UNIVERSITE DE BATNA_2 — *FACULTE DE MEDECINE*

SERIE DE TD N° 4 — *DE BIOSTATISTIQUE*

1ère ANNEE, 20/21

Probabilités

Exercice n° 01 :

Dans un groupe de 15 donneurs de sang, on trouve :

6 du groupe $\mathbf{A^+}$	3 du groupe $\mathbf{O^-}$	2 du groupe $\mathbf{B^-}$	4 du groupe $\mathbf{AB^+}$

En guise de récompense la direction de l'hôpital prend au hasard 3 donneurs pour leur offrir un séjour à la Mecque (Omra). Calculer les probabilités des événements suivants :

1. Les trois donneurs appartiennent au même groupe ?
2. Parmi les trois donneurs il y a au moins 1 du groupe $\mathbf{B^-}$?
3. Les donneurs pris au hasard appartiennent aux trois groupes différents ?

Solution :

Le nombre de cas possibles C_{15}^{3} = 455 cas différents.

1. Nombre de cas favorables :

   On peut avoir 3 donneurs appartenant au même groupe de la manière suivante :
   [{3 de $\mathbf{A^+}$}∪{3 de $\mathbf{O^-}$}∪{3 de $\mathbf{AB^+}$}] = [$C_6^3 + C_3^3 + C_4^3$] = 20 + 1 + 4 = 25 cas différents.

   D'où la probabilité cherchée = $\frac{25}{455}$ = 5.494505495 % ≅ 5.49 %

2. Nombre de cas favorables :

   On peut avoir au moins un donneur du groupe $\mathbf{B^-}$ de la façon suivante :

   [{1 donneur de $\mathbf{B^-}$ et 2 donneurs des autres groupes}∪{2 donneurs de $\mathbf{B^-}$ et 1 donneur des autres groupes}] = $C_2^1 * C_{13}^2 + C_2^2 * C_{13}^1$ = 2 ∗ 78 + 1 ∗ 13 = 169 cas différents.
   D'où la probabilité cherchée = $\frac{169}{455}$ = 37.1428571 % ≅ 37.14 %

3. Nombre de cas favorables dans le cas où chaque donneur provient d'un groupe différent :
   $C_6^1 * C_2^1 * C_4^1 + C_6^1 * C_2^1 * C_3^1 + C_2^1 * C_4^1 * C_3^1 + C_4^1 * C_3^1 * C_6^1$ = 180 Cas différents.

   D'où la probabilité cherchée : $\frac{180}{455}$ = 39.5604395 % ≅ 39.56 %

Exercice n° 02 :

On place dans une boite 20 gélules d'un médicament de mêmes dimensions mais de couleurs différentes ; 12 sont jaunes et 8 vertes.

On tire successivement 6 gélules ; chaque gélule tirée est remise dans la boite après qu'on a examiné sa couleur. Calculer la probabilité :

1. D'avoir tiré 4 gélules jaunes et 2 gélules vertes dans cet ordre.
2. D'avoir tiré 6 gélules vertes.
3. Que les 6 gélules ne soient pas toutes de même couleur.

Solution :

C'est un tirage successif (l'une après l'autre) avec remise (non exhaustif) de 6 gélules d'un médicament d'une boîte contenant 20 gélules ; c'est donc un arrangement avec répétition dont la formule est $R_n^p = R_{20}^6 = 20^6$ cas possibles.

Les lettres J et V désignent les couleurs jaune et verte et les indices 1 ; 2 ; 3… sont les numéros de tirage des gélules de la boîte, alors on a : P(J) = $\frac{12}{20}$ = 0.6 et P(V) = $\frac{8}{20}$ = 0.4

a) Probabilité d'avoir 4 gélules jaunes et 2 gélules vertes : P (A) = $\frac{nb\ de\ cas\ favorables\ de\ A}{nb\ de\ cas\ possibles}$

P ({4J + 2V}) = $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{12^4 8^2}{20^6}$ = 0.020736 ≅ 2.07 %

<u>Autre méthode :</u> Avec le théorème des probabilités composées
$P(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap V_5 \cap V_6) = [P(J_1)P(J_2 | J_1)P(J_3 | J_1 \cap J_2)P(J_4 | J_1 \cap J_2 \cap J_3)] * [P(V_5 | J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4)P(V_6 | J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \cap V_5)]$ et avec l'indépendance des évènements $\{P(J_2 | J_1) = P(J_2),\ P(J_3 | J_1 \cap J_2) = P(J_3),\ \ldots\}$, c'est = $[P(J_1)P(J_2)P(J_3)P(J_4)] * [P(V_5)P(V_6)]$ = $[P(J)P(J)P(J)P(J)] * [P(V)P(V)] = (0.6)^4 * (0.4)^2$ = 0.020736 ≅ 2.07 %

b) Probabilité de 6 gélules vertes P (6V) = $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{8^6}{20^6} = (0.4)^6$ ≅ 0.41%

<u>Autre méthode :</u> Avec le théorème des probabilités composées
$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5 \cap V_6) = [P(V_1)P(V_2 | V_1)P(V_3 | V_1 \cap V_2)P(V_4 | V_1 \cap V_2 \cap V_3) P(V_5 | V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4)P(V_6 | V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)]$ et avec l'indépendance de ces évènements $\{P(V_2 | V_1) = P(V_2),\ P(V_3 | V_1 \cap V_2) = P(V_3),\ \ldots\} = [P(V_1)P(V_2)P(V_3)P(V_4)] * [P(V_5)P(V_6)]$, c'est = $P(V)P(V)P(V)P(V)P(V)P(V) = [P(V)]^6 = (0.4)^6$ = 0.004096 ≅ 0.41 %

c) Probabilité qu'elles ne soient pas toutes de même couleur = ?

On procède par *<u>l'évènement complémentaire</u>* ; probabilité qu'elles soient toutes de même couleur c'est-à-dire ou bien jaunes ou bien vertes ; P (6J ou 6V) = P(6J) + P(6V).

La probabilité que les 6 gélules soient vertes calculée en b, P(6V) = $(0.4)^6$ = 0.004096

La probabilité que les 6 gélules soient jaunes sera calculée comme en b, P(6J) = $(0.6)^6$ =

0.046656 ⇒ Probabilité (6 de même couleur) = $P[(6J) \cup (6V)]$ = P(6J) + P(6V) = 0.050752

Probabilité (6 de couleur différente) = 1 – Probabilité (6 de même couleur) = 1 – 0.050752 =

0.949248 d'où la probabilité cherchée = 0.949248 ≅ 95 %.

<u>Note :</u> Il y a une *<u>2ème Méthode</u>* pour calculer la probabilité d'avoir 6 gélules de couleur différente ; cette méthode est la ***loi binomiale*** **B (n = 6 ; p = 0.6)** à être étudiée ultérieurement.

<u>Exercice n° 3 :</u>

Lors d'un test, un étudiant doit répondre à 7 questions sur 9, numérotées de 1 (un) à 9 (neuf).

I) De combien de façons peut-il répondre si :

1. Les 3 premières questions sont obligatoires ?
2. Il doit répondre à au moins 4 des 5 premières questions ?
3. Il doit répondre à la première et à la dernière question ?

II) Si l'étudiant choisit les 7 questions au hasard, calculer les probabilités des évènements suivants :

1. Les 3 premières questions sont parmi les 7 questions choisies.
2. Au moins l'une des 3 premières questions soit parmi les 7 questions choisies.
3. Aucune des 3 premières questions n'est parmi les 7 questions choisies.
4. Au moins 4 des 5 premières questions soient parmi les 7 questions choisies.

Solution :

Partie I :

Il s'agit de trouver le nombre de possibilités qu'il y a, de tirer 7 questions parmi 9.

Le nombre de cas possibles est donc la combinaison simple : $C_9^7 = 36$ cas différents.

1. Le nombre de cas favorables :

   Il doit choisir les 3 premières questions qui sont obligatoires et bien sûr 4 autres parmi les 6 dernières donc on a : $C_3^3 * C_6^4 = 1 * 15 = 15$ cas différents.

2. Le nombre de cas favorables :

   Il doit choisir au moins 4 des 5 premières questions et bien sûr le reste des autres questions.

   Donc on a : $C_5^4 * C_4^3 + C_5^5 * C_4^2 = 5 * 4 + 1 * 6 = 20 + 6 = 26$ cas différents.

3. Le nombre de cas favorables :

   Il doit choisir la 1ère et la 9ème et bien sûr les 5 autres questions du reste (7 questions).

   Donc on a : $C_2^2 * C_7^5 = 1 * 21 = 21$ cas différents.

Partie II :

Il s'agit de trouver le nombre de possibilités qu'il y a, de tirer 7 questions parmi 9.

Le nombre de cas possibles est donc la combinaison simple : $C_9^7 = 36$ cas différents.

1. *Le nombre de cas favorables* : Il doit prendre 3 premières questions et bien sûr 4 parmi les 6 qui restent pour compter au total 7 questions du test, donc on a : $C_3^3 * C_6^4 = 1 * 15 = 15$ cas différents ; d'où la probabilité cherchée = $\frac{15}{36} \cong 41.67$ %
2. *Le nombre de cas favorables* :
   L'étudiant doit choisir au moins une des 3 premières questions pour compléter son questionnaire de 7 questions sur les 9 questions proposées ; s'il ne choisissait aucune parmi ces 3 premières questions, il serait dans l'impossibilité de faire ce test de 7 questions ; donc tout test exige au moins 1 des 3 premières questions ({1 des 3 et 6 du reste}∪{2 des 3 et 5 du reste}∪{3 des 3 et 4 du reste}).

   On peut également dire que forcément une des 3 premières questions doit se trouver dans les 7 questions pour accomplir le test en question.

   $$C_3^1 * C_6^6 + C_3^2 * C_6^5 + C_3^3 * C_6^4 = 3 * 1 + 3 * 6 + 1 * 15 = 36 \text{ cas favorables.}$$

   Alors dans cette question on confirme que le nombre de cas favorables (36) est égale au nombre de cas possibles (36) et par conséquent la probabilité cherchée est égale à $\frac{36}{36} = 1$.
3. *Le nombre de cas favorables* :
   Si aucune des 3 premières questions n'est choisie, alors l'étudiant sera dans l'impossibilité de faire le test qui doit comporter 7 questions, car il va lui rester uniquement 6 questions de

9 et donc il n'arrive pas à établir le questionnaire de 7 questions. Impossible de faire le test exigé et donc le nombre de cas favorables est nul $\Rightarrow$ La probabilité cherchée est donc nulle.

4. <u>*Le nombre de cas favorables*</u> : Il doit choisir au moins 4 des 5 premières questions et bien sûr le reste des autres questions, donc on a : $C_5^4 * C_4^3 + C_5^5 * C_4^2 = 5 * 4 + 1 * 6 = 20 + 6 = 26$ cas différents ; d'où la probabilité cherchée = $\frac{26}{36} \cong 72.22$ %

Exercice n° 4 :

Considérons le tableau suivant, qui montre l'incidence de l'infarctus du myocarde (noté IDM) chez les femmes qui avaient utilisé un certain médicament oral et les femmes qui n'avaient jamais utilisé ce médicament oral. Les données du tableau sont fictives et utilisées uniquement à des fins d'illustration.

$X \setminus Y$	$B \equiv Infarctus$	$\bar{B} \equiv Pas\ d'infarctus$	$Total$
$A \equiv M.O$	55	65	120
$\bar{A} \equiv \overline{M.O}$	25	125	150
$Total$	80	190	270

Supposons que les proportions dans le tableau représentent la « population infinie » de femmes adultes. On choisit au hasard une femme et on considère les deux évènements suivants :

A :	*« La femme a utilisé un médicament oral M.O. »*
B :	*« La femme a eu un IDM »*

a. Calculer les probabilités suivantes :

1. $P(A)$	2. $P(\bar{A})$	3. $P(B)$	4. $P(\bar{B})$
5. $P(A \cap B)$	6. $P(A \cup B)$	7. $P(A\|B)$	8. $P(B\|A)$

b. A et B sont-ils incompatibles ?

c. A et B sont-ils indépendants ?

Solution :

Dans le tableau de contingence il y a tous les effectifs nécessaires pour calculer les probabilités demandées. L'espace fondamental Ω est ici la population des femmes.

a) P (A) = $\frac{eff\ A}{eff\ \Omega} = \frac{120}{270} = \frac{4}{9} \cong 44.44$ % P ($\bar{A}$) = $\frac{eff\ \bar{A}}{eff\ \Omega} = \frac{150}{270} = \frac{5}{9} \cong 55.56$ %

P (B) = $\frac{eff\ B}{eff\ \Omega} = \frac{80}{270} = \frac{8}{27} \cong 29.63$ % P ($\bar{B}$) = $\frac{eff\ \bar{B}}{eff\ \Omega} = \frac{190}{270} = \frac{19}{27} \cong 70.37$ %

P (A ∩ B) = $\frac{eff\ (A \cap B)}{eff\ \Omega} = \frac{55}{270} = \frac{11}{54} \cong 20.37$ %

P (A ∪ B) = $\frac{eff\ (A \cup B)}{eff\ \Omega}$ = P (A) + P (B) – P (A ∩ B) ≅ 44.44% + 29.63% – 20.37% ≅ 53.70 %

P (A | B) = $\frac{\text{eff}\ (A \cap B)}{\text{eff}\ (B)} = \frac{55}{80} \cong 68.75$ % P (B | A) = $\frac{\text{eff}\ (A \cap B)}{\text{eff}\ (A)} = \frac{55}{120} \cong 45.83$ %

b) Comme effectif (A ∩ B) = 55 ≠ 0 alors A ∩ B ≠ Φ ⇒ donc A et B ne sont pas incompatibles.

c) Comme P (A ∩ B) = $\frac{11}{54} \cong 20.37$ % ≠ P (A) ∗ P (B) = $\frac{4}{9} * \frac{8}{27} \cong 13.17$ % ⇒ alors A et B ne sont pas indépendants.

Exercice n° 5 :

Dans une population de nouveau-nés, la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52. Dans cette population, 3% des filles et 2% des garçons présentent un ictère du nourrisson.

1. Calculer la probabilité qu'un nourrisson présente un ictère.
2. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant un ictère soit une fille.
3. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant un ictère soit un garçon ?

Solution :

Utilisation des probabilités composées, conditionnelles, totales et formule de BAYES.
Les symboles sont : G garçon, F fille, I ictère.
Les données sont : P(G) = 0.52 ; P(I/F) = 0.03 ; P(I/G) = 0.02 ; on tire P(F) = 0.48

$P(I) = P[(F\cap I)\cup(G\cap I)] = P(F) * P(I/F) + P(G) * P(I/G) = 0.48 * 0.03 + 0.52 * 0.02 = 0.0248$

1. Probabilité qu'un nourrisson présente un ictère est 0.0248
2. $P(F|I) = \frac{P(F\cap I)}{P(I)} = \frac{P(F) * P(I|F)}{P(I)} = \frac{0.48 * 0.03}{0.0248} = 0.580645161 \cong 58.06\ \%$
3. $P(G|I) = \frac{p(G\cap I)}{p(I)} = \frac{P(G) * P(I|G)}{P(I)} = \frac{0.52 * 0.02}{0.0248} = 0.419354838 \cong 41.94\ \%$

Le diagramme arborescent :

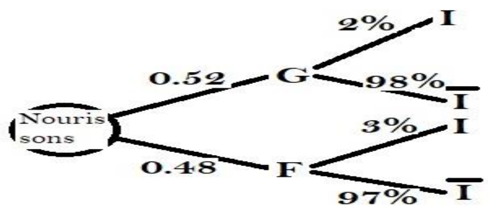


Tableau de Contingence :

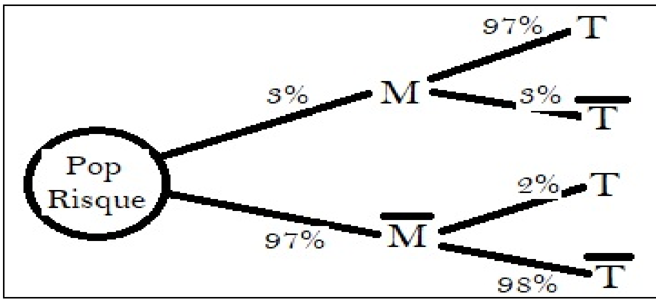
Sexe \ Ictère %	I	Non I	Total %
Garçon	1.04	50.96	52
Fille	1.44	46.56	48
Total %	2.48	97.52	100

Exercice n° 6 :

Lors d'une opération de dépistage de l'hépatite B chez une population à risque, on constate que 3% sont atteints. Chez les sujets atteints le test de dépistage est positif dans 97% des cas. Chez les sujets non atteints le test est positif dans 2% des cas.

1. Calculer la probabilité qu'un sujet ne soit pas atteint d'hépatite B si le résultat du test est positif.
2. Calculer la probabilité qu'un sujet soit atteint d'hépatite B si le résultat du test est positif.

Solution :



Données des hypothèses :

M : « être malade » $\overline{M}$: « être non malade »

T : « test positif » $\overline{T}$: « test négatif »

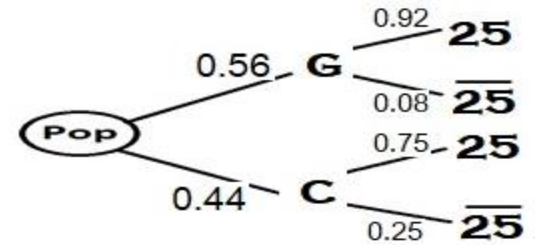
P(M) = 3 % ; $P(T|M)$ = 97 % ; $P(T|\overline{M})$ = 2 %

1. $P(\overline{M}|T) = \frac{P(T\cap \overline{M})}{P(T)} = \frac{0.97 * 0.02}{0.97*0.02+0.03*0.97} = 40\ \%$
2. $P(M|T) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)} = \frac{0.97 * 0.03}{0.97*0.02+0.03*0.97} = 60\ \%$

Exercice n° 7 :

Dans un service de prise en charge des brulés, 56% des pansements sont réalisés par un médecin généraliste (évènement G) et le reste des pansements sont assurés par un chirurgien (évènement C). La guérison au bout de 25 jours de la plaie causée par la brûlure est obtenue à 75% si le pansement est réalisé par le chirurgien et elle est obtenue à 92% lorsque le pansement est fait par le généraliste. Un malade brûlé est pris au hasard, il s'est avéré guéri de sa plaie au bout de 25 jours. Quelle est la probabilité que son pansement ait été réalisé par le chirurgien ?

Solution :

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
<u>Données des hypothèses</u> :
G : « Généraliste » C : « Chirurgien »
25 : « Guéri en 25 j » $\overline{25}$: « non guéri en 25 j »
P(G) = 56 % ; P(25j | G) = 92 % ; P (25j | C) = 75 %
</td>
</tr>
</table>

$P(25j) = 0.56 * 0.92 + 0.44 * 0.75 = 84.52$ %

$P(\overline{25}j) = 0.56 * 0.08 + 0.44 * 0.25 = 15.48$ %

$P(C \mid 25j) = \frac{P(C\cap 25j)}{P(25j)} = \frac{0.44 * 0.75}{0.56*0.92+0.44*0.75} = 39.0440132$ % $\cong 39.044$ % (1)

$P(G \mid 25j) = \frac{P(G\cap 25j)}{P(25j)} = \frac{0.56 * 0.92}{0.56*0.92+0.44*0.75} = 60.9559867$ % $\cong 60.956$ % (2) ; (1) & (2) $\Rightarrow$ 100 %

$P(C \mid \overline{25}j) = \frac{P(C\cap \overline{25}j)}{P(\overline{25}j)} = \frac{0.44 * 0.25}{0.56*0.08+0.44*0.25} = 71.0594315$ % $\cong 71.059$ % (3)

$P(G \mid \overline{25}j) = \frac{P(G\cap \overline{25}j)}{P(\overline{25}j)} = \frac{0.56 * 0.08}{0.56*0.08+0.44*0.25} = 28.9405684$ % $\cong 28.941$ % (4) ; (3) & (4) $\Rightarrow$ 100 %