UNIVERSITE DE BATNA_2 **FACULTE DE MEDECINE**

SERIE DE TD N° 4 ***en BIOSTATISTIQUE 2019/2020***

Exercices sur les lois de probabilité

Exercice n° 01 :

Huit volontaires souhaitent participer à un essai clinique pour tester un nouveau médicament pour la dépression. Les huit candidats étant composés de 5 hommes et 3 femmes, on en choisit au hasard 5 volontaires.

Calculer la probabilité que les 5 volontaires choisis soient composés de :

a) Trois hommes et deux femmes.
b) Uniquement d'hommes.
c) Uniquement de femmes.
d) Les cinq volontaires de même sexe.

Solution :

a) Probabilité : p = $\frac{C_5^3\, C_3^2}{C_8^5}$ = 30/56 = 15/28

c) Probabilité : p = $\frac{C_5^5\, C_3^0}{C_8^5}$ = 1/56

c) Probabilité : p = 0

d) Probabilité : p = $\frac{C_5^5\, C_3^0}{C_8^5}$ = 1/56

Exercice n° 02 :

Trois bacheliers avaient tous obtenu au bac une note leur permettant de s'inscrire à la faculté de médecine dans l'une des trois spécialités : pharmacie, chirurgie dentaire ou médecine. Ces trois étudiants n'ont de préférence pour aucune des trois spécialités et chacun a ainsi décidé de choisir au hasard une spécialité parmi les trois.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

a) « A » : les trois étudiants choisissent la même spécialité.
b) « B » : les trois étudiants ne choisissent pas la même spécialité.
c) « C » : exactement deux des trois étudiants choisissent la médecine.
d) « D » : exactement deux des trois étudiants choisissent la même spécialité
e) « E » : le choix de chacun est différent des choix des deux autres.

Solution :

L'espace équiprobable est l'ensemble des arrangements avec répétitions de 3 parmi 3: le nombre de cas possibles = R_3^3 = 3^3 = 27

a) P (A) = $\frac{3}{3^3}$ = 1/9

b) P (B) = 1 – P (A) = 1 – 1 / 9 = 8 / 9

c) Le nombre des cas favorables = $C_3^2 * 2$ = 6 : (2 étudiants parmi 3 choisissent la médecine, ensuite le 3ème a à choisir parmi les 2 spécialités qui restent) : P (C) = $\frac{C_3^2 * 2}{3^3}$ = 6/27 = 2/9

d) Comme il y a 3 spécialités alors c'est 3 fois le 3ème résultat : P (D) = $\frac{3 * C_3^2 * 2}{3^3}$ = 18/27 = 2/3

e) Les spécialités sont 2 à 2 différentes : P(E) = $\frac{3\,!}{3^3}$ = 2/9

Exercice n° 03 :

On met dans une urne cinq boules portant chacune un numéro : 1, 2, 3, 4 et 5. Les boules 1 et 2 sont de couleur noire et les boules 3, 4 et 5 sont de couleur blanche. On tire au hasard de l'urne une première boule et on la remet dans l'urne, on tire une deuxième boule et on la remet également dans l'urne, on tire enfin une troisième boule.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

1) E 1 : Les boules tirées sont dans l'ordre 322.
2) E 2 : Les boules tirées sont dans l'ordre BBN.
3) E 3 : Parmi les trois boules tirées, exactement deux boules sont noires.
4) E 4 : Parmi les trois boules tirées, exactement une boule est blanche.
5) E 5 : Les trois boules tirées sont noires.
6) E 6 : Parmi les trois boules tirées, au moins deux sont blanches.

Solution :

L'ensemble équiprobable dans cet exercice est l'ensemble des arrangements avec répétition. Pour calculer les probabilités de ces évènements, on doit calculer le nombre des évènements élémentaires (c'est-à-dire le nombre d'arrangements avec répétition) dans chacun de ces évènements :

1. E_1 contient un seul arrangement avec répétition qui est 322, donc $P(E_1) = \frac{1}{5^3}$ = 1/125.
2. Le nombre d'arrangements avec répétition dans l'évènement E_2 (qui est 3 choix au 1er tirage, 3 choix au 2ème tirage et 2 choix pour le 3ème tirage) est égal à $3 * 3 * 2 = 18$, en effet E_2 = {(3,3,1) ; (3,4,1) ; (3,5,1) ; (4,3,1) ; (4,4,1) ; (4,5,1) ; (5,3,1) ; (5,4,1) ; (5,5,1) ; (3,3,2) ; (3,4,2) ; (3,5,2) ; (4,3,2) ; (4,4,2) ; (4,5,2) ; (5,3,2) ; (5,4,2) ; (5,5,2)}. E_2 est formé de dix-huit évènements élémentaires, donc $P(E_2) = \frac{3^2 * 2}{5^3}$ = 18/125.
3. $P(E_3) = \frac{C_3^2 * 2^2 * 3}{5^3}$ = 36/125.
4. $E_4 = E_3$ donc $P(E_4) = P(E_3) = \frac{C_3^2 * 2^2 * 3}{5^3}$ = 36/125.
5. Le nombre d'éléments dans $E_5 = 2^3 = 8$. Les éléments de E_5 sont les suivants : E_5 = {(1,1,1) ; (1,1,2) ; (1,2,1) ; (1,2,2) ; (2,1,1) ; (2,1,2) ; (2,2,1) ; (2,2,2) c'est-à-dire : $P(E_5) = \frac{2^3}{5^3}$ = 8/125.
6. On a ou bien 2 blanches ou bien 3 blanches : $P(E_6) = \frac{C_3^2 * 3^2 * 2 + C_3^3 * 3^3}{5^3}$ = 81/125.

Exercice n° 04 :

Un examen de bio statistique est donnée sous forme de 20 QCS, chaque QCS est une question à laquelle on propose quatre réponses a, b, c, d, parmi lesquelles il y a une et une seule réponse juste, que l'étudiant doit cocher. L'étudiant aura un point pour chaque réponse juste. La note de l'étudiant est donc égale au nombre de réponses justes. Ali a assisté à l'examen et n'était sûr d'aucune réponse et il a ainsi répondu au hasard à chacune des 20 QCS.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

1) A : Ali aura la note complète, c'est–à–dire 20 sur 20.
2) B : Ali aura 10 sur 20.
3) C : Ali aura au moins 18 sur 20.
4) D : Ali n'aura pas la moyenne (donner uniquement la formule).
5) E : Ali aura 0 sur 20.

Solution :

L'espace équiprobable est l'ensemble des arrangements avec répétitions de 20 parmi 4. Le nombre des cas possibles est égal : $R_4^{20} = 4^{20}$

1) $P(A) = \frac{1}{4^{20}}$
2) $P(B) = \frac{C_{20}^{10} * 1^{10} * 3^{10}}{4^{20}}$
3) $P(C) = [\, C_{20}^{18} * 1^{18} * 3^2 + C_{20}^{19} * 1^{19} * 3^1 + C_{20}^{20} * 1^{20} * 3^0] * \frac{1}{4^{20}}$
4) $P(D) = [\, \sum_0^9 C_{20}^{i} * 1^{i} * 3^{20-i}\,] * \frac{1}{4^{20}}$
5) $P(E) = \frac{3^{20}}{4^{20}} = 0.75^{20}$

Exercice n° 05 :

Un glucomètre fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts différents désignés par A et B et on sait que 4 % des appareils fabriqués ont le défaut A, 7 % ont le défaut B et 3 % ont les deux défauts simultanément. Un patient diabétique achète l'un des appareils produits (glucomètres).

Quelle est la probabilité que l'appareil acheté :

a) Soit sans défaut ?
b) Ne présente pas le défaut A ?
c) Ne présente que le défaut A ?
d) Présente au moins l'un des deux défauts A et B ?

Solution :

On a : $P(A) = 4\ \%$; $P(B) = 7\ \%$ et $P(A \cap B) = 3\%$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.04 + 0.07 - 0.03 = 0.08 = 8\ \%$

a) P (Glucomètre sans défaut) = $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.08 = 0.92 = 92\ \%$
b) P (Glucomètre ne présente pas le défaut A) = $P(\overline{A}) = 96\ \%$
c) P (Glucomètre ne présente que le défaut A) : On sait que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \Rightarrow$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.04 - 0.03 = 0.01$
(*Nota : 2ème méthode*) : $P(A \cap B) = 3\% = P(A) * P(B \mid A) \Rightarrow P(B \mid A) = \frac{3\ \%}{4\ \%} = 0.75 \Rightarrow$
$P(\overline{B} \mid A) = 0.25 \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) * P(\overline{B} \mid A) = 0.04 * 0.25 = 0.01$
d) $P(A \cup B) = 8\ \%$