overline{M}) = 1/4 * 1/9 + ¾ * 8/9 = 43/48$

Diagramme arborescent :

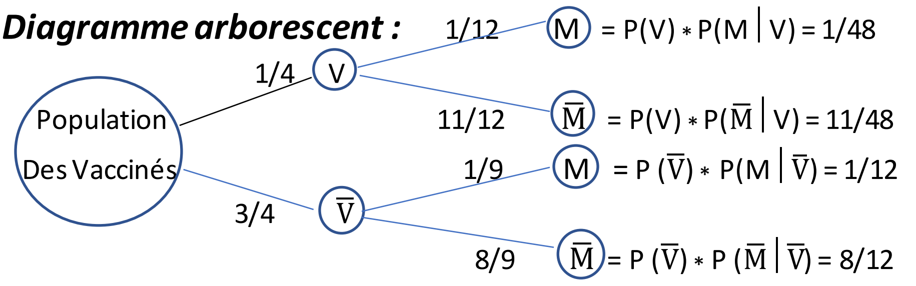


Diagramme arborescent équivalent au précédent :