UNIVERSITE DE BATNA_2 | **FACULTE DE MEDECINE DE BIOSTATISTIQUES**

SERIE DE TD N° 5

1ère Année Médecine, 2022/2023

TD sur les variables aléatoires

Exercice 1

Le nombre X de kg de tomates récoltés dans un jardin en une semaine est une V.A. à valeurs entières, telle que :

X	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq x)$	0.1	0.5	0.75	0.9	0.95	1

Calculer : E(X) et V(X).

Tracer le graphe de la fonction de répartition.

Solution :

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n) = \boldsymbol{1.8}$

$= 0 * 0.1 + 1 * 0.4 + 2 * 0.25 + 3 * 0.15 + 4 * 0.05 + 5 * 0.05 = 1.8 \rightarrow \mu = 1.8$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)^2] = E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2 =$

$0^2 * 0.1 + 1^2 * 0.4 + 2^2 * 0.25 + 3^2 * 0.15 + 4^2 * 0.05 + 5^2 * 0.05 - 1.8^2 = 4.8 - 1.8^2 = \boldsymbol{1.56}$

Exercice 2

Un agriculteur a entreposé dans un local humide 15 doses d'un herbicide total et 10 doses d'un fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes sont indifférenciables. Chaque dose a la même probabilité d'être tirée.

En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 5 doses au hasard. Soit X la Variable Aléatoire égale au nombre de doses d'herbicide prises parmi ces 5 doses.

1) Déterminer la distribution de probabilité de X.
2) Calculer la fonction de répartition et tracer son graphe.
3) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Solution :

Dans l'entrepôt il y a 25 doses dont 15 d'herbicides et 10 de fongicides.

Le nombre de possibilités de tirer 5 doses des 25 est de : N = C_{25}^{5} = 53130 cas différents.

Les valeurs à être attribuées à la V.A. X sont de 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 doses d'herbicides.

Le nombre de cas favorables au tirage de doses d'herbicides est de :

Zéro dose d'herbicide : $C_{15}^{0} * C_{10}^{5}$ = 1 * 252 = 252 cas ≠.

Une dose d'herbicide : $C_{15}^{1} * C_{10}^{4}$ = 15 * 210 = 3 150 cas ≠.

Deux doses d'herbicides : $C_{15}^{2} * C_{10}^{3}$ = 105 * 120 = 12 600 cas ≠.

Trois doses d'herbicides : $C_{15}^{3} * C_{10}^{2}$ = 455 * 45 = 20 475 cas ≠.

Quatre doses d'herbicides : $C_{15}^{4} * C_{10}^{1}$ = 1 365 * 10 = 13 650 cas ≠.

Cinq doses d'herbicides : $C_{15}^{5} * C_{10}^{0}$ = 3 003 * 1 = 3 003 cas ≠.

Les probabilités seront reportées dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	Total
$N * p_i$	252	3150	12600	20475	13650	3003	53130
$N * x_i * p_i$	0	3150	25200	61425	54600	15015	159390
$N * x^2_i * p_i$	0	3150	50400	184275	218400	75075	531300
n_i cumulé	252	3402	16002	36467	50127	53130	

L'espérance de X est : E(X) = 159 390/53 130 = 3 = μ

La variance de X est : V(X) = 531300/53130 – 3² = 1 et $\sigma_x = 1$

La fonction de répartition est une courbe en escalier, d'autant plus que le caractère d'étude est une variable de quantité discrète qui est « le nombre de doses ».

Exercice 3

Afin de mener une expérimentation de pharmacologie animale, on tire au hasard 2 comprimés dans un lot opaque qui en contient 7, indiscernables au toucher. Parmi ces comprimés, 1 comprimé est sans principe actif (excipients seuls), 2 sont dosés à 100 mg de principe actif, 2 dosés à 200 mg, et les 2 derniers sont dosés à 300 mg.

Les 2 comprimés tirés sont administrés à un animal donné, et l'on considère la Variable Aléatoire : X représentant la dose active ingérée par l'animal.

1) Calculer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance et la variance.
3) Calculer la fonction de répartition et tracer son graphe.

Solution :

Le pot contient 7 comprimés où un comprimé est dosé à 0 mg, deux comprimés dosés à 100 mg, deux autres dosés à 200 mg et les deux derniers dosés à 300 mg.

Le nombre de possibilités de tirer 2 comprimés du pot est : N = C_7^2 = 21 = cas ≠.

Les valeurs à attribuer à la variable aléatoire X sont : 100 ; 200 ; 300 ; 400 ; 500 ; 600 mg.

Le nombre des cas favorables aux valeurs de la V.A. X :

1 comprimé de 0 et le 1er comprimé de 100 ou bien le 2ème comprimé de 100 : donc 2 cas différents pour la dose de 100 mg.

$C_1^1 * C_2^1 * C_2^0 * C_2^0$ = 2 cas ≠ : la 1ère combinaison est dosée à 0 mg puis à 100 mg. Idem pour la 2ème

$C_1^1 * C_2^0 * C_2^1 * C_2^0$ = 2 cas ≠ et $C_1^0 * C_2^2 * C_2^0 * C_2^0$ = 1 cas ≠ pour la dose de 200 mg.

$C_1^1 * C_2^0 * C_2^0 * C_2^1$ = 2 cas ≠ et $C_1^0 * C_2^1 * C_2^1 * C_2^0$ = 4 cas ≠ pour la dose de 300 mg.

$C_1^0 * C_2^0 * C_2^2 * C_2^0$ = 1 cas ≠ et $C_1^0 * C_2^1 * C_2^0 * C_2^1$ = 4 cas ≠ pour la dose de 400 mg.

$C_1^0 * C_2^0 * C_2^1 * C_2^1$ = 4 cas ≠ pour la dose de 500 mg.

$C_1^0 * C_2^0 * C_2^0 * C_2^2$ = 1 cas pour la dose de 600 mg.

Les probabilités et les valeurs de X sont données dans le tableau suivant :

x_i	100	200	300	400	500	600	Total
p_i	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	1
$x_i * p_i$	$\frac{200}{21}$	$\frac{600}{21}$	$\frac{1800}{21}$	$\frac{2000}{21}$	$\frac{2000}{21}$	$\frac{600}{21}$	$\frac{7200}{21} = 342.86$
$N * x^2_i * p_i$	20 000	120 000	540 000	800 000	1 000 000	360 000	2 840 000
n_i cumulé ↑	2	5	11	16	20	21	

La variance de X est : $V(X) = 2\,840\,000/21 - (7\,200/21)^2 = 17\,687.075$ et $\sigma_x = 132.992762$ mg, $\mu = 342.857143$ mg.

La fonction de répartition F(x) est une courbe en escalier car le caractère d'étude est une variable de quantité discrète qui est le nombre de comprimés donnant une certaine dose à être ingérée par l'animal (100 mg, 200 mg, …).

Exercice 4

Soit X une Variable Aléatoire avec une fonction de densité donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0.5(x-1) & si\ 1 \leq x < 2 \\ 0.5 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2} & si\ 3 \leq x < 4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1) Vérifier que f(x) est bien une fonction de densité et tracer son graphe.
2) Calculer $P(X \leq 2.5)$. Le résultat obtenu était-il prévisible ?
3) Déterminer la fonction de répartition associée à X.
4) Déterminer l'espérance et la variance de X et de $Y = X - 2.5$

Solution :

1) Si f(x) est une fonction de densité alors le caractère d'étude sera une quantité continue et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Le tracé du graphe de f(x) et le calcul de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x donne 1.

Cette aire est égale à : Aire $= I_1 + I_2 + I_3 = 1$.

Aire $= \int_1^2 0.5 * (x-1) * dx + \int_2^3 \frac{1}{2} * dx + \int_3^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right) * dx = I_1 + I_2 + I_3 = 1$.

Puisque cette aire nous donne 1 alors f(x) est bien une fonction de densité de probabilité.

2) Calcul de $P(X \leq 2.5) = \int_1^2 \frac{x-1}{2} dx + \int_2^{2.5} \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} * \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} * x \Big|_1^2 + \frac{1}{2} * x \Big|_2^{2.5} = 0.5$

   Ce résultat est prévisible car on a obtenu la moitié de l'aire qui est calculée en 1ère question.

3) Détermination de la fonction de répartition F(x).

   Si $1 \leq x < 2 \rightarrow F(x) = \int_1^x \frac{(t-1)dt}{2} = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ avec $F(1) = 0$ et $F(2) = ¼$.

   Si $2 \leq x < 3 \rightarrow F(x) = ¼ + \int_2^x \frac{dt}{2} = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ avec $F(2) = ¼$ et $F(3) = 3/4$.

   Si $3 \leq x < 4 \rightarrow F(x) = ¾ + \int_3^x \left(2 - \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{x^2}{4} + 2x - 3$ avec $F(3) = 3/4$ et $F(4) = 1$.

   Donc la fonction de répartition F(x) est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 1 \\ \left[\frac{1}{2} * (x-1)\right]^2 & si\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} * (2x-3) & si\ 2 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{4} * (x-6)(x-2) & si\ 3 \leq x < 4 \\ 1 & si\ \ \ x \geq 4 \end{cases}$$

4) Détermination de l'espérance de X = E(X).

   On sait que $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

   Si $1 \leq x < 2 \rightarrow I_1 = \int_1^2 0.5 * x(x-1) * dx = 5/12$

   Si $2 \leq x < 3 \rightarrow I_2 = \int_2^3 0.5 * x dx = 5/4 = 15/12$

Si $3 \leq x < 4 \rightarrow I_3 = \int_3^4 x(2 - 0.5 * x)dx = 5/6 = 10/12$

Donc $E(X) = 5/12 + 15/12 + 10/12 = 30/12 = 5/2 = 2.5 = \mu$.

Détermination de la variance de X = $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X - E(X)]^2$.

On sait que $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$

Si $1 \leq x < 2 \rightarrow I_1 = \int_1^2 0.5 * x^2(x-1) * dx = 17/24$

Si $2 \leq x < 3 \rightarrow I_2 = \int_2^3 0.5 * x^2 dx = 19/6 = 76/24$

Si $3 \leq x < 4 \rightarrow I_3 = \int_3^4 x^2(2 - 0.5 * x)dx = 67/24$

$E(X^2) = 17/24 + 76/24 + 67/24 = 160/24$

D'où : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 160/24 - 150/24 = 5/12 = V(X)$.

5) Soit $Y = X - 2.5 \rightarrow$ déterminer l'espérance et la variance de Y.

Rappel des théorèmes sur les Variables Aléatoires.

$E(X + a) = E(X) + a$	$E(aX) = a\,E(X)$	$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
$V(X + a) = V(X)$	$V(aX) = a^2\,V(X)$	$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + Cov(X, Y)$

En application du théorème cité plus haut, on a :

$E(Y) = E(X - 2.5) = E(X) - 2.5 = 2.5 - 2.5 = 0$

$V(Y) = V(X - 2.5) = V(X) = 5/12$.

Exercice 5

Une machine produit des pièces qui vont être vendues. La longueur de ces pièces, en mm, varie d'une pièce à l'autre selon la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} k * (4-x)(x-2) & si \;\; 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$$

1) Trouver la valeur de la constante k pour laquelle la fonction f(x) est une densité de probabilité. Tracer son graphe.
2) Déterminer la fonction de répartition F(x).
3) Déterminer l'espérance et la variance de la Variable Aléatoire en question.
4) Les pièces de longueur inférieure à 2.2 mm et celles de longueur supérieure à 3.8 mm sont inutilisables. Calculer la proportion de pièces inutilisables produites par cette machine.

Solution :

1) On sait que $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ avec : $f(x) = k(4-x)(x-2) = k(6x - x^2 - 8)$

En intégrant entre 2 et 4, on aura :

$I = \int_2^4 k(4-x)(x-2)dx = 1.$ $\quad I = k * \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} - 8x\right]_2^4 = 1 \rightarrow \; k = 3/4.$

2) Détermination de la fonction de répartition F(x).

On sait que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ dans l'intervalle d'étude qui est : [2 ; 4]

$F(x) = \int_2^x \frac{3}{4} * (6t - t^2 - 8)dt = \frac{9x^2}{4} - \frac{x^3}{4} - 6x + 5$ avec $F(2) = 0$ et $F(4) = 1$.

Donc la fonction de répartition F(x) est la suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 2 \\ \frac{9}{4}x^2 - \frac{x^3}{4} - 6x + 5 & si & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & si & x \geq 4 \end{cases}$$

3) Détermination de l'espérance de X = E(X).

E(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_2^4 \left(\frac{9}{2} * x^2 - \frac{3}{4} * x^3 - 6x\right) dx = \mu = 3.$

V(X) = E(X²) – E(X)² = $\int_2^4 \left(\frac{9}{2} * x^3 - \frac{3}{4} * x^4 - 6x^2\right) dx - \mu^2$ = 9.2 – 3² = 0.2

L'écart type de X est : $\sigma_x = \sqrt{0.2}$ = **0.4472**

4) Calcul de P (2.2 ≤ X ≤ 3.8) → en utilisant la fonction de répartition, on a :

P (2.2 ≤ X ≤ 3.8) = F (3.8) – F (2.2) = $[\frac{9}{4}.(3,8)^2 - \frac{3,8^3}{4} - 6.(3,8) + 5] - [\frac{9}{4}(2,2)^2 - \frac{(2,2)^3}{4} - 6(2,2) + 5]$ = 0.972 – 0.028 = **0.944**

Donc la probabilité demandée est : P (2.2 ≤ X ≤ 3.8) = **94.4 %**

Le **%** des pièces inutilisables produites par cette machine est : 100 – 94.4 = **5.6 %**

Exercice 6

Une V.A. continue X de densité f(x) = c (4x – x²) est définie sur l'intervalle [0 ; 4].

a) Calculer c.
b) Représenter graphiquement la loi de probabilité.
c) Donner F(X).
d) Calculer P (1.5 ≤ X ≤ 3.95).

Solution :

On sait que l'intégrale de la fonction de densité f(x) = c * (4x – x²) définie sur [0 ; 4] doit être égale à l'unité.

On sait également que la fonction de densité doit être positive $\forall\, x \in]-\infty ; +\infty[$.

Et enfin on doit avoir P (a < X < b) = $\int_a^b f(x)dx$.

1) Calcul de la constante c

Si 0 ≤ x ≤ 4 ; la fonction f(x) = c * (4x – x²) ≥ 0 ⇒ 4x – x² ≥ 0 et c ≥ 0

$\int_0^4 c * (4x - x^2)dx = 1 \Rightarrow \left[4 * c * \frac{x^2}{2} - c * \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{c} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}}$

2) Le graphe de f(x) est une parabole d'un maximum t.q. f'(x_0) = 2x_0 – 4 = 0 → x_0 = 2

3) Donner la fonction de répartition F(x).

Sur [0 ; 4] on a : F(x) = $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x c * (4t - t^2)dt = \frac{3}{32} \int_0^x (4t - t^2)dt = \left[\frac{3\,t^2}{16} - \frac{3}{32} * \frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{1}{32}(6\,x^2 - x^3)$; donc :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x\ < 0 \\ \frac{1}{32} * (6x^2 - x^3) & \text{sur } [0\ ;\ 4] \\ 1 & si\ \ x\ \geq 4 \end{cases}$$

$$Avec : \quad F(0) = 0 \quad et \quad F(4) = 1$$

4) P (1.5 ≤ X ≤ 3.95) = P (1.5 < X < 3.95) = F (3.95) – F (1.5) =
0.999535156 – 0.31640625 = **0.683128906** ;

Donc P (1.5 < X < 3.95) = **68.3 %**

5) Calcul de l'espérance mathématique E(X)

$E\ (X) = \int_0^4 \frac{3x}{32}(4x - x^2)dx = \int_0^4 \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{32}\, x^3\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{32}\,\frac{x^4}{4}\right]_0^4$ = **2**

Exercice 7

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} a & x \leq -1 \\ b * x + c & x \in]-1\,;1[\\ d & x \geq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer les valeurs de a, b, c et d telle que F soit une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2) Représenter graphiquement la fonction F.
3) Déterminer la densité de probabilité associée à F.

Solution

On sait que la fonction de répartition F(x) doit être positive croissante et continue avec $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

1) Détermination des constantes a, b, c et d

   $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} a = a = 0$

   $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} d = d = 1$

   Pour que F soit continue, il faut qu'elle le soit sur chaque morceau et aux extrémités des intervalles de définition ; c'est-à-dire on doit avoir :

   $x \to F(x) = b * x + c$ continue $\leftrightarrow \lim_{x \to -1} F(x) = - b + c = F(-1) = 0$

   $\lim_{x \to +1} F(x) = b + c = F(1) = 1$; On obtient donc 2 équations à 2 inconnues

   $$\begin{cases} c - b = 0 \\ c + b = 1 \end{cases} \to b = c = \frac{1}{2}$$

   Il faut que F soit croissante et continue sur chaque intervalle de définition, alors :

   $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} * (x+1) & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

2) Représentation graphique
3) La densité de probabilité $f(x) = F'(x) = \begin{cases} (1/2) & -1 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$