



Analyse Combinatoire

Exercice n° 01 :

Un directeur d'entreprise se propose d'embaucher 7 ouvriers qui devront remplir des tâches identiques ; 14 candidats postulent.

1. De combien de manières, l'industriel peut-il opérer son choix ?
2. Idem mais un certain candidat sera embauché d'office.
3. Idem, mais un candidat sera exclu par manque d'expérience.

Solution :

- 1) $C_{14}^7 = 3\ 432$ manières différentes.
- 2) $C_{13}^6 * C_1^1 = 1\ 716$ manières différentes.
- 3) $C_{13}^7 * C_1^0 = 1\ 716$ manières différentes.

Exercice n° 02 :

Sur les 18 flacons de réactifs que détient un laborantin, 6 sont fabriqués dans un pays voisin ; on prend au hasard 4 flacons. On prélève une goutte de chaque flacon afin de former un mélange avec les quatre gouttes ; combien peut-on avoir de choix possibles :

1. Pour que le mélange soit purement de fabrication nationale ?
2. Pour qu'il soit de fabrication mixte ?

Solution :

- 1) $C_{12}^4 * C_6^0 = 495$ choix possibles
- 2) Fabrication mixte = Fabrication Totale - (fabrication étrangère + fabrication nationale) = $C_{18}^4 - (C_6^4 * C_{12}^0 + C_{12}^4 * C_6^0) = 3\ 060 - (15 + 495) = 2\ 550$ choix possibles.

Exercice n° 03 :

Dans le codage génétique de biologie cellulaire, l'Alphabet de base est constitué de 4 nucléotides désignés par les lettres, A « Adénine », C « Cytosine », G « Guanine » et U « Uracile ». On admet que les acides aminés sont des « mots » formés par une chaîne de 3 nucléotides :

1. Combien y a-t-il théoriquement d'acides aminés de ce genre ?
2. Parmi ces acides combien y en a-t-il qui contiennent 3 nucléotides différents ?
3. Combien y en a-t-il d'acides aminés contenant 3 nucléotides identiques ?
4. En déduire le nombre d'acides aminés contenant 2 nucléotides identiques.

Solution :

Les différentes lettres sont dans l'ensemble {A ; C ; G ; U} de cardinal 4.

- 1) Un acide aminé est formé de 3 lettres. Arrangement avec répétition $R_4^3 = 4^3$ acides \neq .
- 2) 3 nucléotides \neq : Arrangement sans répétition $A_4^3 = 24$ acides \neq .
- 3) 3 nucléotides identiques : comme il y a 4 lettres \neq , il y aura 4 acides \neq .
- 4) Déduction des acides à 2 nucléotides identiques : $64 - 24 - 4 = 36$ acides \neq .

Exercice n° 04 :

15 candidats ont participé à un concours.

1. Quel est le nombre de résultats possibles du concours (les classements possibles de 1 à 15) ?
2. On connaît les noms des candidats qui ont gagné la première et la deuxième place. Avec cette donnée, quel serait le nombre de résultats possibles ?

Solution :

- 1) Permutation sans répétition de 15 candidats : $15! = 1.307674368 * 10^{12}$.
- 2) Les 2 premières places sont connues. Il reste une permutation des 13 candidats :
 $13! = 6\ 227\ 020\ 800$ résultats possibles.

Exercice n° 05 :

Dans un concours de résidanat le nombre de candidats retenus est égal à 25.

On sait que ces 25 admis sont répartis sur trois spécialités : 10 en orthopédie, 8 en pédiatrie et 7 en gynécologie.

1. De combien de façons possibles peut-on répartir ces 25 admis sur les 3 spécialités en respectant ces quotas ?
2. On connaît les noms de 2 admis affectés en orthopédie, et ceux de 5 affectés en pédiatrie. De combien de façons peut-on terminer la répartition des autres admis sur les trois spécialités, toujours selon les quotas préfixés ?

Solution :

- 1) C'est une permutation avec répétition : $\frac{25!}{10! * 8! * 7!} = 21\ 034\ 470\ 600$ façons possibles.
- 2) On retranche 7 candidats connus (2 en orthopédie et 5 en pédiatrie) de 25 et c'est une permutation avec répétition des candidats restants : $\frac{18!}{8! * 3! * 7!} = 5\ 250\ 960$ façons possibles.

Exercice n° 06 :

Une ville d'Algérie dispose de 5 cliniques. Une intoxication alimentaire a touché 15 personnes. De combien de façons ces 15 personnes intoxiquées peuvent-elles être réparties sur les 5 cliniques (au regard du nombre d'intoxiqués affectés à chaque clinique : les intoxiqués ne sont pas discernables).

1. Si le nombre d'intoxiqués que reçoit chaque clinique n'est pas limité ?
2. Si une certaine clinique des 5 reçoit exactement 7 personnes intoxiquées ?
3. Si deux certaines cliniques (A et B) reçoivent entre-elles 10 intoxiqués ?

Solution :

L'ordre ne doit pas être respecté car les intoxiqués ne sont pas discernables. Il y a répétition car plusieurs intoxiqués peuvent aller dans la même clinique.

- 1) Nous avons 5 cliniques et 15 intoxiqués. La formule du dénombrement à utiliser est donc la combinaison avec répétition des 15 intoxiqués dans les 5 cliniques : $K_n^p = K_5^{15} = C_{n+p-1}^p = C_{19}^{15} = 3\ 876$ résultats possibles.
- 2) Si une certaine clinique (par exemple A connue) reçoit exactement 7 intoxiqués ; ces 7 intoxiqués vont être choisis d'une seule façon $K_1^7 = C_7^7 = 1$, et le reste des intoxiqués va être distribué sur les 4 cliniques restantes :

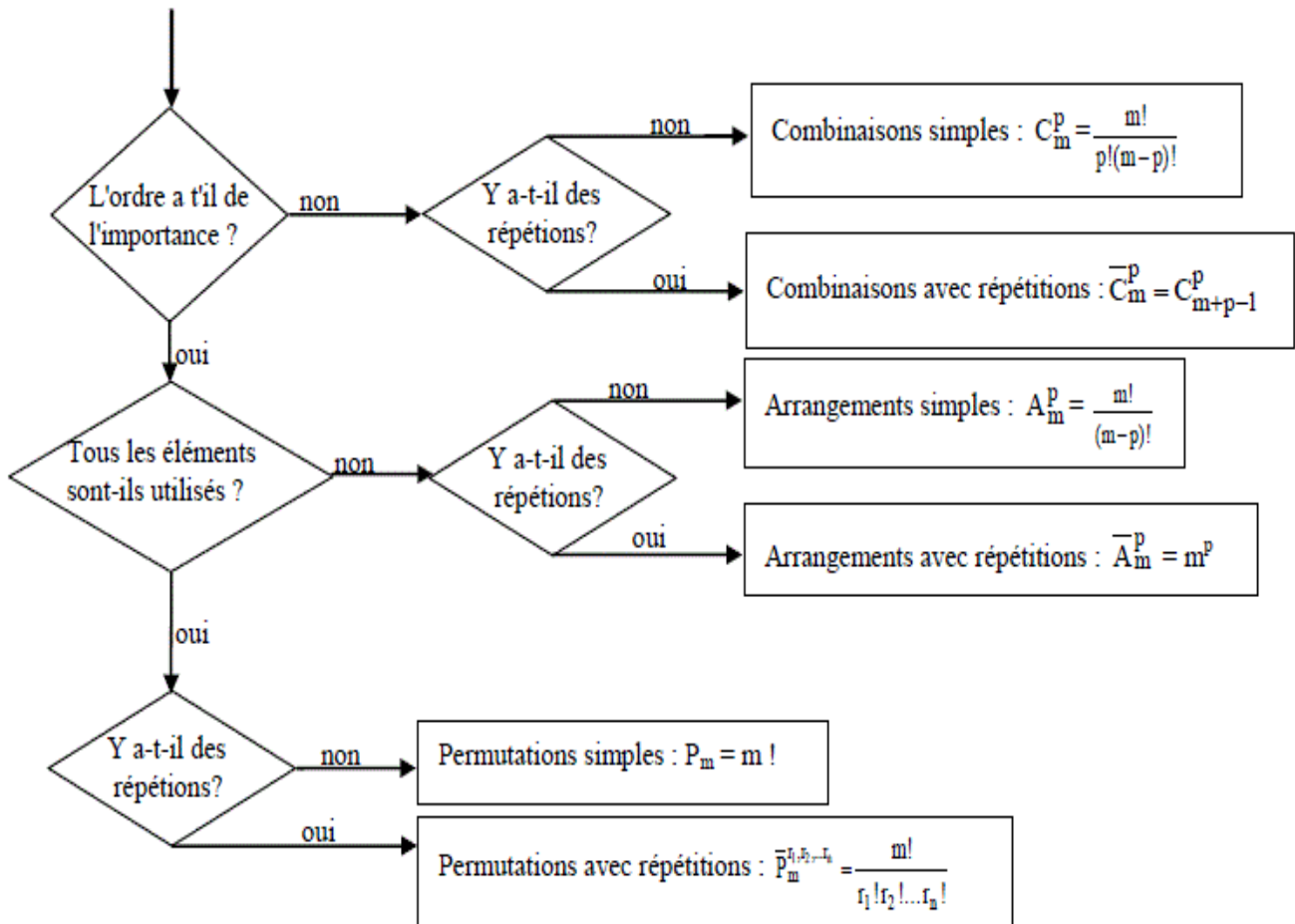
$$K_1^7 K_4^8 = C_{1+(7-1)}^7 C_{4+(8-1)}^8 = C_7^7 C_{11}^8 = 165 \text{ résultats possibles.}$$

- 3) Les cliniques connues A et B reçoivent entre-elles 10 intoxiqués qui vont être répartis dans les deux cliniques $K_2^{10} = C_{2+(10-1)}^{10} = C_{11}^{10} = 11$ manières différentes :

$$D'où : K_2^{10} * K_3^5 = C_{11}^{10} * C_7^5 = 11 * 21 = 231 \text{ cas différents.}$$

ORGANIGRAMME SERVANT L'ANALYSE COMBINATOIRE :

Quelles questions se poser lors de la résolution d'un problème d'application directe en analyse combinatoire ?



Ultérieurement, nous rencontrerons des situations plus générales qui ne peuvent être résolues uniquement par le questionnement de ce tableau.